Bayesiánská analýza

VII. Lineární regresní model s panelovými daty

Obsah tématu

Úvod

- Panelová data — časová i prostorová dimenze.
- Souhrnný model (pooled model), model individuálních vlivů (individual effects model), model náhodných koeficientů (random coefficients model).
- Chibova metoda marginální věrohodnosti.
- Model stochastických mezí (stochastic frontier model).

Značení

- y_{it} a ϵ_{it}: t-té pozorování (pro $t = 1, \ldots, T$) pro i-tého jednotlivce ($i = 1, \ldots, N$).
- $X_i = [\iota_T \tilde{X}_i]$.
- TN-rozměrné vektory:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{bmatrix} \qquad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon_N \end{bmatrix}$$

- Matice $TN \times K$:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N \end{bmatrix}$$

Obsah tématu

Princip

- Stejný regresní vztah pro všechny jednotlivce:

$$y_i = X_i\beta + \epsilon_i.$$

- Předpoklady:
  1. $\epsilon_i \sim N(0_T, h^{-1}I_T)$.
  2. ϵ_i a ϵ_j jsou nezávislé pro $i \neq j$.
  3. Všechny prvky X_i jsou pevná čísla (tj. nenáhodné veličiny) nebo v případě, že jsou náhodnými veličinami, jsou nezávisle na všech prvcích ϵ_j a mají hustotu pravděpodobnosti $p(X_i|\lambda)$ kde λ je vektor parametrů, který neobsahuje β ani h.
- ϵ_{it} a ϵ_{is} jsou vzájemně nezávislé pro $t \neq s$ $\rightarrow$ zobecnění ϵ_i má kovarianční matici Ω (řešení jako SUR model).

Bayesovská analýza

- Věrohodnostní funkce:

$$p(y|\beta, h) = \prod_{i=1}^{N} \frac{h^{\frac{T}{2}}}{(2\pi)^{\frac{T}{2}}} \left\{ \exp\left[-\frac{h}{2}(y_i - X_i\beta)'(y_i - X_i\beta) \right] \right\}.$$

- Přepsání do podoby:

$$p(y|\beta, h) = \frac{h^{\frac{NT}{2}}}{(2\pi)^{\frac{NT}{2}}} \left\{ \exp\left[-\frac{h}{2}(y - X\beta)'(y - X\beta) \right] \right\}.$$

- Např. nezávislá apriorní normální-gama hustota $\beta \sim N(\underline{\beta}, \underline{V})$ a $h \sim G(\underline{s}^{-2}, \underline{\nu}) \rightarrow$ Gibbsův vzorkovač.

Obsah tématu

Princip

- Příklad z oblasti marketingu: y_{it} je prodej nápoje značky i v čase t.
- Prodeje závisí např na ceně + existují i nezachytitelné kvantity (věrnost značce):

$$y_{it} = \alpha_i + \beta x_{it} + \epsilon_{it}$$

- α_i = individuální vliv (*individual effect*).

Věrohodnostní funkce

- Regresní model:

$$y_i = \alpha_i \iota_T + \tilde{X}_i \tilde{\beta} + \epsilon_i$$

- Z předpokladů:

$$p(y|\alpha, \tilde{\beta}, h) = \prod_{i=1}^{N} \frac{h^{\frac{T}{2}}}{(2\pi)^{\frac{T}{2}}} \left\{ \exp\left[-\frac{h}{2} (y_i - \alpha_i \iota_T - \tilde{X}_i \tilde{\beta})' (y_i - \alpha_i \iota_T - \tilde{X}_i \tilde{\beta}) \right] \right\}.$$

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)'$.

Nehierarchická apriorní hustota

- Model:

$$y = X^* \beta^* + \epsilon.$$

- X^*: matice rozměru $TN \times (N + k - 1)$.

$$X^* = \begin{bmatrix} \iota_T & 0_T & \cdot & \cdot & 0_T & \tilde{X}_1 \\ 0_T & \iota_T & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{X}_2 \\ \cdot & 0_T & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0_T & \cdot \\ 0_T & \cdot & \cdot & \cdot & \iota_T & \tilde{X}_N \end{bmatrix} \quad \beta^* = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_N \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix}.$$

- Klasická ekonometrie = fixed effects model (X^* s umělými proměnnými).
- Např. nezávislá normální-gama apriorní hustota:

$$\beta^* \sim N(\underline{\beta^*}, \underline{V}),$$
$$h \sim G(\underline{s}^{-2}, \underline{\nu}).$$

Hierarchická apriorní hustota

- Velká dimenze vektoru parametrů $\rightarrow$ hierarchická apriorní hustota.
- $N + k$ parametrů $\rightarrow$ problém pokud T relativně malé vzhledem k N.
- Obvyklý předpoklad pro $i = 1, \ldots, N$:

$$\alpha_i \sim N(\mu_\alpha, V_\alpha)$$

- α_i a α_j vzájemně nezávislé pro $i \neq j$.
- Hierarchická struktura: pokud μ_α a V_α neznámé parametry.

Konkretizace aprirorních hustot

- Předpokládáme nezávislost μ_α a V_α:

$$\mu_\alpha \sim N(\underline{\mu}_\alpha, \underline{\sigma}^2_\alpha),$$
$$V_\alpha^{-1} \sim G(\underline{V}_\alpha^{-1}, \underline{\nu}_\alpha).$$

- Zbylé parametry s nehierarchickou apriorní hustotou (nezávislé normální-gama rozdělení):

$$\tilde{\beta} \sim N(\underline{\beta}, \underline{V}_\beta),$$
$$h \sim G(\underline{s}^{-2}, \underline{\nu}).$$

- Klasická ekonometrie: tzv. random effects model.

Posteriorní analýza při nehierarchickém prioru

- LRM s nezávislou normální-gama apriorní hustotou (Gibbs):

$$\beta^*|y,h \sim N(\overline{\beta^*}, \overline{V}),$$
$$h|y,\beta^* \sim G(\overline{s}^{-2}, \overline{\nu}),$$

$$\overline{V} = (\underline{V}^{-1} + hX^{*\prime}X^*)^{-1},$$
$$\overline{\beta^*} = \overline{V}(\underline{V}^{-1}\underline{\beta^*} + hX^{*\prime}y),$$
$$\overline{\nu} = TN + \underline{\nu},$$
$$\overline{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \alpha_i\iota_T - \tilde{X}_i\tilde{\beta})'(y_i - \alpha_i\iota_T - \tilde{X}_i\tilde{\beta}) + \underline{\nu s}^2}{\overline{\nu}}.$$

- Standardní analýza konvergence, prediknční analýza a porovnání modelů.
- Numerický problém, pokud N příliš velké ($\overline{V}$ matice rozměru $(N+k-1)\times(N+k-1)$ + inverze) $\rightarrow$ teorém o inverzi dělené matici (snížení dimenze invertovaných matic).

Posteriorní analýza při hierarchickém prioru

- Odvození = násobení věrohodnostní funkce a apriorních hustot a analýzu výsledného výrazu pro $\tilde{\beta}$, h, α, μ_α a V_α $\rightarrow$ jádrové (podmíněné) hustoty $\rightarrow$ Gibbsův vzorkovač.
- Posteriorní rozdělení pro $\tilde{\beta}$ a h podmíněné veličinou α analogické jako LRM s nezávislou normální-gama apriorní hustotou.
- $p(\tilde{\beta}|y, h, \alpha, \mu_\alpha, V_\alpha)$ a $p(h|y, \tilde{\beta}, \alpha, \mu_\alpha, V_\alpha)$ nezávisí na μ_α a V_α $\rightarrow$ ekvivalence vzhledem k $p(\tilde{\beta}|y, h, \alpha)$ a $p(h|y, \tilde{\beta}, \alpha)$.

Posteriorní analýza pro β a h

$$\tilde{\beta}|y, h, \alpha, \mu_\alpha, V_\alpha \sim N(\overline{\beta}, \overline{V}_\beta),$$
$$h|y, \tilde{\beta}, \alpha, \mu_\alpha, V_\alpha \sim G(\overline{s}^{-2}, \overline{\nu}),$$

$$\overline{V}_\beta = \left(\underline{V}_\beta^{-1} + h \sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right)^{-1},$$
$$\overline{\beta} = \overline{V}_\beta \left(\underline{V}_\beta^{-1} \underline{\beta} + h \sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' [y_i - \alpha_i \iota_T] \right),$$
$$\overline{\nu} = TN + \underline{\nu},$$
$$\overline{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \alpha_i \iota_T - \tilde{X}_i \tilde{\beta})' (y_i - \alpha_i \iota_T - \tilde{X}_i \tilde{\beta}) + \underline{\nu} \underline{s}^2}{\overline{\nu}}.$$

Posteriorní analýza pro α

- Podmíněná posteriorní hustota pro α_i je nezávislá na α_j pro $i \neq j$:

$$\alpha_i | y, \tilde{\beta}, h, \mu_\alpha, V_\alpha \sim N(\overline{\alpha}_i, \overline{V}_i),$$

$$\overline{V}_i = \frac{V_\alpha h^{-1}}{T V_\alpha + h^{-1}},$$
$$\overline{\alpha}_i = \frac{V_\alpha (y_i - \tilde{X}_i \tilde{\beta})' \iota_T + h^{-1} \mu_\alpha}{T V_\alpha + h^{-1}}.$$

Posteriorní analýza pro hierarchické parametry

- Podmíněné hustoty pro hierarchické parametry μ_α a V_α:

$$\mu_\alpha | y, \tilde{\beta}, h, \alpha, V_\alpha \sim N(\overline{\mu}_\alpha, \overline{\sigma}^2_\alpha),$$
$$V_\alpha^{-1} | y, \tilde{\beta}, h, \alpha, \mu_\alpha, V_\alpha \sim G(\overline{V}_\alpha^{-1}, \overline{\nu}_\alpha),$$

$$\overline{\sigma}^2_\alpha = \frac{V_\alpha \underline{\sigma}^2_\alpha}{V_\alpha + N\underline{\sigma}^2_\alpha}$$
$$\overline{\mu}_\alpha = \frac{V_\alpha \underline{\mu}_\alpha + \underline{\sigma}^2_\alpha \sum_{i=1}^N \alpha_i}{V_\alpha + N\underline{\sigma}^2_\alpha},$$
$$\overline{\nu}_\alpha = \underline{\nu}_\alpha + N,$$
$$\overline{V}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \mu_\alpha)^2 + \underline{V}_\alpha \underline{\nu}_\alpha}{\overline{\nu}_\alpha}.$$

Obsah tématu

Princip

- Uvolněný předpoklad o společném sklonu regresní (nad)roviny:

$$y_i = X_i\beta_i + \epsilon_i.$$

- Problém odhadu pro malé T (vzhledem k N) $\rightarrow$ hierarchická konstrukce apriorní hustoty.
- Motivace: příklad z marketingu $\rightarrow$ navíc odlišný marginální efekt změny ceny na prodeje (věrnost značce skrze mezní vlivy ceny).

Věrohodnostní funkce

- Z předpokladů o chybovém členu a tvaru regresního modelu:

$$p(y|\beta, h) = \prod_{i=1}^{N} \frac{h^{\frac{T}{2}}}{(2\pi)^{\frac{T}{2}}} \left\{ \exp\left[-\frac{h}{2}(y_i - X_i\beta_i)'(y_i - X_i\beta_i) \right] \right\}.$$

- $\beta = ({\beta_1}', \ldots, {\beta_N}')'$ označuje všechny regresní koeficienty.

Hierarchická apriorní hustota

- β_i pro $i = 1, \ldots, N$ jsou nezávislé výběry z normálního rozdělení:

$$\beta_i \sim N(\mu_\beta, V_\beta).$$

- Druhá fáze hierarchické apriorní hustoty:

$$\mu_\beta \sim N(\underline{\mu}_\beta, \underline{\Sigma}_\beta),$$
$$V_\beta^{-1} \sim W(\underline{\nu}_\beta, \underline{V}_\beta^{-1}).$$

- Wishartovo rozdělení: $E(V_\beta^{-1}) = \underline{\nu}_\beta \underline{V}_\beta^{-1}$ + neinformativní varianta pro $\underline{\nu}_\beta = 0$.
- Přesnost chyby:

$$h \sim G(\underline{s}^{-2}, \underline{\nu}).$$

Posteriorní analýza při nehierarchickém prioru – β

- Gibbsův vzorkovač (standardní odvození):
- Vzájemně nezávislé podmíněné posteriorní hustoty parametrů β_i, pro $i = 1, \ldots, N$:

$$\beta_i | y, h, \mu_\beta, V_\beta \sim N(\overline{\beta}_i, \overline{V}_i),$$

$$\overline{V}_i = (hX_i{}'X_i + V_\beta^{-1})^{-1},$$
$$\overline{\beta}_i = \overline{V}_i(hX_i{}'y_i + V_\beta^{-1}\mu_\beta).$$

Posteriorní analýza při nehierarchickém prioru – μ_β a V_β

- Relevantní hustoty pro μ_β a V_β:

$$\mu_\beta | y, \beta, h, V_\beta \sim N(\overline{\mu}_\beta, \overline{\Sigma}_\beta)$$
$$V_\beta^{-1} | y, \beta, h, \mu_\beta \sim W(\overline{\nu}_\beta, [\overline{\nu}_\beta \overline{V}_\beta]^{-1}),$$

$$\overline{\Sigma}_\beta = \left(N V_\beta^{-1} + \underline{\Sigma}_\beta^{-1} \right)^{-1},$$
$$\overline{\mu}_\beta = \overline{\Sigma}_\beta \left(V_\beta^{-1} \sum_{i=1}^{N} \beta_i + \underline{\Sigma}_\beta^{-1} \underline{\mu}_\beta \right),$$
$$\overline{\nu}_\beta = N + \underline{\nu}_\beta,$$
$$\overline{V}_\beta = \sum_{i=1}^{N} (\beta_i - \mu_\beta)(\beta_i - \mu_\beta)' + \underline{V}_\beta.$$

- Výraz $\sum_{i=1}^{N} \beta_i$: k-rozměrný vektor obsahující součty prvků β_i.

Posteriorní analýza při nehierarchickém prioru – h

- Podmíněná posteriorní hustota pro přesnost chyby:

$$h|y, \beta, \mu_\beta, V_\beta \sim G(\overline{s}^{-2}, \overline{\nu}),$$

$$\overline{\nu} = TN + \underline{\nu},$$
$$\overline{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - X_i\beta_i)'(y_i - X_i\beta_i) + \underline{\nu s}^2}{\overline{\nu}}.$$

- Gibbsův vzorkovač: výběry z normálního, gama a Wishartova rozdělení.
- Prediknční analýza a kovergenční testy proveditelné standardním způsobem.

Obsah tématu

Úvod

- Problém Savage-Dickeyho poměru hustot např. pro test $V_\alpha = 0$ (volba $V_\alpha^{-1} = \infty \rightarrow$ volba velkého čísla a s tím problém hrubé aproximace).
- Problém vysoké dimenze parametrů (metoda Gelfanda a Deye nepřesná).
- Řešení v podobě Chibovy metody.

Značení a princip

- Obecné značení: θ, $p(y|\theta)$, $p(\theta)$ a $p(\theta|y)$.
- Jednoduché zjištění:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}.$$

- $p(y)$ nezávisí na parametrech $\theta \Rightarrow$ vyhodnocení pravé strany rovnice v jakémkoliv bodě θ^*.
- Výsledkem bude marginální věrohodnost $\rightarrow$ pro jakýkoliv bod θ^*:

$$p(y) = \frac{p(y|\theta^*)p(\theta^*)}{p(\theta^*|y)}.$$

- *Základní identita marginální věrohodnosti (basic marginal likelihood identity)*; $p(\theta^*)$ je zkrácený zápis pro $p(\theta = \theta^*)$.

Problém

- Neznáme všechny plné hustoty.
- Jak vyhodnotit posteriorní hustotu v bodě (tj. spočítat $p(\theta^*|y)$)?
- Zde pro případ více dimenzionálního vektoru parametrů a Gibbsova vzorkovače.

Problém dimenzionality

- Modelová struktura s nízko dimenzionálním vektorem θ a vysoce dimenzionálním vektorem z (často *latentní data*).
- *Gibbsův vzorkovač s rozšířenými daty*: sekvenční výběry z $p(\theta|y,z)$ a $p(z|y,\theta)$,
- Zde z jako vektor individuálních vlivů (tedy $z=\alpha$) nebo vektor náhodných koeficientů ($z=\beta$).
- Vyintegrování vysoce dimenzionálního vektoru z a práce s nízko dimenzionálním vektorem θ.

Obecný postup

- Zákony pravděpodobnosti implikují:

$$p(\theta^*|y) = \int p(\theta^*|y,z)p(z|y)dz.$$

- Výpočet $p(\theta^*|y,z^{(s)})$ pro každý výběr $s = 1, \dots, S$ a výsledek se zprůměruje.
- Pokud $z^{(s)}$ pro $s = 1, \dots, S$ jsou výběry z Gibbsova vzorkovače, potom

$$\widehat{p(\theta^*|y)} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} p(\theta^*|y,z^{(s)})$$

  konverguje k $p(\theta^*|y)$ pro S jdoucí k nekonečnu.
- Výpočet marginální věrohodnosti pokud jsme schopni spočítat $p(y|\theta^*)$, $p(\theta^*)$ a $p(\theta^*|y,z)$ (plné hustoty).
- Použití jakékoliv hodnoty θ^* (nejlépe např. θ^* jako posteriorní střední hodnota).

Problém modelu panelových dat

- Neznáme $p(\theta^*|y,z)$.
- Snadné řešení $\rightarrow$ předpokládejme rozdělení θ do dvou bloků, θ_1 a θ_2 a máme Gibbsův vzorkovač se sekvenčními výběry z $p(\theta_1|y,z,\theta_2)$, $p(\theta_2|y,z,\theta_1)$ a $p(z|y,\theta_1,\theta_2)$.
- Jsme schopni získat $\theta_1^{(s)}$, $\theta_2^{(s)}$ a $z^{(s)}$ pro $s=1,\dots,S$.
- K využití Chibovy metody musíme spočítat $p(\theta_1^*,\theta_2^*|y)$, kde θ_1^* a θ_2^* jsou jakékoliv prvky.

Řešení problému I

- Pravidla pravděpodobnosti říkají:

$$
\begin{aligned}
p(\theta_1^*, \theta_2^*|y) &= p(\theta_1^*|y)p(\theta_2^*|y, \theta_1^*), \\
p(\theta_1^*|y) &= \iint p(\theta_1^*|y, \theta_2, z)p(\theta_2, z|y)\mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}z, \\
p(\theta_2^*|y, \theta_1^*) &= \int p(\theta_2^*|y, \theta_1^*, z)p(z|y, \theta_1^*)\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

- Odhady pro $p(\theta_1^*|y)$.

$$
\widehat{p(\theta_1^*|y)} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} p(\theta_1^*|y, z^{(s)}, \theta_2^{(s)})
$$

konverguje k $p(\theta_1^*|y)$ pro S jdoucí k nekonečnu.

Řešení problému II

- Jak spočítat $p(\theta_2^*|y, \theta_1^*)$?
- Samostatně s využitím Gibbsova vzorkovače.
- Druhý Gibbsův vzorkovač pro sekvenční výběry z $p(\theta_2|y, z, \theta_1^*)$ a $p(z|y, \theta_1^*, \theta_2^*)$.
- Výstup k získání odhadu $p(\theta_2^*|y, \theta_1^*)$.
- Vzorky $\theta_2^{(s^*)}$ a $z^{(s^*)}$ pro $s^* = 1, \ldots, S^* \rightarrow$

$$p(\widehat{\theta_2^*|y, \theta_1^*}) = \frac{1}{S^*} \sum_{s^*=1}^{S^*} p(\theta_2^*|y, z^{(s^*)}, \theta_1^{(s^*)})$$

  konverguje k $p(\theta_2^*|y, \theta_1^*)$ pro S^* jdoucí k nekonečnu.
- Odhady $\widehat{p(\theta_1^*|y)}$ a $p(\widehat{\theta_2^*|y, \theta_1^*}) \rightarrow p(\theta_1^*, \theta_2^*|y)$.

Zobecnění

- Rozdělení vektoru θ do B bloků (tj. $\theta = (\theta_1', \ldots, \theta_B')'$).
- Platí

$$p(\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_B^*|y) = p(\theta_1^*|y)p(\theta_2^*|y, \theta_1^*) \ldots p(\theta_B^*|y, \theta_1^*, \ldots, \theta_{B-1}^*)$$

- Původní Gibbsův vzorkovač k výpočtu $p(\theta_1^*|y)$, druhý Gibbsův vzorkovač k výpočtu $p(\theta_2^*|y, \theta_1)$ a analogicky až B-tý Gibbsův vzorkovač pro výpočet $p(\theta_B^*|y, \theta_1^*, \ldots, \theta_{B-1}^*)$.
- Chibova metoda výpočetně náročnější $\times$všech B Gibbsových vzorkovačů s totožnou strukturu.

Ukázka pro modely panelových dat

- Model individuálních vlivů s hierarchickou apriorní hustotou: $B = 4$ (tj. $\theta_1 = \tilde{\beta}$, $\theta_2 = h$, $\theta_3 = \mu_\alpha$ a $\theta_4 = V_\alpha^{-1}$) a $z = \alpha$.
- Model náhodných koeficientů: $B = 3$ (tj. $\theta_1 = h$, $\theta_2 = \mu_\beta$ a $\theta_3 = V_\beta^{-1}$) a $z = \beta$.
- Známá podoba podmíněných hustot $\rightarrow$ výpočet $p(\theta^*|y)$.
- Potřeba vyhodnocení $p(\theta^*)$ a $p(y|\theta^*)$.
- Apriorní hustoty přímo spočítatelné $\times$ vyhodnocení věrohodnostní funkce o něco složitější (máme $p(y|\theta, z)$ a tedy ne $p(y|\theta)$).

Úprava věrohodnostní funkce

- Analytická integrace pro přechod z $p(y|\theta, z)$ na $p(\theta|y)$ na základě vlastností vícerozměrného normálního rozdělení.
- Model individuálních vlivů s hierarchickou apriorní hustotou: $p(y|\tilde{\beta}, h, \mu_\alpha, V_\alpha^{-1}) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|\tilde{\beta}, h, \mu_\alpha, V_\alpha^{-1})$, kde
$$p(y_i|\tilde{\beta}, h, \mu_\alpha, V_\alpha^{-1}) \sim N(\mu_i, V_i),$$
$$\mu_i = \mu_\alpha \iota_T + \tilde{X}_i \tilde{\beta}$$
$$V_i = V_\alpha \iota \iota_T' + h^{-1} I_T.$$
- Model náhodných koeficientů: $p(y|h, \mu_\beta, V_\beta^{-1}) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|, h, \mu_\beta, V_\beta^{-1})$, kde
$$p(y_i|h, \mu_\beta, V_\beta^{-1}) \sim N(\mu_i, V_i),$$
$$\mu_i = X_i \mu_\beta$$
$$V_i = X_i V_\beta X_i' + h^{-1} I_T.$$

Obsah tématu

Úvod

- Viz Koop (2003).

Obsah tématu

Princip

- Ekonomická teorie: stochastic frontier model.
- Model individuálních vlivů s odlišnou hierarchickou apriorní hustotou.
- Analýza efektivity produkce firem či jiných agentů.
- Ekonomická teorie $\rightarrow$ ekonometrický model.

Úvod do modelu

- Ekonomický model produkce: výstup firmy i v čase t, Y_{it}, je vyráběn s využitím vektoru vstupů, X_{it}^*, kde $i = 1, \ldots, N$ a $t = 1, \ldots, T$.
- Firmy využívají běžnou, nejlepší možnou dostupnou technologii závislou na neznámých parametrech, β:

$$Y_{it} = f\left(X_{it}^*; \beta\right).$$

- *Hranice výrobních možností (production frontier)*.
- Odchylka skutečného výstupu od maximálně dosažitelného = měřítko neefektivity:

$$Y_{it} = f\left(X_{it}^*; \beta\right)\tau_i.$$

- $0 < \tau_i \leq 1$: míra efektivity specifická pro jednotlivé firmy.
- $\tau_i = 1$: firma i plně efektivní.
- Předpoklad: každá firma úroveň efektivity neměnnou v čase (lze uvolnit).

Úvod do modelu (pokračování)

- Chybový člen ζ_{it}:

$$Y_{it} = f\left(X_{it}^{*}; \beta\right) \tau_i \zeta_{it}.$$

- Zahrnutí chybového členu (chyb měření) = stochastická hranice.
- Pokud hranice výrobních možností, $f()$, v log-lineární podobě (např. Cobb-Douglasova produkční funkce nebo produkční funkce TRANSLOG) $\rightarrow$ logaritmování:

$$y_{it} = X_{it}\beta + \epsilon_{it} - z_i,$$

- $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)'$, $y_{it} = \ln(Y_{it})$, $\epsilon_{it} = \ln(\zeta_{it})$, $z_i = -\ln(\tau_i)$ a X_{it} je protějškem X_{it}^{*} (vstupy transformovány logaritmy).
- Veličina z_i = nefektivita a díky $0 < \tau_i \leq 1$ nezáporná náhodná veličina.
- X_{it} s úrovňovou konstantou a koeficientem β_1.

Úvod do modelu (dokončení)

- Podoba modelu individuálních vlivů: výraz $\beta_1 - z_i$ odpovídá α_i.
- Ekonomická teorie dává vodítko k výběru hierarchické apriorní hustoty.
- Pro nelog-lineární produkční funkci (např. CES produkční funkce) potřeba kombinace s technikami M-H algoritmu.
- Setřízení proměnných a matic:

$$y_i = X_i\beta + \epsilon_i - z_i\iota_T.$$

Věrohodnostní funkce

- Předpoklad nezávislosti z_i a ϵ_j pro všechna i a j:

$$p\left(y|\beta, h, z\right) = \prod_{i=1}^{N} \frac{h^{\frac{T}{2}}}{\left(2\pi\right)^{\frac{T}{2}}} \left\{\exp\left[-\frac{h}{2}\left(y_i - X_i\beta + z_i\iota_T\right)'\left(y_i - X_i\beta + z_i\iota_T\right)\right]\right\}.$$

- $z = (z_1, \ldots, z_N)'$.
- z: vektor neznámých parametrů.
- „klasická“ ekonometrie: věrohodnostní funkce definována jako $p(y|\beta, h, \theta) = \int p(y|\beta, h, z)p(z|\theta)\mathrm{d}z$, kde $p(z|\theta)$ odpovídá předpokladu o rozdělení neefektivity (závisí na vektoru neznámých parametrů θ).
- Matematicky ekvivalentní postup bayesovskému přístupu využívajícímu $p(z|\theta)$ jako hierarchickou apriorní hustotu $\Rightarrow$ volba označení „věrohodnostní funkce“ a „hierarchická apriorní hustota“ je čistě sémantickou záležitostí.

Hierarchická apriorní hustota

- Koeficienty hranice výrobních možností a přesnost chyby:

$$\beta \sim N\left(\underline{\beta}, \underline{V}\right),$$
$$h \sim G\left(\underline{s}^{-2}, \underline{\nu}\right).$$

- Míra neefektivity: hierarchická apriorní hustota.
- $z_i > 0 \rightarrow$ ne hierarchická hustota odpovídající normální hustotě pravděpodobnosti.
- Obvykle omezené normálnímu rozdělení nebo rozdělení z rodiny gama rozdělení, zde exponenciální rozdělení (z_i a z_j a priori nezávislé pro $i \neq j$):

$$z_i \sim G\left(\mu_z, 2\right).$$

- $z_i > 0 \Rightarrow \mu_z > 0$ (snadnější práce s μ_z^{-1} než přímo s μ_z):

$$\mu_z^{-1} \sim G\left(\underline{\mu}_z^{-1}, \underline{\nu}_z\right).$$

Apriorní hustota pro hyperparametry

- Apriorní hyperparametry pro $\underline{\mu}_z^{-1}$ a $\underline{\nu}_z$ na základě předpokladů o rozdělení efektivity.
- Např. nechť τ^* označuje apriorní medián tohoto rozdělení.
- Pokud očekáváme spíše efektivní firmy v našem vzorku: hodnota τ^* vysoká (např. 0.95), jinak nižší.
- Literatura: $\underline{\nu}_z = 2$ implikuje relativně neinformativní prior.
- Z nastavení $\underline{\mu}_z = -\ln(\tau^*)$: medián apriorního rozdělení efektivity τ^*.
- Strategie stanovení priorů prostřednictvím snadno interpretovatelných hyperparametrů v kontextu výchozí ekonomické teorie (např. τ^*) + následná zpětná transformace pro nalezení hyperparametrů použitých v modelu (např. $\underline{\mu}_z$ a $\underline{\nu}_z$).
- Omezení z ekonomické teorie: např. restrikce, že hranice výrobních možností je monotónně rostoucí ve vstupech nebo nákladová funkce je konkávní nebo možnost technologického úpadku ⇒ omezení parametrů ve tvaru nerovností.

Bayesovský výpočet

- Gibbsův vzorkovač: podmíněné hustoty jako v modelu individuálních vlivů s hierarchickou apriorní hustotou (s výjimkou z a μ_z).
- Parametry hranice výrobních možností:

$$\beta | y, h, z, \mu_z \sim N\left(\overline{\beta}, \overline{V}\right),$$

$$\overline{V} = \left(\underline{V}^{-1} h \sum_{i=1}^{N} X_i{}' X_i\right)^{-1},$$

$$\overline{\beta} = \overline{V}\left(\underline{V}^{-1}\underline{\beta} + h \sum_{i=1}^{N} X_i{}'[y_i + z_i \iota_T]\right).$$

Bayesovský výpočet (pokračování)

- Standardní výsledky pro přesnost chyby:

$$h|y,\beta,z,\mu_z \sim G\left(\overline{s}^{-2},\overline{\nu}\right),$$

$$\overline{\nu} = TN + \underline{\nu},$$

$$\overline{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i + z_i\iota_T - X_i\beta\right)'\left(y_i + z_i\iota_T - X_i\beta\right) + \underline{\nu}\underline{s}^2}{\overline{\nu}}.$$

- Nezávislé podmíněné posteriorní hustoty pro neefektivity odpovídají normálnímu rozdělení omezenému na kladné hodnoty:

$$p\left(z_i|y_i,X_i,\beta,h,\mu_z\right) \propto f_N\left(z_i|\overline{X}_i\beta - \overline{y}_i - \left(Th\mu_z\right)^{-1},\left(Th\right)^{-1}\right)1\left(z_i \geq 0\right).$$

- $\overline{y}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{it}}{T}$ a $\overline{X}_i$ je matice rozměru $(1 \times k)$ obsahující průměrné hodnoty každé vysvětlující proměnné pro každého jednotlivce i.
- $1\left(z_i \geq 0\right)$ je indikační funkce rovna jedničce pokud $z_i \geq 0$ a nule v ostatních případech.

Bayesovský výpočet (dokončení)

- Podmíněná posteriorní hustota pro μ_z^{-1}:

$$\mu_z^{-1}|y, \beta, z \sim G\left(\overline{\mu}_z, \overline{\nu}_z\right),$$

$$\overline{\nu}_z = 2N + \underline{\nu}_z,$$

$$\overline{\mu}_z = \frac{N + \frac{\underline{\nu}_z}{2}}{\sum_{i=1}^{N} z_i + \underline{\mu}_z}.$$

- Výběry z omezeného normálního rozdělení (neomezené + vyhození $z_i < 0$ nebo specifické algoritmy).
- Tradiční způsob predikční analýzy a provedení MCMC diagnostik; porovnání modelů např. pomocí Chibovy metody.
- Metody i pro čistě průřezovou verzi tohoto modelu (tzn. $T = 1$ $\times$ nepřijatelné použití určitých nepravých priorů $\rightarrow$ nepravé posteriory).
- Intuitivně: $T = 1 \Rightarrow$ parametry z, μ_z, β, $h = N + K + 2$ parametrů $\times$ jen N pozorování.

Empirická ilustrace

- Viz Koop (2003).