

# Bayesiánská analýza

## V. Nelineární regresní model

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

- Pátá kapitola z Koop (2003) resp. učebního textu.
- Doposud:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i.$$

- Cobb-Douglasova produkční funkce:

$$y = \alpha_1 x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k}.$$

- Logaritmování

$$\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_{i2}) + \dots + \beta_k \ln(x_{ik}) + \epsilon_i.$$

- CES produkční funkce:

$$y_i = \left( \sum_{j=1}^k \gamma_j x_{ij}^{\gamma_{k+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_{k+1}}} .$$

- Model:

$$y_i = \left( \sum_{j=1}^k \gamma_j x_{ij}^{\gamma_{k+1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_{k+1}}} + \epsilon_j .$$

- Předpoklady:
  - 1  $\epsilon \sim N(0_N, h^{-1}I_N)$ .
  - 2 Všechny prvky matice  $X$  jsou pevná čísla (tj. nenáhodné proměnné) nebo náhodné veličiny nezávislé se všemi prvky vektoru  $\epsilon + p(X|\lambda)$ , kde  $\lambda$  je vektor parametrů, který neobsahuje žádný z ostatních parametrů modelu.
- Obecně pracujeme s modelem:

$$y = f(X, \gamma) + \epsilon.$$

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

# Věrohodnostní funkce

- Z normality náhodných složek:

$$p(y|\gamma, h) = \frac{h^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\{ \exp \left[ -\frac{h}{2} \{y - f(X, \gamma)\}' \{y - f(X, \gamma)\} \right] \right\}.$$

# Apriorní hustota

- Obecně  $p(\gamma, h)$ .
- Neinformativní varianta:

$$p(\gamma, h) = \frac{1}{h}.$$

- Uniformní rozdělení pro  $\gamma$  a  $\ln(h)$ .



# Posterioční hustota

- Součin věrohodnostní funkce a apriorní hustoty:

$$p(\gamma, h|y) \propto p(\gamma, h) \frac{h^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\{ \exp \left[ -\frac{h}{2} \{y - f(X, \gamma)\}' \{y - f(X, \gamma)\} \right] \right\}.$$

- Marginální hustota pro  $\gamma$  (při neinformativní apriorní hustotě):

$$p(\gamma|y) \propto [\{y - f(X, \gamma)\}' \{y - f(X, \gamma)\}]^{-\frac{N}{2}}.$$

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus**
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

# Obecný algoritmus

- 1 Zvolíme počáteční hodnotu,  $\theta^{(0)}$ .
- 2 Vygenerujeme kandidátský výběr  $\theta^*$  ze zvolené kandidátské hustoty  $q(\theta^{(s-1)}; \theta)$ .
- 3 Spočítáme akceptační pravděpodobnost (*acceptance probability*),  $\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*)$ .
- 4 Přiřadíme  $\theta^{(s)} = \theta^*$  s pravděpodobností  $\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*)$  a  $\theta^{(s)} = \theta^{(s-1)}$  s pravděpodobností  $1 - \alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*)$ .
- 5 Opakujeme Krok 1, 2 a 3 celkem  $S$  krát.
- 6 Spočítáme průměr  $S$  výběrů  $g(\theta^{(1)}), \dots, g(\theta^{(S)})$ .

# Akceptační pravděpodobnost

- 1 Princip: procházet hlavně oblast vysoké hustoty (ale nejen ji) + tendence vracet se do této oblasti.
- 2 Více zamítat kandidáty z oblasti nízké hustoty.
- 3 Podoba akceptační pravděpodobnosti:

$$\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*) = \min \left[ \frac{p(\theta = \theta^* | y) q(\theta^*; \theta = \theta^{(s-1)})}{p(\theta = \theta^{(s-1)} | y) q(\theta^{(s-1)}; \theta = \theta^*)}, 1 \right]$$

- 4 Kandidátská hustota:  $q$  (obecně nemusí být symetrická).
- 5 Potřeba dobré volby kandidátské hustoty!

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus**
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

# Princip

- Kandidátské hustoty nezávislé na výběrech.
- $q(\theta^{(s-1)}; \theta) = q^*(\theta)$ .
- Užitečný v případech, kdy existuje vhodná aproximace posteriorní hustoty (kandidátská hustota).
- Zjednodušení kandidátské hustoty:

$$\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*) = \min \left[ \frac{p(\theta = \theta^* | y) q^*(\theta = \theta^{(s-1)})}{p(\theta = \theta^{(s-1)} | y) q^*(\theta = \theta^*)}, 1 \right].$$

# Souvislost s importance sampling

- Pokud definujeme váhy:

$$w(\theta^A) = \frac{p(\theta = \theta^A | y)}{q^*(\theta = \theta^A)}.$$

- $q(\theta^{(s-1)}; \theta) = q^*(\theta)$ .
- Akceptační pravděpodobnost:

$$\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*) = \min \left[ \frac{w(\theta^*)}{w(\theta^{(s-1)})}, 1 \right].$$

# Volba kandidátské hustoty

- Není obecné pravidlo.
- Obvykle využití „klasické“ metody maximální věrohodnosti (maximal likelihood).
- Klasická ekonometrie: ML estimátor asymptoticky normální s kovarianční maticí

$$\text{var}(\hat{\theta}_{ML}) = I(\theta)^{-1}.$$

- Informační matice:

$$I(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln(p(y|\theta))}{\partial \theta \partial \theta'} \right].$$

- Záporný inverzní Hessián:  $\widehat{\text{var}}(\hat{\theta}_{ML})$ .



# Volba kandidátské hustoty – pokračování

- Pokud velikost vzorku dostatečně velká + relativně neinformativní apriorní hustota  $\Rightarrow$  posteriorní hustota aproximativně normální se střední hodnotou  $\widehat{\theta}_{ML}$  a kovarianční maticí aproximativně  $\widehat{var}(\widehat{\theta}_{ML})$ .
- Někdy maximalizace posteriorní hustoty  $\rightarrow \widehat{\theta}_{max}$  a kovarianční maticí aproximativně  $\widehat{var}(\widehat{\theta}_{max})$  (lepší v případě informativního prioru).
- $q^*(\theta) = f_N(\theta | \widehat{\theta}_{ML}, \widehat{var}(\widehat{\theta}_{ML}))$  dobrá  $\times$  obvyklejší  
 $q^*(\theta) = f_t(\theta | \widehat{\theta}_{ML}, \widehat{var}(\widehat{\theta}_{ML}), \nu)$  (důležitost konců hustoty; nejméně tak tlusté jako posteriorní hustota).

# Další otázky

- Konvergenční diagnostiky.
- Problémy: multimodální rozdělení nebo posterior jen v omezené oblasti (např. gama rozdělení).

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus**
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus**
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

# Princip

- Pokud nenalezneme dobrou aproximaci posteriorní hustoty.
- Kandidátské výběry dle:

$$\theta^* = \theta^{(s-1)} + z.$$

- $z$ : increment random variable.
- $\theta^*$  a  $\theta^{(s-1)}$  vstupují do vztahu symetricky  $\Rightarrow$   
 $q(\theta^*; \theta = \theta^{(s-1)}) = q(\theta^{(s-1)}; \theta = \theta^*)$  (Metropolis algoritmus).
- Akceptační pravděpodobnost:

$$\alpha(\theta^{(s-1)}, \theta^*) = \min \left[ \frac{p(\theta = \theta^* | y)}{p(\theta = \theta^{(s-1)} | y)}, 1 \right].$$

# Volba z

- Obvykle vícerozměrné normální rozdělení.
- $\theta^{(s-1)}$  je střední hodnota.
- Potřeba kovarianční matice  $\Sigma$ !

$$q(\theta^{(s-1)}; \theta) = f_N(\theta | \theta^{(s-1)}, \Sigma).$$

- Problém s akceptační pravděpodobností (v průměru).
- Není obecné pravidlo, z praxe pro dimenzi blížíící se k nekonečnu, 0.23.
- Jiné pravidlo: zhruba 0.5.
- Použití konvergenčních diagnostik!

# Volba $\Sigma$

- Snadné experimenty pro skalární  $\Sigma$ .
- Jinak obvyklé  $\Sigma = c\Omega$ , kde  $c$  skalár a  $\Omega$  odhad posteriorní kovarianční matice  $\rightarrow$  experimenty s různými  $c$ .
- Nalezení  $\Omega$  jako odhadu  $var(\theta|y)$ :
  - První způsob: začít s  $\Sigma = cI_p$  a najít  $c$  pro které neextrémní akceptační pravděpodobnost (0.000001 nebo 0.99999)  $\rightarrow$  hrubý odhad  $\Omega$  a volba  $\Sigma = c\Omega$  a hledání nové hodnoty  $c$  (nalézání lepších  $\Omega$  a následně  $\Sigma$ ).
  - Alternativně:  $\Omega = \widehat{var}(\widehat{\Omega}_{ML})$ .

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus**
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - **Metropolis-within-Gibbs**
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

# Princip

- Kombinace Gibbsova vzorkovače a M-H algoritmu.
- V nelineárním regresním modelu volba neinformativní nebo nezávislé gama apriorní hustoty pro  $h$  implikuje  $p(h|y, \gamma)$  jako gama hustotu.
- $p(\gamma|y, h)$  není známá hustota  $\Rightarrow$  M-H algoritmus.
- Následně  $p(h|y, \gamma)$  jako gama rozdělení  $\rightarrow$  platné výběry  $\gamma^{(s)}$  a  $h^{(s)}$  pro  $s = 1, \dots, S$ .
- Obecně: systém plně podmíněných posteriorních hustota, kdy z některých výběry snadné, z jiných M-H algoritmem.



# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota**
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace

# Princip

- Analýza kvality modelu, alternativa k posteriornímu podílu šancí.
- Rozlišení mezi aktuálně pozorovanými daty  $y$  a pozorovatelnými daty  $y^\circ$  generovanými modelem  $\rightarrow y^\circ$  náhodný vektor rozměru  $N \times 1$  s funkcí hustoty pravděpodobnosti  $p(y^\circ|\theta)$ .
- Funkce  $g(\cdot) \rightarrow p(g(y^\circ)|y)$  jako souhrn veškeré informace z modelu o  $g(y^\circ)$  po shlédnutí dat.
- Snadno  $g(y)$  pro pozorovaná data  $\rightarrow$  pokud  $g(y)$  je z odlehlého konce  $p(g(y^\circ)|y)$ , potom model nemůže dobře vysvětlit  $g(y)$ , tedy  $g(y)$  není tím typem charakteristiky dat, které lze přijatelně generovat modelem.
- Formální získání pravděpodobnosti okrajových oblastí způsobem podobným p-hodnotě z klasické statistiky.
- Posteriorní predikční p-hodnota je pravděpodobnost modelu generovat datovou sadu, která bude mít extrémnější vlastnosti než ta, kterou skutečně pozorujeme (jednostranná nebo oboustranná p-hodnota).

# Výpočet

- $p(g(y^\circ)|y)$  možno spočítat použitím simulačních metod:

$$p(g(y^\circ)|y) = \int p(g(y^\circ)|\theta, y)p(\theta|y)d\theta = \int p(g(y^\circ)|\theta)p(\theta|y)d\theta.$$

- Díky podmíněnosti vektorem parametrů  $\theta$ , aktuální data nepřinášejí žádnou dodatečnou informaci o  $y^\circ$ .
- Posteriorní simulátor poskytuje výběry z  $p(\theta|y)$  a jsme tak schopni simulovat výběry z  $p(g(y^\circ)|\theta)$  pro daný posteriorní výběr parametrů  $\theta$ .

# Využití

- Posteriorní predikční  $p$ -hodnotu lze využít dvěma způsoby:
  - 1 Jako měřítko souladu modelu s daty, tedy jaká je pravděpodobnost, že data byly generována dle tohoto modelu.
  - 2 Pro porovnání různých modelů, tedy jestliže jeden model poskytuje posteriorní predikční  $p$ -hodnoty výrazně nižší než druhý model, potom je to důkaz v neprospěch tohoto druhého modelu.

## Příklad pro test normality – úvod

- Příklad z úvodu (pro  $i = 1, \dots, N$ ):

$$y_i^\circ = f(X_i, \gamma) + \epsilon_i.$$

- Z předpokladů na náhodnou složku:

$$p(y^\circ | \gamma, h) = f_N(y^\circ | f(X, \gamma), h^{-1} I_N).$$

- Zjednodušení pro neinformativní apriorní hustotou ( $h$  lze vyintegrovat):

$$p(y^\circ | \gamma) = f_t(y^\circ | f(X, \gamma), \bar{s}^2 I_N, N),$$

kde

$$\bar{s}^2 = \frac{[y - f(X, \gamma)]' [y - f(X, \gamma)]}{N}.$$

- Nalezení příslušného percentilu, který vytváří  $g(y)$  v rámci hustoty  $p(g(y^\circ) | y)$ .

## Příklad pro test normality – definice

- Možnosti volby  $g(\cdot)$ : analýza reziduí z hlediska vlastností (splnění předpokladů).
- V bayesovském kontextu jsou chyby  $\epsilon_i$  pro  $i = 1, \dots, N$  dány jako

$$\epsilon_i = y_i - f(X, \gamma)$$

- Předpoklad normality = nulovost

$$Skew = \frac{\sqrt{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^3}{\left[ \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad Kurt = \frac{N \sum_{i=1}^N \epsilon_i^4}{\left[ \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \right]^2} - 3.$$

- Nepozorujeme  $\epsilon_i \rightarrow$  na základě posteriorního simulátoru:

$$E[Skew|y] = E \left\{ \frac{\sqrt{N} \sum_{i=1}^N [y_i - f(X_i, \gamma)]^3}{\left[ \sum_{i=1}^N [y_i - f(X_i, \gamma)]^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \middle| y \right\}.$$

## Příklad – praktický postup

- 1 Vezmeme výběr  $\gamma^{(s)}$  využitím posteriorního simulátoru.
- 2 Vygenerujeme reprezentativní datovou sadu  $y^\circ$  z  $p(y^\circ|\gamma^{(s)})$  užitím odpovídajících vztahů.
- 3 Definujeme  $\epsilon_i^{(s)} = y_i - f(X_i, \gamma^{(s)})$  pro  $i = 1, \dots, N$  a vyhodnotíme hodnotu šikmosti v tomto bodě, abychom získali  $Skew^{(s)}$ .
- 4 Definujeme  $\epsilon_i^{\circ(s)} = y_i^{\circ(s)} - f(X_i, \gamma^{(s)})$  pro  $i = 1, \dots, N$  a vyhodnotíme hodnotu špičatosti v tomto bodě, abychom získali  $Skew^{\circ(s)}$ .
- 5 Opakujeme Krok 1, 2, 3 a 4 celkem  $S$  krát.
- 6 Spočítáme průměr  $S$  výběrů  $Skew^{(1)}, \dots, Skew^{(S)}$  pro odhad  $E[Skew|y]$ .
- 7 Spočítáme podíl  $S$  vzorků  $Skew^{\circ(1)}, \dots, Skew^{\circ(S)}$ , které jsou menší než odhad  $E[Skew|y]$ . Odhad p-hodnoty, pokud výsledek menší než 0.5 (jinak jedna mínus).

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye**
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace



# Princip

- Pro porovnání nevnořených modelů, či vnořených modelů, kdy nelze snadno využít Savage-Dickey density ratio.
- Obecnější metoda vyhodnocení posteriorního podílu šancí.
- Porovnání různých funkčních vztahů  $f(\cdot)$ .
- Princip: inverzi marginální věrohodnosti pro model  $M_i$ , který závisí na vektoru parametrů  $\theta$ , lze zapsat jako  $E[g(\theta)|y, M_i]$  pro specifickou volbu  $g(\cdot)$ .

# Metoda Gelfanda a Deye

- Necht  $p(\theta|M_i)$  označuje apriorní hustotu,  $p(y|\theta, M_i)$  věrohodnostní funkci a  $p(\theta|y, M_i)$  posteriorní hustotu pro model  $M_i$  definovaný v oblasti  $\Theta$ . Pokud  $f(\theta)$  je funkce hustoty pravděpodobnosti definovaná na oblasti obsahující  $\Theta$ , potom

$$E \left[ \frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)} \middle| y, M_i \right] = \frac{1}{p(y|M_i)}$$

## Důkaz

$$\begin{aligned} & E \left[ \frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)} \middle| y, M_i \right] \\ &= \int \frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)} p(\theta|y, M_i) d\theta \\ &= \int \frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)} \frac{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)}{p(y|M_i)} d\theta \\ &= \frac{1}{p(y|M_i)} \int f(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{p(y|M_i)}. \end{aligned}$$

# Problémy

- Na první pohled lze pro jakoukoliv p.d.f  $f(\theta)$  nastavit:

$$g(\theta) = \frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)}.$$

- Následné využití výsledků posteriorního simulátoru k odhadu  $E[g(\theta)|y, M_i]$ .
- Pro úspěch potřeba obezřetné volby  $f(\theta)$ .
- Geweke (1999):  $\frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta, M_i)}$  musí být shora omezena, tedy musí nabývat konečných hodnot pro jakoukoliv volbu  $\theta$ .

## Geweke (1999) – úvod

- Strategie definování  $f(\theta)$  jako funkce normální hustoty pravděpodobnosti s ohraničenými okraji.
- Důvod: obtížné ověřit, zda-li  $\frac{f(\theta)}{p(\theta|M_i)p(y|\theta,M_i)}$  je konečné na okrajích hustoty normálního rozdělení  $\rightarrow$  odříznutím je  $f(\theta)$  pro tyto potenciálně problematické oblasti nulová.
- Formálně:  $\hat{\theta}$  a  $\hat{\Sigma}$  jsou odhady  $E(\theta|y, M_i)$  a  $\text{var}(\theta|y, M_i)$  z posteriorní simulace.
- Pro určitou oblast pravděpodobnosti  $p \in (0, 1)$  označuje  $\hat{\Theta}$  oblast definičního oboru funkce  $f(\theta)$ :

$$\hat{\Theta} = \{\theta : (\hat{\theta} - \theta)' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\theta} - \theta) \leq \chi_{1-p}^2(k)\}.$$

- $\chi_{1-p}^2(k)$  je  $(1 - p)$  procentní kvantil rozdělení chí-kvadrát s  $k$  stupni volnosti ( $k$  je počet prvků vektoru  $\theta$ ).

## Geweke (1999) – dokončení

- Geweke doporučuje  $f(\theta)$  jako funkci vícerozměrné normální hustoty pravděpodobnosti omezené do oblasti  $\hat{\Theta}$ :

$$f(\theta) = \frac{1}{(1-p)(2\pi)^{\frac{k}{2}}} |\hat{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta)' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\theta} - \theta) \right] \mathbf{1}(\theta \in \hat{\Theta}).$$

- $\mathbf{1}()$  je indikační funkce + očekává se, že nejlepších výsledků dosahujem při volbě nízkých hodnot  $p$  (např.  $p = 0.01$ ) (při odhadu marginální věrohodnosti zahrnujeme mnohem více vzorků).
- Dodatečný náklad zkoušení různých hodnot  $p$  je velmi malý.
- Standarní způsob spočítání NSE – využití pro vyhodnocení přesnosti odhadu marginální věrohodnosti (např. balík BACC).
- Metoda pro jakýkoliv model: nutný posteriorní simulátor a známé  $p(\theta|M_i)$  a  $p(y|\theta, M_i)$  (netriviální, někdy známe jen jádrové hustoty).
- Gewekova implementace jen v případě  $\hat{\Theta} \in \Theta$  (pokud ne, nabízeny další postupy).

# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce**
- 6 Empirická ilustrace

# Princip

- Využijeme výběry z  $p(\gamma|y)$ , které nám poskytuje M-H algoritmus.
- Tvorba vzorků z podmíněné predikční hustoty  $p(y^*|y, \gamma^{(s)})$ .
- Lze ověřit:

$$p(y^*|y, \gamma) = f_t(y^*|f(X^*, \gamma), \bar{s}^2 I_T, N).$$

- Výběry z  $y^*$  podmíněné vektorem  $\gamma$  lze tedy získat velmi snadno.



# Obsah tématu

- 1 Nelineární regresní model
- 2 Metropolis-Hastings algoritmus
  - Independence Chain M-H algoritmus
  - Random Walk Chain M-H algoritmus
  - Metropolis-within-Gibbs
- 3 Posteriorní predikční p-hodnota
- 4 Metoda Gelfanda-Deye
- 5 Predikce
- 6 Empirická ilustrace**

# Příklad

- CES produkční funkce.