

# Bayesiánská analýza

## I. Základní principy a pojmy bayesiánské ekonometrie

# Obsah tématu

- 1 Bayesiánská teorie
- 2 Bayesiánský výpočetní postup

# Bayesiánský přístup – motivace

- Eddy, Sean R. (2004) – What is Bayesian statistics?

# Obsah tématu

1 Bayesiánská teorie

2 Bayesiánský výpočetní postup

# Úvod

- Cíl: obecné principy bayesiánské ekonometrie.
- Koop (2003) – kapitola 1.
- Ekonometrie:
  - odhad parametrů modelu (regresní koeficienty);
  - porovnání různých modelů (testování hypotéz);
  - předpověď.
- Bayesiánská ekonometrie – využití několika jednoduchých pravidel pravděpodobnosti = univerzálnost.

# Základní principy I

- Nechť  $A$  a  $B$  označují dva jevy,  $p(B|A)$  je podmíněná pravděpodobnost jevu  $B$  za podmínky realizace jevu  $A$ ; souhrn toho co víme o  $B$  známe-li  $A$ .
- Bayesiánský přístup –  $A$  = něco známého (např. data);  $B$  = něco neznámého (např. koeficienty v modelu).
- Nechť  $y$  jsou data,  $y^*$  nepozorovaná data (tj. předpověď),  $M_i$  pro  $i = 1, \dots, m$  je množina modelů za předpokladu, že každý závisí na parametrech  $\theta^i$ .
  - Znalosti o parametrech v daném modelu – posteriorní hustota  $p(\theta^i|M_i, y)$ .
  - Porovnání modelů – posteriorní pravděpodobnost modelu  $p(M_i|y)$ .
  - Předpověď – předpovědní hustota  $p(y^*|y)$ .

## Základní principy II

- Podmíněná pravděpodobnost  $A$  za podmínky  $B$ , označována  $Pr(A|B)$  je pravděpodobnost realizace jevu  $A$  za podmínky, že nastal jev  $B$ .
- Pravidla pro podmíněnou pravděpodobnost:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A, B)}{Pr(B)},$$

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A, B)}{Pr(A)}.$$

# Bayesův teorém

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B)}$$

- Lze interpretovat nejen pro dva jevy ale i pro dvě náhodné veličiny.
- Nahrazení  $Pr()$  pravděpodobnostní funkcí či hustotou pravděpodobnosti.



# Odhad I

- Jeden model závisející na parametrech  $\theta$  (např. regresní model s vysvětlujícími proměnnými).
- Zajímá nás posteriorní hustota a její vlastnosti  $p(\theta|y)$ .
- Bayesovo pravidlo:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$

- Pro náš model:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}$$

# Odhad II

- $p(\theta|y)$  – otázka „Při daných datech, co víme o  $\theta$ ?“.
- Bayesiánský přístup –  $\theta$  je náhodná veličina.
- Klasický přístup –  $\theta$  není náhodná veličina.
- V rámci odhadu lze ignorovat  $p(y)$ , neboť neobsahuje  $\theta$ :

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta).$$

# Popis výrazů

- $p(\theta|y)$  – posteriorní hustota pravděpodobnosti.
- $p(y|\theta)$  – věrohodnostní funkce.
- $p(\theta)$  – apriorní hustota pravděpodobnosti.
- $\propto$  – „je proporcionální vzhledem“.
- $p(\theta)$  – nezávisí na datech, obsahuje nedatovou informaci o  $\theta$ .

# Pojetí pravděpodobnosti a nejistoty

- „Frekvencistický“ (klasický) přístup – pravděpodobnost nastání nějaké události je limitou její relativní četnosti (četnosti, se kterou událost nastává pokud se neomezeně zvyšuje množství dostupných dat).
- Problém v praxi při studiu zřídka se opakujících jevů (potřeba využití teoretických výsledků).
- Bayesovský přístup – subjektivní chápání pravděpodobnosti vyjadřující stupeň víry (přesvědčení), který je aktualizován po získání dodatečných dat.
- „Frekvencistická nejistota“ – zdrojem nejistoty je náhodnost spjatá s realizací náhodné veličiny (pravděpodobnostní rozdělení proměnných není předmětem nejistoty).
- „Bayesovská nejistota“ – pravděpodobnostní rozdělení samo o sobě nejisté (jeho možné změny a modifikace po získání nových informací)  
→ nejistota je implicitně spojená s aktualizací pravděpodobnosti (apriorní pravděpodobnost → posteriorní pravděpodobnost).

# Apriorní informace

- Kontraverzní – nevědeckost?
- Máme-li apriorní informaci, měli bychom ji využít.
- Lze využít i neinformativní priory.
- Empirické bayesiánské metody – prior z dat.
- Citlivostní analýza pro priory.

# Predikce

- Prediktivní hustota pravděpodobnosti –  $p(y^*|y)$ .
- Integrací sdružené hustoty pravděpodobnosti – marginální hustota:

$$p(y^*|y) = \int p(y^*, \theta|y) d\theta$$

$$p(y^*|y) = \int p(y^*|y, \theta)p(\theta|y) d\theta$$

# Porovnání modelů

- Modely  $M_i$  pro  $i = 1, \dots, m$  závisí na parametrech  $\theta^i$ .
- Posteriorní pravděpodobnost modelů  $p(M_i|y)$ .
- Bayesovo pravidlo –  $B = M_i$  a  $A = y$ :

$$p(M_i|y) = \frac{p(y|M_i)p(M_i)}{p(y)}$$

- $p(M_i)$  – apriorní pravděpodobnost modelu.
- $p(y|M_i)$  – marginální věrohodnost.

# Výpočet marginální věrohodnosti

- Posteriorní hustotu pravděpodobnosti lze zapsat jako:

$$p(\theta^i|y, M_i) = \frac{p(y|\theta^i, M_i)p(\theta^i|M_i)}{p(y|M_i)}$$

- Integrací obou stran dle  $\theta^i$  lze získat:

$$p(y|M_i) = \int p(y|\theta^i, M_i)p(\theta^i|M_i)d\theta^i$$

- Marginální pravděpodobnost modelu – prior a věrohodnostní funkce.



# Posteriovní podíl šancí

- Posteriovní podíl šancí:

$$PO_{ij} = \frac{p(M_i|y)}{p(M_j|y)} = \frac{p(y|M_i)p(M_i)}{p(y|M_j)p(M_j)}$$

- Posteriovní podíl šancí a marginální pravděpodobnost modelu.
- Bayesův faktor:

$$BF_{ij} = \frac{p(y|M_i)}{p(y|M_j)}$$

# Obsah tématu

1 Bayesiánská teorie

2 Bayesiánský výpočetní postup

# Prezentace výsledků

- Analogicky ke klasickému přístupu – bodové odhady a konfidenční intervaly.
- Obvyklý bodový odhad – posteriorní střední hodnota.
- Nechť  $\theta$  je  $k$ -prvkový vektor,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ . Posteriorní střední hodnota každého prvku vektoru je dána jako:

$$E(\theta_i|y) = \int \theta_i p(\theta|y) d\theta$$

# Očekávaná hodnota I

- Necht  $g()$  je funkce, pak očekávaná (střední) hodnota  $E[g(X)]$  je definována pro diskrétní náhodnou veličinu  $X$  jako:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^N g(x_i)p(x_i)$$

- Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  (za podmínky  $E[g(X)] < \infty$ ):

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

## Očekávaná hodnota II

- Měřítkem disperze je posteriorní standardní odchylka, tedy odmocnina posteriorního rozptylu počítaného jako:

$$\text{var}(\theta_i|y) = E(\theta_i^2|y) - E(\theta_i|y)^2$$

- Vyžaduje vyhodnotit posteriorní střední hodnotu a rovněž také:

$$E(\theta_i^2|y) = \int \theta_i^2 p(\theta|y) d\theta$$

- Pravděpodobnost, že koeficient je kladný:

$$p(\theta_i \geq 0|y) = \int_0^{\infty} p(\theta|y)$$

# Charakteristiky posteriorní hustoty

- Většina charakteristik má formu:

$$E[g(\theta)|y] = \int g(\theta)p(\theta|y)d\theta$$

- $g(\theta)$  – funkce, která nás zajímá.
- Všechny vlastnosti – forma integrálu, stejně jako marginální věrohodnost a prediktivní hustota.
- Až na výjimky - nemožnost vyhodnocení integrálu analyticky.

# Posterionní simulace

- Integrály v Bayesiánské analýze vyhodnocovány simulačními metodami.
- Zákon velkých čísel a centrální limitní věta.
- Zákon velkých čísel – předpokládejme náhodný výběr s posterionní hustoty  $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(S)}$ . Pro  $S$  jdoucí k nekonečnu konverguje výběrový průměr ke střední hodnotě  $E[\theta|y]$ .
- Bayesiánský přístup – využívá asymptotické teorie, ovšem asymptotické v  $S$  (pod kontrolou výzkumníka).

# Monte Carlo integrace

- Nechť  $\theta^{(s)}$  pro  $s = 1, \dots, S$  je náhodný výběr z  $p(\theta|y)$  a definujme:

$$\hat{g}_S = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S g(\theta^{(s)}).$$

- $\hat{g}_S$  konverguje k  $E[g(\theta)|y]$  pro  $S$  jdoucí k nekonečnu.
- MC integrace – aproximace  $E[g(\theta)|y]$ , jen pro  $S = \infty$  jde chyba aproximace k nule.
- Volba  $S$  na nás – výpočetní nároky.
- Pro odhad chyby aproximace - centrální limitní věta  $\rightarrow$  numerická standardní chyba (NSE).



# Počítačový software

- Většinou vlastní programy v prostředí Matlab, Gauss či R.
- Balíčky BUGS (Bayesian Analysis Using Gibbs Sampling) – omezené typy modelů.
- Nástroje pro speciální typ modelů (makroekonomické modely) – Dynare toolbox a IRIS toolbox pro Matlab (případně Octave).