Bayesiánská analýza

VIII. Úvod do časových řad

Obsah tématu

Úvod

- Stavové modely.
- Hierarchická podstata – atraktivita odpovídajících metod.
- Bauwens, Lubrano, Richard – bayesiánská analýza alternativního přístup.
- Stavový zápis = jiný pohled na stejnou problematiku.

Časové řady

- Viz analýza autokorelovaných náhodných složek.
- $AR(p)$ proces:
$$(1 - \rho_1 L - \ldots - \rho_p L^p) y_t = u_t.$$
- V podstatě lineární regresní model:
$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \ldots + \rho_p y_{t-p} + u_t.$$
- Zobecnění:
$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \ldots + \rho_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_q x_{t-q} + u_t.$$
- Řešené problémy: restrikce kladené na koeficienty, definování apriorních hustot.

Obsah tématu

Úvod

- Local level model:

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- ϵ_t je i.i.d. $N(0, h^{-1})$.
- Jedinečnost = nepozorované α_t jako náhodná procházka:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t.$$

- u_t je i.i.d. $N(0, \eta h^{-1})$ a ϵ_t a u_s jsou vzájemně nezávislé pro všechna t a s.
- $t = 1, \dots, T$ resp. pro α $t = 1, \dots, T - 1$.

Pojmy

- α_1 = počáteční podmínka.
- Rovnice měření (pozorování):

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- Stavová rovnice:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t.$$

- α_t má stochastický trend.

Stochastický trend

- Nestacionární vývoj řady, náhodnost trendu.
- Deterministický trend:
$$\alpha_t = \alpha + \beta t.$$
- Stochastické trendové chování:
$$\alpha_t = \alpha_1 + \sum_{j=1}^{t-1} u_j.$$
- Při zanedbání počátečních podmínek: $var(\alpha_t) = (t-1)\eta h^{-1}$.
- α_t a α_{t-1} mají tendenci ležet blízko u sebe (tj. $E(\alpha_t|\alpha_{t-1}) = \alpha_{t-1}$).
- Stochastický trend: variabilita jako rostoucí funkce času $\times$ pozvolna se měnící α_t.

Dekompozice časové řady

- Local level model:

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- Trendová komponenta a nepravidelná komponenta ϵ_t.
- Trend $=$ dlouhodobý růst ekonomiky $\times$ nepravidelná komponenta $=$ náhodné krátkodobé šoky.
- Stavové modely: dekompozice řady na různé složky; např. i sezónní složka.

Local level model – analýza

- Měření relativní velikosti trendu a nepravidelné složky.
- Rozptyly h^{-1} a $\eta h^{-1} \Rightarrow \eta$ jako relativní poměr variability náhodné procházky a náhodné složky.
- $\eta \to 0$ náhodná složka vypadává a $\alpha_t = \alpha_1$ pro všechna t (model $y_t = \alpha_1 + \epsilon_t \to$ fluktuace kolem konstantní úrovně).
- Pro rostoucí η roste rozptyl $u_t \Rightarrow$ narůst role stochastického trendu.
- Test $\eta = 0$ jako způsob testování jednotkového kořene.

Další interpretace a apriorní hustota

- α_t je střední hodnota (či úroveň, tedy *level*) pro y_t.
- Měnící se střední hodnota $\Rightarrow$ *local level model*.
- LRM s měnící se úrovňovou konstantou = *model v čase proměnných parametrů (time varying parameters model)*.
- Obecnější stavové modely: v čase proměnné parametry (regresní koeficienty) nebo v čase proměnné rozptyly náhodných složek.
- Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_T)' \Rightarrow$ definice apriorní hustoty.
- Z rovnice náhodné procházky: hierarchická apriorní hustota pro α (podobně jako model individuálních vlivů s $T = 1$).
- Bayesovské metody pro nezávislou normální-gama apriorní hustotu = odvození Gibbsova vzorkovače (viz obecný stavový model).
- Zde přirozeně kojungovaná apriorní hustota pro zavedení empirických bayesiánských metod.

Obsah tématu

Značení

- $y = (y_1, \ldots, y_T)'$ a $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T)'$:

$$y = I_T \alpha + \epsilon.$$

- Standardní požadavky: ϵ má vícerozměrné normální rozdělení se střední hodnotou 0_T a kovarianční maticí $h^{-1} I_T \Rightarrow$ normální lineární regresní model (α jako T-rozměrný vektor regresních koeficientů).
- Standardní podoba věrohodnostní funkce.

Značení

- Konjugovaná podoba hierarchické hustoty na základě stavové rovnice.
- *Matice prvních diferencí* rozměru $(T-1)\times T$:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Platí: $D\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_T - \alpha_{T-1} \end{pmatrix}$.
- Stavová rovnice: $D\alpha = u$, kde $u = (u_1, \ldots, u_{T-1})'$; normalita $u \Rightarrow$ stavová rovnice definuje normální hierarchickou apriorní hustotu pro $D\alpha$.

Specifikace apriorních hustot – pokračování

- Apriorní hustota pro h a α_1.
- Zápis: $y = W\theta + \epsilon$, kde

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_T - \alpha_{T-1} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0_{T-1}' \\ \iota_{T-1} & C \end{pmatrix}.$$

- ι_{T-1} je $(T-1)$-rozměrný vektor jedniček

Specifikace apriorních hustot – pokračování

- Lze ukázat (maticovým násobením) ekvivalenci zápisů.
- C je dolní trojúhelníková matice rozměru $(T-1) \times (T-1)$ se všemi nenulovými prvky rovnými jedné (inverze matice D s vynechaným prvním sloupcem).
- C má všechny prvky na a pod hlavní diagonálou rovny jedné a všechny prvky nad hlavní diagonálou rovny nule.
- Přirozeně konjugovaná apriorní hustota pro θ a h:

$$\theta, h \sim NG(\underline{\theta}, \underline{V}, \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}).$$

Specifikace apriorních hustot – dokončení

- Specifická struktura pro $\underline{\theta}$ a $\underline{V}$ (zahrnuje apriorní informaci obsaženou ve stavové rovnici):

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \underline{\theta}_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{V} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{11} & 0_{T-1}{}' \\ 0_{T-1} & \eta I_{T-1} \end{pmatrix}.$$

- $\Rightarrow \alpha_{t+1} - \alpha_t$ odpovídá normální hustotě, $N(0, \eta h^{-1})$.
- Apriorní hustota závisí na $\eta \Rightarrow$ hierarchická podoba.
- Apriorní hustota pro počáteční podmínku $\alpha_1 \sim N(\underline{\theta}_1, h^{-1}\underline{V}_{11})$.

Obsah tématu

Výsledky

- Standardní výsledky z kapitoly 3.
- $p(\theta, h|y)$ odpovídá $NG(\overline{\theta}, \overline{V}, \overline{s}^{-2}, \overline{\nu})$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\theta} &= \overline{V}(\underline{V}^{-1}\underline{\theta} + W'y) \\
\overline{V} &= (\underline{V}^{-1} + W'W)^{-1} \\
\overline{\nu} &= \underline{\nu} + T \\
\overline{\nu s}^2 &= \underline{\nu s}^2 + (y - W\overline{\theta})'(y - W\overline{\theta}) + (\overline{\theta} - \underline{\theta})'\underline{V}^{-1}(\overline{\theta} - \underline{\theta})
\end{aligned}
$$

Zpětná parametrizace

- $p(\theta|h, y)$ je normální + lin. kombinace normálních veličin je normální náhodná veličina.
- Pokud $p(\theta, h)$ odpovídá $NG(\overline{\theta}, \overline{V}, \overline{s}^{-2}, \overline{\nu})$, je posteriorní rozdělení (α, h) analogické rozdělení $NG(\overline{\alpha}, \overline{V}_\alpha, \overline{s}^{-2}, \overline{\nu})$, kde

$$\overline{\alpha} = W\overline{\theta},$$
$$\overline{V}_\alpha = W\overline{V}W'.$$

- Analytické výsledky (analyticky např. porovnání modelů).

Další otázky

- Local level model: regresní model, kde počet regresních parametrů = počet pozorování.
- Hodnotná posteriorní analýza díky apriorní informaci.
- Proč nezískáváme degenerované posteriorní rozdělení v bodě $y = \alpha$?
- Pro $\alpha_t = y_t$ pro všechna t máme perfektně padnoucí model ($\epsilon_t = 0$ pro všechna t).
- Lze ukázat, že věrohodnostní funkce nabývá v tomto bodě nekonečně velké hodnoty $\times$ bayesiánská posteriorní hustota není do tohoto bodu nekonečné věrohodnosti umístěna díky apriorní informaci.
- Stavová rovnice říká: α_{t+1} a α_t leží velmi blízko u sebe $\rightarrow$ posteriorní hustota dále od bodu perfektní shody modelu s daty.
- Tento jev nazýván *vyhlazením (smoothing)* stavového vektoru.

Obsah tématu

Úvod

- Subjektivní formulace apriorní hustoty nebo neinformativí apriorní hustota.
- V našem případě volba: $\underline{\theta}$, $\underline{V}$, $\underline{s}^{-2}$, $\underline{\nu}$ nebo neinformativních hodnoty $\underline{\nu} = 0$ a $\underline{V}^{-1} = 0_{T \times T}$ ($\underline{\theta}$ a $\underline{s}^{-2}$ irelevantní).
- Nevýhody obou přístupů.
- Empirické bayesovké metody: hlavně u hierarchických apriorních hustot × využitelné všude × kritika „dvojpočtu“ s daty.
- Odhad apriorních hyperparametrů z dat → ideální nástroj marginální věrohodnost (hledání apriorních hyperparametrů zvyšujících marginální věrohodnost) × výpočetně náročné ⇒ jen pro některé parametry.

Local level model – úvod

- Apriorní hustota: pět hyperparametrů; η, $\underline{\theta}_1$, $\underline{V}_{11}$, $\underline{s}^{-2}$ a $\underline{\nu}$.
- Nejvýznamnější η (podíl komponenty náhodné procházky ve stavovém modelu).
- Zjevná „neinformativní“ volba $\eta \to \infty$ nesmyslná $\to$ stochastický trend převáží nad nesystematickou komponentou (dost "informativní").
- Zaměření na η + předpoklad o schopnosti subjektivně definovat $\underline{\theta}_1$, $\underline{V}_{11}$, $\underline{s}^{-2}$ a $\underline{\nu}$.

Marginální věrohodnost

- Marginální věrohodnost:

$$p(y|\eta) = c \left(\frac{|\overline{V}|}{|\underline{V}|} \right)^{\frac{1}{2}} (\overline{\nu s}^2)^{-\frac{\overline{\nu}}{2}},$$

kde

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\overline{\nu}}{2}\right) (\underline{\nu s}^2)^{\frac{\underline{\nu}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\underline{\nu}}{2}\right) \pi^{\frac{T}{2}}}.$$

- Marginální věrohodnost jako funkce η.
- Standardní přístup: $\eta = \widehat{\eta}$, pro které bude maximalizována $p(y|\eta) \rightarrow$ vstupuje do apriorních hustot + standardní posteriorní analýza.
- Pro local level model: grid search method = potenciální hodnoty η v „mřížce“ $\rightarrow \widehat{\eta}$ maximalizující $p(y|\eta)$.

Formální přístup

- η jako parametr.
- $p(\eta|y) \propto p(y|\eta)p(\eta)$, kde $p(\eta)$ je apriorní hustota:

$$p(\eta|y) = c \left(\frac{|\overline{V}|}{|\underline{V}|} \right)^{\frac{1}{2}} (\overline{\nu s}^2)^{-\frac{\overline{\nu}}{2}} p(\eta).$$

- Posteriorní hustota pro analýzu η.
- Pokud zájem i o ostatní prametry: $p(\theta, h, \eta|y) = p(\theta, h|y, \eta)p(\eta|y)$.
- $p(\theta, h|y, \eta)$ je normální-gama hustota podmíněná specifickou hodnotou η (platí předchozí posteriorní výsledky) a $p(\eta|y)$ je jednorozměrná hustota.

Generování η

- MC integrace: výběr z $p(\eta|y) \propto p(y|\eta)p(\eta)$ a tímto podmíněn výběr z $p(\theta, h|y, \eta)$.
- Výběr z $p(\eta|y)$ podle $p(\eta)$: možnost aproximací diskrétní alternativou.
- Vyhodnocení $p(\eta|y)$ v B různých bodech mřížky $\eta_1, \ldots, \eta_B \rightarrow p(\eta_1|y), \ldots p(\eta_B|y)$.
- Výběry η z diskrétního rozdělení (definované pravděpodobnostmi $p(\eta = \eta_i) = p(\eta_i|y)$ pro $i = 1, \ldots, B$) $\rightarrow$ aproximativně odpovídají výběrům z $p(\eta|y)$ (rostoucí B vede k růstu kvality aproximace).

Další otázky

- Vyžadován výběr $\underline{\theta}_1$, $\underline{V}_{11}$, $\underline{s}^{-2}$ a $\underline{\nu}$ (případně $p(\eta)$ při využití druhého přístupu).
- Obvyklá neinformativních volba (ve většině modelů dobře funguje).
- Nefunguje pro případ local level modelu.
- Nastavení $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0 \rightarrow$ hodnoty $\underline{s}^{-2}$ a $\underline{\theta}_1$ irelevantní $\Rightarrow$ $p(\theta, \sigma^{-2}|y, \eta)$ je dobře definovaná posteriorní hustota.

Problémy

- Nedeterminovatelná integrační konstanta $\times$ při zaměření jen na η (nebo modely se stejnou apriorní hustotou) $\rightarrow$ c buď do vztahů nevstoupí nebo se vykrátí.
- Vážnější problém: $\overline{\nu s}^2$ se blíží nule pro $\eta \rightarrow \infty$.
- Neinformativní výsledky: $\overline{\theta} = (W'W)^{-1}W'y$ a $y - W\overline{\theta} = 0_T \rightarrow$ marginální věrohodnost nekonečno (bez důkazu).
- Empirická bayesovská analýza nastaví $\widehat{\eta} \rightarrow \infty$ pro jakoukoliv datovou sadu $\Rightarrow E(\alpha|y) = y$ (žádné vyhlazení).
- Závěr: empirické bayesovské metody selhávají v rámci local level model při $\underline{\nu}$ a $\underline{V}_{11}^{-1}$ na neinformativních hodnotách.
- Důvod: počet vysvětlujících proměnných je roven počtu pozorování (přesné proložení dat).

Problémy – pokračování

- Nastavením $\underline{\nu} > 0$ nebo $\underline{V}_{11}^{-1} > 0$ (a volbou $\underline{s}^2$ nebo $\underline{\theta}_1$ adekvátním způsobem) $\rightarrow$ možné použití empirických bayesovských metod.
- $\underline{\nu}\underline{s}^2$ se pro $\eta \rightarrow \infty$ nebude blížit nule $\Rightarrow$ nepotřebná informativní apriorní hustota pro h i θ_1.
- Pro alternativní přístup (η jako parametr) problém pro $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0$ a pro nepravý prior pro η.
- V případě $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0$ a $p(\eta)$ jako nepravou $U(0, \infty) \rightarrow p(\eta|y)$ není platná hustota.
- Pro $\underline{\nu} > 0$ nebo $\underline{V}_{11}^{-1} > 0$ anebo $p(\eta)$ jako platná p.d.f. $\rightarrow p(\eta|y)$ platná posteriorní hustota.
- Pro η jako neznámý parametr $\rightarrow$ bayesiánská analýzu v případě informativního η, h nebo θ_1.

Obsah tématu

Příklad

- viz Koop (2003).

Obsah tématu

Úvod

- Obecnější (ne zcela) stavový model:

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + \epsilon_t,$$

kde

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + u_t.$$

- α_t je $p \times 1$ rozměrný vektor obsahující p stavových rovnic.
- Předpokládáme, že ϵ_t je i.i.d. $N(0, h^{-1}) \times$ u_t je $p \times 1$ rozměrný vektor i.i.d. $N(0, H^{-1})$.
- ϵ_t a u_s vzájemně nezávislé pro všechna s a t.
- X_t a Z_t vektory rozměru $1 \times k$ a $1 \times p$ obsahující vysvětlující proměnné a (nebo) známé konstanty.
- Matice T_t známých konstant rozměru $p \times p$ (možné i neznámé parametry).

Varianty

- Local level model: $p = 1$, $k = 0$, $T_t = 1$ a $Z_t = 1$.
- Normální lineární regresní model: $Z_t = 0$.
- Normální lineární regresní model s v čase proměnnými parametry: Z_t obsahuje některé nebo všechny vysvětlující proměnné.
- *Strukturální modely časových řad*: lze převést do podoby stavového modelu.
- Jeden z běžných strukturálních modelů časových: *local linear trend model*:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t \\
\mu_{t+1} &= \mu_t + \nu_t + \xi_t \\
\nu_{t+1} &= \nu_t + \zeta_t
\end{aligned}
$$

- ξ_t je i.i.d. $N(0, \sigma_\xi^2)$, ζ_t je i.i.d. $N(0, \sigma_\zeta^2)$ a všechny náhodné chyby jsou vzájemně nezávislé.

Local linear trend model

- Stavová podoba:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix}$$

$$u_t = \begin{pmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{pmatrix}$$

$$T_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix}$$

a $\beta = 0$.

Obsah tématu

Úvod

- Metody posteriorní analýzy v řadě komplikovaných modelů lze odvodit jednoduchou kombinací výsledků jednodušších modelů.
- Pro posteriorní simulaci nastává komplikace toho rázu, že posteriorní hustoty pro α nebudou v čase nezávislé $\rightarrow$ α_t a α_{t-1} nebudou vzájemně nezávislé.
- Nejsme schopni najednou generovat výběry pro α_t $\rightarrow$ přímá implementace Gibbsova vzorkovače by zahrnovala výběry z T-rozměrného normálního rozdělení.
- De Jong a Shephard (1995): efektivní metoda Gibbsova vzorkovače pro tuto třídu modelů.

Postup

- V případě známého α_t pro $t = 1, \ldots, T$ $\rightarrow$ normální lineární regresní model:

$$y_t^* = X_t \beta + \epsilon_t,$$

  kde $y_t^* = y_t - Z_t \alpha_t$.
- Gibbsův vzorkovač s obohacenými daty (*data augmentation*).
- Zavedení nepozorovaných dat či latentních proměnných (resp. latentních dat).
- Gibbsův vzorkovač v závislosti na $p(\beta, h|y, \alpha_1, \ldots, \alpha_T)$ bude mít známou podobu.
- Pokud známé α_t pro $i = 1, \ldots, T$ $\rightarrow$ stavové rovnice jako varianta SUR modelu a $p(H|y, \alpha_1, \ldots, \alpha_T)$ má známou formu.
- Případ T_t s neznámými parametry: $p(H, T_1, \ldots, T_t|y, \alpha_1, \ldots, \alpha_T) \rightarrow$ „v čase neměnném“ ($T_1 = \ldots = T_t$): $p(H, T_1, \ldots, T_t|y, \alpha_1, \ldots, \alpha_T)$ podoba SUR modelu.

Apriorní hustoty

- Gibbsův vzorkovač, pokud umíme výběry z $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_T | y, \beta, h, H)$.
- β a h s nezávislou normální-gama apriorní hustotou, matice H má Wishartovu apriorní hustotu a $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ apriorní hustotu implikovanou stavovou rovnicí:

$$p(\beta, h, H, \alpha_1, \ldots, \alpha_T) = p(\beta)p(h)p(H)p(\alpha_1, \ldots, \alpha_T | H),$$

kde

$$\begin{aligned} p(\beta) &= f_N(\beta | \underline{\beta}, \underline{V}), \\ p(h) &= f_G(h | \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}), \\ p(H) &= f_W(H | \underline{\nu}_H, \underline{H}). \end{aligned}$$

Hierarchická apriorní hustota stavů

- Pro $t = 0, 1, \ldots, T)$ a za předpokládu $\alpha_0 = 0$:

  $$p(\alpha_1, \ldots, \alpha_T | H) = p(\alpha_1 | H) p(\alpha_2 | \alpha_1, H) \ldots p(\alpha_T | \alpha_{T-1}, H),$$

  kde pro $t = 1, \ldots, T - 1$

  $$p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, H) = f_N(\alpha_{T+1} | T_t \alpha_t, H)$$

  a

  $$p(\alpha_1) = f_N(\alpha_1 | 0, H).$$

- H má podobnou roli jako η v local level modelu (matice $p \times p \Rightarrow$ nevhodné použít empirických bayesovských metod.)

Posteriorní hustota pro β a h

- Z předchozích kapitol:

$$\beta|y, h, \alpha_1, \ldots, \alpha_T \sim N(\overline{\beta}, \overline{V})$$
$$h|y, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_T \sim G(\overline{s}^{-2}, \overline{\nu}),$$

kde

$$\overline{V} = \left(\underline{V}^{-1} + h\sum_{t=1}^{T} X_t{}' X_t\right)^{-1},$$
$$\overline{\beta} = \overline{V}\left(\underline{V}^{-1}\underline{\beta} + h\sum_{t=1}^{T} X_t{}'(y_t - Z_t\alpha_t)\right),$$
$$\overline{\nu} = T + \underline{\nu},$$
$$\overline{s}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t\beta - Z_t\alpha_t)^2 + \underline{\nu s}^2}{\overline{\nu}}.$$

Posteriorní hustota pro H

- Z analýzy SUR modelu:

$$H|y, \alpha_1, \ldots, \alpha_T \sim W(\overline{\nu}_H, \overline{H}),$$

kde

$$\overline{\nu}_H = T + \underline{\nu}_H,$$

$$\overline{H} = \left[\underline{H}^{-1} + \sum_{t=0}^{T-1} (\alpha_{t+1} - T_t \alpha_t)(\alpha_{t+1} - T_t \alpha_t)' \right]^{-1}.$$

- Pro úplnost Gibbsova vzorkovače: $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_T | y, \beta, h, H)$ a způsob generování výběrů.
- Lze jako vícerozměrné normální rozdělení $\times$ T-rozměrné rozdělení a vysoce korelované prvky.
- Efektivní způsob generování náhodných výběrů: Carter a Kohn (1994) a DeJong a Shephard (1995).

DeJong a Shephard – značení

- Podoba stavového modelu:

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + G_t\nu_t,$$
$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + J_t\nu_t.$$

pro $t = 1, \ldots, T$ resp. $t = 0, \ldots, T$ a $\alpha_0 = 0$.

- Náhodná složka ν_t je i.i.d. $N(0, h^{-1}I_{p+1})$; ostatní stejné.
- Ekvivalence s původní formulací pro: $\nu_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \end{pmatrix}$.
- G_t řádkový vektor rozměru $(p+1)$: $G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$.
- J_t rozměru $p \times (p+1)$: $J_t = \begin{bmatrix} 0_p & A \end{bmatrix}$, kde A je matice $p \times p$ implicitně definována vztahem

$$H^{-1} = \frac{1}{h}AA'.$$

DeJong a Shephard – princip

- Simulační vyhlazovač.
- Podmíněné posteriorní hustoty $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H) \to$ neznámé jen α_t a ν_t.
- Příspěvek DeJonga a Shepharda: návrh efektivního algoritmu pro výběry $\eta_t = F_t \nu_t$ pro různé volby F_t.
- Výběry z η_t lze transformovat do výběrů z α_t.
- Možné arbitrární F_t, obvyklá volba $F_t = J_t \Rightarrow$ výběry chyb stavové rovnice, které lze přímo transformovat do požadovaných výběrů z α_t.

Filtrace

- Nastavení $a_1 = 0$, $P_1 = J_0 {J_0}'$ a výpočet následujících veličin pro $t = 1, \ldots, T$ (běh Kalmanova filtru):

$$
\begin{aligned}
e_t &= y_t - X_t\beta - Z_t\alpha_t \\
D_t &= Z_t P_t {Z_t}' + G_t {G_t}' \\
K_t &= (T_t P_t {Z_t}' + J_t {G_t}') D_t^{-1} \\
a_{t+1} &= T_t a_t + K_t e_t \\
P_{t+1} &= T_t P_t (T_t - K_t Z_z)' + J_t (J_t - K_t G_t)'
\end{aligned}
$$

- Uložení e_t, D_t a K_t.

Smoothing

- Výpočet nové sady veličin v obrácené časové posloupnosti (tj. $t = T, T-1, \ldots, 1$).
- Nastavení $r_T = 0$ a $U_T = 0$ a výpočet

$$
\begin{aligned}
C_t &= F_t(I - G_t{}' D_t^{-1} G_t - [J_t - K_t G_t]' U_t [J_t - K_t G_t]) F_t{}' \\
\xi_t &\sim N(0, h^{-1} C_t) \\
V_t &= F_t(G_t{}' D_t^{-1} Z_t + [J_t - K_t G_t]' U_t [T_t - K_t Z_t]) \\
r_{t-1} &= Z_t{}' D_t^{-1} e_t + (T_t - K_t Z_t)' r_t - V_t{}' C_t^{-1} \xi_t \\
U_{t-1} &= Z_t{}' D_t^{-1} Z_t + (T_t - K_t Z_t)' U_t (T_t - K_t Z_t) + V_t{}' C_t^{-1} V_t \\
\eta_t &= F_t(G_t{}' D_t^{-1} e_t + [J_t - K_t G_t]' r_t) + \xi_t
\end{aligned}
$$

kde $G_0 = 0$.

Výsledek

- Získáme $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_T)'$ a lze dokázat, že se jedná o náhodný výběr z $p(\eta|y, \beta, h, H)$.
- Podle podoby F_t lze tento výběr transformovat na náhodný výběr α_t pro $t = 1, \ldots, T$.
- Při $F_t = J_t \rightarrow$ výběry náhodných chyb ve stavové rovnici (tj. $\eta_t = J_t \nu_t$) $\rightarrow$ transformace na výběry z α_t za využití stavové rovnice a skutečnosti $\alpha_0 = 0$.
- Jednoduché počítačové zpracování (matice nízkých rozměrů a náhodný výběr z normálního rozdělení pro získání ξ_t).
- Umíme sekvenční výběry z podmíněných hustot $\rightarrow$ standardní posteriorní analýza.

Obsah tématu

Příklad

- Viz Koop (2003).

Obsah tématu

Úvod

- Viz Koop (2003).