Množiny a výroková logika

Štěpán Křehlík

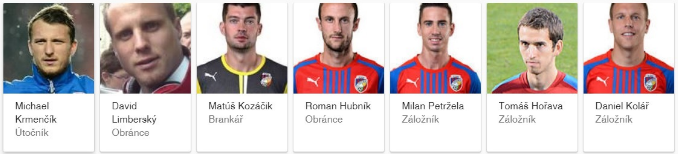
Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Množiny

Zavedení pojmu množiny

- Jsme zvyklí v našem světě pojmenovávat skupiny objektů.
- Hráči FC Viktoria Plzeň



...

- Herci seriálu Hry o trůny

...

- Podobná asociace do matematiky

Značení množin a jejich vlastnosti

- velké písmeno
  - množina symbolů pro karty $K = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$
  - množina mincí

- býti prvkem
  - epsilon "$\in$"
  - pětikoruna $\in M$
  - stokoruna $\notin M$
- ignorujeme multiplicity
  - každý prvek je v množině pouze jednou
- mohutnost množiny

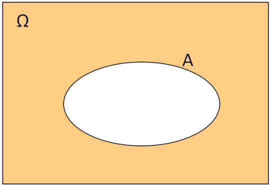
Množiny

Typy množin

- konečná množina
  - můžeme prvky vypsat bez ohledu na čas
  - $A = \{a, b, c, d, e\}$
- nekonečná množina
  - nelze vypsat všechny prvky
  - $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- prázdná množina
  - neobsahuje žádné prvky
  - $\emptyset, \{\}$
- podmnožina
  - množinová inkluze
  - všechny prvky jedné množiny jsou obsaženy v druhé množině
  - $A \subseteq B, A \subset B$

Operace s množinami

Unární operace - **Doplněk/komplement** množiny . . . $\overline{A}, A'$



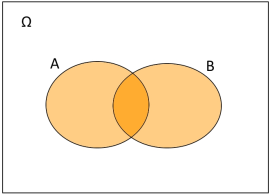
Příklad

$\Omega \dots$ *Studenti prvního ročníku ESF*
$A \dots$ *Ti studenti, kteří napsali vstupní test*
$A' \dots$ *?*

Operace s množinami

Binární operace **sjednocení** množin ...” $\cup$ ”

- $A \cup B$ je seskupení všeho, co je v obou skupinách

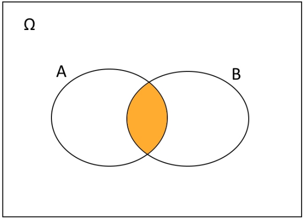


Příklad

Množina $M = \{\lambda, \mu, \alpha, \gamma\}$
Množina $N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$
$M \cup N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu\}$

Binární operace - **průnik** množin ..." $\cap$ "

- $A \cap B$ jsou prvky, které jsou společné oběma množinám



Příklad

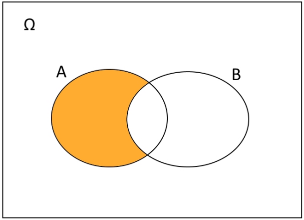
Označme A množinu olympijských medailistek v super G. Dále označme B množinu olympijských medailistek v paralelním obřím slalomu.

$A \cap B = \{Ledecká\}$

Operace s množinami

Binární operace - **rozdíl** množin . . . " $\setminus$ "

- $A \setminus B$ jsou prvky, které patří do množiny A a přitom nepatří do množiny B



Příklad

H je množina hodnocení ze zkoušky, tj. $H = \{A, B, C, D, E, F\}$
U je množina úspěšného hodnocení zkoušky, tj.
$U = \{A, B, C, D, E\}$
$H \setminus U = \{F\}$, *tj. množina neúspěšného hodnocení zkoušky*

Binární operace - **kartézský součin** ..." $\times$ "

- $A \times B$ jsou všechny dvojice, kde první prvek je z první množiny a druhý prvek z druhé množiny

Příklad

$K_F = K_M = \{A, B, AB, 0\}$ *je množina krevních skupin, pak kartézský součin* $K_F \times K_M =$
$\{(A, A); (A, B); (A, AB); (A, 0); (B, A); (B, B); (B, AB); (B, 0); (AB, A); (AB, B); (AB, AB); (AB, 0); (0, A); (0, B); (0, AB); (0, 0)\}$

Výrokový počet

Výrok je tvrzení u něhož lze rozhodnout zda je pravdivé, nebo nepravdivé

Příklady výroků:

- Den má 86 400 sekund.
- $1 + 2 = 5$
- Strč prst skrz krk.
- S námi se vyplatí počítat.
- Máte rádi ESF?

Značení výroků a jejich pravdivostní hodnoty:

- výroky: p, q
- pravdivý - P, 1, T
- nepravdivý - N, 0, F

Kategorie vět, které nejsou výrokem.

otázky, rozkazy, názvy, subjektivní názory, výroky s proměnou

Negace výroku p, značíme $\neg p$
Není pravda, že . . .
Neplatí, že . . .

Příklad

Výrok $p \ldots$: Matematika 0 je zbytečný předmět.
Výrok $\neg p \ldots$: Není pravda, že Matematika 0 je zbytečný předmět.

Pravdivostní tabulka

Negace	
p	$\neg p$
1	0
0	1

Konjunkce výroku p, q**, značíme** $p \wedge q$; Výrok p a zároveň q

Příklad

Výrok p . . .: Petr je student prvního ročníku.
Výrok p . . .: Petr má prukaz ISIC.
Výrok $p \wedge q$: Petr je student prvního ročníku a zároveň má prukaz ISIC.

Pravdivostní tabulka

Konjunkce		
p	p	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Výrokový počet - spojování výroků

Disjunkce výroku p, q**, značíme** $p \vee q$; Výrok p nebo výrok q

Příklad

Výrok p . . .: Absolvování vstupního testu umožnuje studium Mat.
Výrok p . . .: Absolvování Mat0 umožnuje studium Mat.
Výrok $p \wedge q$*: Absolvování vstupního testu, nebo absolvování Mat0 umožnuje studium Mat.*

Pravdivostní tabulka

Disjunkce		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikace výroku p, q**, značíme** $p \Rightarrow q$; Jestliže výrok p, pak výrok q

Příklad

Výrok p . . . : Užili jsme projímadlo .
*Výrok q . . . : Pos**li jsme se.*
Výrok $p \Rightarrow q$*: Jestli, že užijeme projímadlo, pak se pos***me.*

Pravdivostní tabulka

Implikace		
p	p	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ekvivalence výroku p, q**, značíme** $p \Leftrightarrow q$; Vvýrok p, právě tehdy, když výrok q

Příklad

Výrok p ...: Užili jsme projímadlo.
Výrok q ...: Měli jsme zácpu.
Výrok $p \Leftrightarrow q$*: Užili jsme projímadlo, právě tehdy, když jsme měli zacpu.*

Pravdivostní tabulka

Ekvivalence		
p	p	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Výroková forma je sdělení obsahující proměnou

Příklad

- *Lidé mají hmotnost větší jak 80 kg.*
- $x^2 = 1$, *pro* $x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- zadávání množin pomocí charakteristických vlastností,
- používání kvantifikátorů $\forall, \exists$

Příklad

- *Všichni studenti na přednášce byli pozvaní na Opening Party Support Centre.*
- *pro* $\forall x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ *platí* $x^2 = 1$.

Příklad

Negujte následující výroky:

- *Všichni studenti na přednášce byli pozvaní na Opening Party Support Centre.*
- *pro* $\forall x \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *platí* $x^2 = 1$.

Pravidla pro negování logických spojek:

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$

Příklad

Ukažme, že $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = P \Leftrightarrow Q$