

Analytická geometrie v rovině

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Parametrické vyjádření přímky

Víme, že každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB , případně p apod.

Úloha:

Bod $A[1, 2]$ a bod $B[5, 4]$ jednoznačně určují přímku p . Najděte body C, D, E na přímce p , tak aby:

- bod B byl středem úsečky AC
- bod C byl středem úsečky AD
- bod D byl středem úsečky AE

Při nalezení bodu C je úsečka $|AC|$ dvakrát delší než $|AB|$, a $|AD|$ čtyřikrát delší než $|AB|$, atd.

Vymyslete obecný vzoreček pro nalezení koncového bodu úsečky B' , tak abychom úsečku AB mohli zvětšit n -krát a náležela přímce p .

Víme, že každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB , případně p apod.

Úloha:

Bod $A[1, 2]$ a bod $B[5, 4]$ jednoznačně určují přímku p . Najděte body C, D, E na přímce p , tak aby:

- bod B byl středem úsečky AC
- bod C byl středem úsečky AD
- bod D byl středem úsečky AE

Při nalezení bodu C je úsečka $|AC|$ dvakrát delší než $|AB|$, a $|AD|$ čtyřikrát delší než $|AB|$, atd.

Vymyslete obecný vzoreček pro nalezení koncového bodu úsečky B' , tak abychom úsečku AB mohli zvětšit n -krát a náležela přímce p .

Parametrické vyjádření přímky

Jestliže pomocí navrženého vzorečku umíme najít takto speciální body, které leží na přímce p . Můžeme potom nějakou modifikací nalézt všechny body ležící na přímce p ?

Rovnice

$$X = A + tu, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření přímky** určené bodem A a vektorem u . Proměnná t se nazývá **parametr**.

Jestliže pomocí navrženého vzorečku umíme najít takto speciální body, které leží na přímce p . Můžeme potom nějakou modifikací nalézt všechny body ležící na přímce p ?

Rovnice

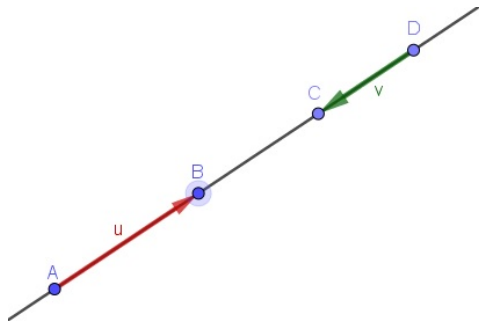
$$X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření přímky** určené bodem A a vektorem \mathbf{u} . Proměnná t se nazývá **parametr**.

Parametrické vyjádření přímky

Otázky k zamyšlení:

- Je přímka určena jen jedinou dvojicí bodů?
- Má přímka jeden, nebo více směrových vektorů? Jestliže jich má víc, jak spolu souvisí?
- Je nulový vektor směrnicevým vektorem nějaké přímky?



Příklad: Zjistěte zda body $P[1, 2]$, $Q[3, 1]$ leží na přímce p , která má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned}x &= 2 - t, \\y &= 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Parametrické vyjádření přímky

Příklad: Zjistěte zda body $P[1, 2]$, $Q[3, 1]$ leží na přímce p , která má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned}x &= 2 - t, \\y &= 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Řešení:

Aby bod P ležel na přímce p , muselo by existovat takové $t \in \mathbb{R}$, že

$$1 = 2 - t, \quad 2 = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tedy neexistuje t pro které by byly obě rovnice splněny. Tedy bod P neleží na přímce p .

Pro Q máme rovnice

$$3 = 2 - t, \quad 1 = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z obou rovnic dostaneme $t = -1$, tedy Q náleží přímce p .

Dvě přímky v rovině mohou mít tyto vzájemné polohy:

- rovnoběžné:
 - různé
 - totožné
- různoběžné

Dvě přímky $p(P, \mathbf{u})$ a $q(Q, \mathbf{v})$ jsou spolu **rovnoběžné** právě tehdy, když vektor \mathbf{v} je násobkem vektoru \mathbf{u} .

Pro dvě přímky $p(P, \mathbf{u})$ a $q(Q, \mathbf{v})$ platí: Je-li vektor \mathbf{v} násobkem vektoru \mathbf{u} a bod Q náleží zároveň přímce p , jsou přímky **rovnoběžné totožné**.

Vektor který je kolmý ke směrovému vektoru přímky se nazývá **normálový vektor**.

Úkol:

Najděte normálový vektor k vektoru $\mathbf{u} = (3, 2)$. Zakreslete obrázek a obecně určete pravidlo a ověřte pomocí skalárního součinu jeho platnost.

Úkol:

Najděte podmínku, kterou musí splňovat souřadnice bodů $X[x, y]$, aby tento bod ležel na přímce p která obsahuje bod $P[3, -1]$ a má normálový vektor $\mathbf{n} = (1, 2)$.

Úkol:

Najděte podmínku, kterou musí splňovat souřadnice bodů $X[x, y]$, aby tento bod ležel na přímce p která obsahuje bod $P[3, -1]$ a má normálový vektor $\mathbf{n} = (1, 2)$.

Nápověda: Bod X leží na přímce když vektory \mathbf{n} a $X - P$ jsou navzájem kolmé.

Úkol:

Najděte podmínku, kterou musí splňovat souřadnice bodů $X[x, y]$, aby tento bod ležel na přímce p která obsahuje bod $P[3, -1]$ a má normálový vektor $\mathbf{n} = (1, 2)$.

Nápověda: Bod X leží na přímce když vektory \mathbf{n} a $X - P$ jsou navzájem kolmé.

Hledaná podmínka tedy je:

$$(1, 2) \cdot (x - 3, y + 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y + 2 = 0$$

$$x + 2y - 1 = 0$$

Obecně:

Označíme $\mathbf{n} = (a, b)$, $P[p_1, p_2]$. Potom bod $X[x, y]$ leží na přímce p , která obsahuje normálový vektor \mathbf{n} a bod P právě tehdy, když

$$\mathbf{n}(X - P) = 0$$

Obecná rovnice přímky

Obecně:

Označíme $\mathbf{n} = (a, b)$, $P[p_1, p_2]$. Potom bod $X[x, y]$ leží na přímce p , která obsahuje normálový vektor \mathbf{n} a bod P právě tehdy, když

$$\mathbf{n}(X - P) = 0$$

$$(a, b) \cdot (x - p_1, y - p_2) = 0$$

$$ax - ap_1 + by - bp_2 = 0$$

$$ax + by - ap_1 - bp_2 = 0$$

Položme $-ap_1 - bp_2 = c$ a dostaneme výsledný vztah ve tvaru

$$ax + by + c = 0$$

Vzájemná poloha přímk daných parametrickými rovnicemi

Dvě přímky v rovině mohou mít tyto vzájemné polohy:

- rovnoběžné:
 - různé
 - totožné
- různoběžné

Dvě rovnice přímky určují stejnou přímku je-li jedna rovnice násobkem druhé.

Dvě přímky které mají rovnice

$$\begin{aligned}ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c &= 0\end{aligned}$$

jsou rovnoběžné právě tehdy, když vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ je násobkem vektoru $\mathbf{n}' = (a', b')$.

Napište obecnou rovnici přímky p

$$\begin{aligned} p : x &= 1 - t, \\ y &= 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Napište parametrické vyjádření přímky $q : 3x - 2y + 1 = 0$

Určete vzájemnou polohu p, q

$$\begin{aligned} p : x &= 3 - 2t \\ y &= -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$q : 4x - y + 5 = 0$$

Určeme vzdálenost bodu $A[1, 5]$ od přímky $q : 2x - y - 2 = 0$.

Postup řešení:

- 1 Bodem A vedeme kolmici p k přímce q
- 2 Najdeme průsečík Q přímek q a p .
- 3 Určíme vzdálenost bodů A a Q .

Metrické úlohy v rovině

Odchylka dvou přímek p, q se směrnicevými vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} je číslo $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Úkol:

Vypočítejte odchylku dvou přímek p, q

$$\begin{aligned} p : x &= 1 + t \\ y &= 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$q : 2x + y - 1 = 0$$

Směrnicový tvar přímky

Uvažujme přímku $p : ax + by + c = 0$. V případě, že koeficient $b = 0$, obecná rovnice přímky nabývá tvaru $ax + c = 0$, kde $a \neq 0$, takže všechny body přímky p mají konstantní x -ovou souřadnici, můžeme psát $x = -\frac{c}{a}$. Přímka p je tedy rovnoběžná s osou y . V případě $b \neq 0$, můžeme obecnou rovnici tímto koeficientem vydělit a osamostatnit y , takže dostaneme tvar

$$y = kx + q,$$

kde $k = \frac{-a}{b}$, $q = \frac{-c}{b}$. Tomuto vyjádření říkáme *směrnicová rovnice přímky p* , číslu k určujícímu sklon přímky p vzhledem k ose x říkáme *směrnice přímky*. Číslo q je hodnota na ose y , ve které přímka p osu protíná.

V různých aplikacích se často hledá rovnice přímky, která prochází dvěma body $P_1[x_1, y_1]$ a $P_2[x_2, y_2]$. Pokud je $x_1 \neq x_2$, pak směrnice takové přímky je

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Při určování tečny ke grafu funkce se zase řeší úloha nalezení přímky, která prochází daným bodem $T[x_t, y_t]$ a má směrnici k . Takovou přímku lze analyticky vyjádřit rovnicí

$$y = k(x - x_t) + y_t.$$

Směrnicový tvar přímky

Uveďme ještě návod k určení směrnice přímky kolmé k dané přímce $p : y = kx + q$, $k \neq 0$ (tato podmínka vyjadřuje, že přímka p není rovnoběžná s osou x).

Vyjádříme si tuto přímku v obecném tvaru, $-kx + y - q = 0$, její normálový vektor je $\mathbf{n} = (-k, 1)$. Kolmý vektor \mathbf{n}' k vektoru \mathbf{n} musí splňovat podmínku $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$. Této rovnici vyhovuje například vektor $\mathbf{n}' = (1, k)$, neboť $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = -k \cdot 1 + 1 \cdot k = 0$. Obecná rovnice přímky kolmé k p je tedy

$$x + ky + q' = 0$$

pro nějaké q' . Ve směrnicovém vyjádření bychom dostali směrnici $k' = \frac{-1}{k}$.