

# Bayesiánská analýza

## VIII. Úvod do časových řad

# Obsah tématu

- 1 Local level model
  - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
  - Posteriorní hustota
  - Empirické bayesovské metody
  - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
  - Bayesovský výpočet
  - Empirická ilustrace

- Stavové modely.
- Hierarchická podstata – atraktivita odpovídajících metod.
- Bauwens, Lubrano, Richard – bayesiánská analýza alternativního přístup.
- Stavový zápis = jiný pohled na stejnou problematiku.

- Viz analýza autokorelovaných náhodných složek.
- $AR(p)$  proces:

$$(1 - \rho_1 L - \dots - \rho_p L^p) y_t = u_t.$$

- V podstatě lineární regresní model:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_p y_{t-p} + u_t.$$

- Zobecnění:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + u_t.$$

- Řešené problémy: restriktce kladené na koeficienty, definování apriorních hustot.

# Obsah tématu

- 1 Local level model
  - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
  - Posteriorní hustota
  - Empirické bayesovské metody
  - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
  - Bayesovský výpočet
  - Empirická ilustrace

# Úvod

- Local level model:

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- $\epsilon_t$  je i.i.d.  $N(0, h^{-1})$ .
- Jedinečnost = nepozorované  $\alpha_t$  jako náhodná procházka:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t.$$

- $u_t$  je i.i.d.  $N(0, \eta h^{-1})$  a  $\epsilon_t$  a  $u_s$  jsou vzájemně nezávislé pro všechna  $t$  a  $s$ .
- $t = 1, \dots, T$  resp. pro  $\alpha$   $t = 1, \dots, T - 1$ .

# Pojmy

- $\alpha_1 =$  počáteční podmínka.
- Rovnice měření (pozorování):

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- Stavová rovnice:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t.$$

- $\alpha_t$  má stochastický trend.

# Stochastický trend

- Nestacionární vývoj řady, náhodnost trendu.
- Deterministický trend:

$$\alpha_t = \alpha + \beta t.$$

- Stochastické trendové chování:

$$\alpha_t = \alpha_1 + \sum_{j=1}^{t-1} u_j.$$

- Při zanedbání počátečních podmínek:  $\text{var}(\alpha_t) = (t - 1)\eta h^{-1}$ .
- $\alpha_t$  a  $\alpha_{t-1}$  mají tendenci ležet blízko u sebe (tj.  $E(\alpha_t | \alpha_{t-1}) = \alpha_{t-1}$ ).
- Stochastický trend: variabilita jako rostoucí funkce času  $\times$  povolna se měnící  $\alpha_t$ .



# Dekompozice časové řady

- Local level model:

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- Trendová komponenta a nepravidelná komponenta  $\epsilon_t$ .
- Trend = dlouhodobý růst ekonomiky  $\times$  nepravidelná komponenta = náhodné krátkodobé šoky.
- Stavové modely: dekompozice řady na různé složky; např. i sezónní složka.

# Local level model – analýza

- Měření relativní velikosti trendu a nepravidelné složky.
- Rozptyly  $h^{-1}$  a  $\eta h^{-1} \Rightarrow \eta$  jako relativní poměr variability náhodné procházky a náhodné složky.
- $\eta \rightarrow 0$  náhodná složka vypadává a  $\alpha_t = \alpha_1$  pro všechna  $t$  (model  $y_t = \alpha_1 + \epsilon_t \rightarrow$  fluktuace kolem konstantní úrovně).
- Pro rostoucí  $\eta$  roste rozptyl  $u_t \Rightarrow$  narůst role stochastického trendu.
- Test  $\eta = 0$  jako způsob testování jednotkového kořene.

## Další interpretace a apriorní hustota

- $\alpha_t$  je střední hodnota (či úroveň, tedy *level*) pro  $y_t$ .
- Mění se střední hodnota  $\Rightarrow$  *local level model*.
- LRM s měnící se úrovní konstantou = *model v čase proměnných parametrů (time varying parameters model)*.
- Obecnější stavové modely: v čase proměnné parametry (regresní koeficienty) nebo v čase proměnné rozptyly náhodných složek.
- Vektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_T)'$   $\Rightarrow$  definice apriorní hustoty.
- Z rovnice náhodné procházky: hierarchická apriorní hustota pro  $\alpha$  (podobně jako model individuálních vlivů s  $T = 1$ ).
- Bayesovské metody pro nezávislou normální-gama apriorní hustotu = odvození Gibbsova vzorkovače (viz obecný stavový model).
- Zde přirozeně kojungovaná apriorní hustota pro zavedení empirických bayesiánských metod.

# Obsah tématu

- 1 Local level model
  - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
  - Posteriorní hustota
  - Empirické bayesovské metody
  - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
  - Bayesovský výpočet
  - Empirická ilustrace

# Značení

- $y = (y_1, \dots, y_T)'$  a  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_T)'$ :

$$y = I_T \alpha + \epsilon.$$

- Standardní požadavky:  $\epsilon$  má vícerozměrné normální rozdělení se střední hodnotou  $0_T$  a kovarianční maticí  $h^{-1}I_T \Rightarrow$  normální lineární regresní model ( $\alpha$  jako  $T$ -rozměrný vektor regresních koeficientů).
- Standardní podoba věrohodnostní funkce.

# Značení

- Konjugovaná podoba hierarchické hustoty na základě stavové rovnice.
- *Matice prvních diferencí* rozměru  $(T - 1) \times T$ :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Platí:  $D\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_T - \alpha_{T-1} \end{pmatrix}$ .

- Stavová rovnice:  $D\alpha = u$ , kde  $u = (u_1, \dots, u_{T-1})'$ ; normalita  $u \Rightarrow$  stavová rovnice definuje normální hierarchickou apriorní hustotu pro  $D\alpha$ .

# Specifikace apriorních hustot – pokračování

- Apriorní hustota pro  $h$  a  $\alpha_1$ .
- Zápis:  $y = W\theta + \epsilon$ , kde

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_T - \alpha_{T-1} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0_{T-1}' \\ \iota_{T-1} & C \end{pmatrix}.$$

- $\iota_{T-1}$  je  $(T - 1)$ -rozměrný vektor jedniček

## Specifikace apriorních hustot – pokračování

- Lze ukázat (maticovým násobením) ekvivalenci zápisů.
- $C$  je dolní trojúhelníková matice rozměru  $(T - 1) \times (T - 1)$  se všemi nenulovými prvky rovnými jedné (inverze matice  $D$  s vynechaným prvním sloupcem).
- $C$  má všechny prvky na a pod hlavní diagonálou rovny jedné a všechny prvky nad hlavní diagonálou rovny nule.
- Přirozeně konjugovaná apriorní hustota pro  $\theta$  a  $h$ :

$$\theta, h \sim NG(\underline{\theta}, \underline{V}, \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}).$$



## Specifikace apriorních hustot – dokončení

- Specifická struktura pro  $\underline{\theta}$  a  $\underline{V}$  (zahrnuje apriorní informaci obsaženou ve stavové rovnici):

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \underline{\theta}_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{V} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{11} & 0_{T-1}' \\ 0_{T-1} & \eta I_{T-1} \end{pmatrix}.$$

- $\Rightarrow \alpha_{t+1} - \alpha_t$  odpovídá normální hustotě,  $N(0, \eta h^{-1})$ .
- Apriorní hustota závisí na  $\eta \Rightarrow$  hierarchická podoba.
- Apriorní hustota pro počáteční podmínku  $\alpha_1 \sim N(\underline{\theta}_1, h^{-1} \underline{V}_{11})$ .

# Obsah tématu

## 1 Local level model

- Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
- **Posteriorní hustota**
- Empirické bayesovské metody
- Empirická ilustrace

## 2 Obecný stavový model

- Bayesovský výpočet
- Empirická ilustrace

# Výsledky

- Standardní výsledky z kapitoly 3.
- $p(\theta, h|y)$  odpovídá  $NG(\bar{\theta}, \bar{V}, \bar{s}^{-2}, \bar{\nu})$ :

$$\bar{\theta} = \bar{V}(\underline{V}^{-1}\underline{\theta} + W'y)$$

$$\bar{V} = (\underline{V}^{-1} + W'W)^{-1}$$

$$\bar{\nu} = \underline{\nu} + T$$

$$\bar{\nu}\bar{s}^2 = \underline{\nu}s^2 + (y - W\bar{\theta})'(y - W\bar{\theta}) + (\bar{\theta} - \underline{\theta})'\underline{V}^{-1}(\bar{\theta} - \underline{\theta})$$

# Zpětná parametrizace

- $p(\theta|h, y)$  je normální + lin. kombinace normálních veličin je normální náhodná veličina.
- Pokud  $p(\theta, h)$  odpovídá  $NG(\bar{\theta}, \bar{V}, \bar{s}^{-2}, \bar{\nu})$ , je posteriorní rozdělení  $(\alpha, h)$  analogické rozdělení  $NG(\bar{\alpha}, \bar{V}_\alpha, \bar{s}^{-2}, \bar{\nu})$ , kde

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= W\bar{\theta}, \\ \bar{V}_\alpha &= W\bar{V}W' .\end{aligned}$$

- Analytické výsledky (analyticky např. porovnání modelů).

## Další otázky

- Local level model: regresní model, kde počet regresních parametrů = počet pozorování.
- Hodnotná posteriorní analýza díky apriorní informaci.
- Proč nezískáváme degenerované posteriorní rozdělení v bodě  $y = \alpha$ ?
- Pro  $\alpha_t = y_t$  pro všechna  $t$  máme perfektně padnoucí model ( $\epsilon_t = 0$  pro všechna  $t$ ).
- Lze ukázat, že věrohodnostní funkce nabývá v tomto bodě nekonečně velké hodnoty  $\times$  bayesiánská posteriorní hustota není do tohoto bodu nekonečné věrohodnosti umístěna díky apriorní informaci.
- Stavová rovnice říká:  $\alpha_{t+1}$  a  $\alpha_t$  leží velmi blízko u sebe  $\rightarrow$  posteriorní hustota dále od bodu perfektní shody modelu s daty.
- Tento jev nazýván *vyhlazením (smoothing)* stavového vektoru.

# Obsah tématu

## 1 Local level model

- Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
- Posteriorní hustota
- **Empirické bayesovské metody**
- Empirická ilustrace

## 2 Obecný stavový model

- Bayesovský výpočet
- Empirická ilustrace

# Úvod

- Subjektivní formulace apriorní hustoty nebo neinformativí apriorní hustota.
- V našem případě volba:  $\underline{\theta}$ ,  $\underline{V}$ ,  $\underline{s}^{-2}$ ,  $\underline{\nu}$  nebo neinformativních hodnoty  $\underline{\nu} = 0$  a  $\underline{V}^{-1} = 0_{T \times T}$  ( $\underline{\theta}$  a  $\underline{s}^{-2}$  irelevantní).
- Nevýhody obou přístupů.
- Empirické bayesovské metody: hlavně u hierarchických apriorních hustot  $\times$  využitelné všude  $\times$  kritika „dvojpočtu“ s daty.
- Odhad apriorních hyperparametrů z dat  $\rightarrow$  ideální nástroj marginální věrohodnost (hledání apriorních hyperparametrů zvyšujících marginální věrohodnost)  $\times$  výpočetně náročné  $\Rightarrow$  jen pro některé parametry.

# Local level model – úvod

- Apriorní hustota: pět hyperparametrů;  $\eta$ ,  $\underline{\theta}_1$ ,  $\underline{V}_{11}$ ,  $\underline{s}^{-2}$  a  $\underline{\nu}$ .
- Nejvýznamnější  $\eta$  (podíl komponenty náhodné procházky ve stavovém modelu).
- Zjevná „neinformativní“ volba  $\eta \rightarrow \infty$  nesmyslná  $\rightarrow$  stochastický trend převáží nad nesystematickou komponentou (dost "informativní").
- Zaměření na  $\eta$  + předpoklad o schopnosti subjektivně definovat  $\underline{\theta}_1$ ,  $\underline{V}_{11}$ ,  $\underline{s}^{-2}$  a  $\underline{\nu}$ .



# Marginální věrohodnost

- Marginální věrohodnost:

$$p(y|\eta) = c \left( \frac{|\underline{V}|}{|\overline{V}|} \right)^{\frac{1}{2}} (\underline{\nu S}^2)^{-\frac{\underline{\nu}}{2}},$$

kde

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\underline{\nu}}{2}\right) (\underline{\nu S}^2)^{\frac{\underline{\nu}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\underline{\nu}}{2}\right) \pi^{\frac{T}{2}}}.$$

- Marginální věrohodnost jako funkce  $\eta$ .
- Standardní přístup:  $\eta = \hat{\eta}$ , pro které bude maximalizována  $p(y|\eta) \rightarrow$  vstupuje do apriorních hustot + standardní posteriorní analýza.
- Pro local level model: grid search method = potenciální hodnoty  $\eta$  v „mřížce“  $\rightarrow \hat{\eta}$  maximalizující  $p(y|\eta)$ .

# Formální přístup

- $\eta$  jako parametr.
- $p(\eta|y) \propto p(y|\eta)p(\eta)$ , kde  $p(\eta)$  je apriorní hustota:

$$p(\eta|y) = c \left( \frac{|\overline{V}|}{|\underline{V}|} \right)^{\frac{1}{2}} (\overline{\nu S^2})^{-\frac{\overline{\nu}}{2}} p(\eta).$$

- Posterioční hustota pro analýzu  $\eta$ .
- Pokud zájem i o ostatní parametry:  $p(\theta, h, \eta|y) = p(\theta, h|y, \eta)p(\eta|y)$ .
- $p(\theta, h|y, \eta)$  je normální-gama hustota podmíněná specifickou hodnotou  $\eta$  (platí předchozí posterioční výsledky) a  $p(\eta|y)$  je jednorozměrná hustota.

# Generování $\eta$

- MC integrace: výběr z  $p(\eta|y) \propto p(y|\eta)p(\eta)$  a tímto podmíněn výběr z  $p(\theta, h|y, \eta)$ .
- Výběr z  $p(\eta|y)$  podle  $p(\eta)$ : možnost aproximací diskrétní alternativou.
- Vyhodnocení  $p(\eta|y)$  v  $B$  různých bodech mřížky  $\eta_1, \dots, \eta_B \rightarrow p(\eta_1|y), \dots, p(\eta_B|y)$ .
- Výběry  $\eta$  z diskrétního rozdělení (definované pravděpodobnostmi  $p(\eta = \eta_i) = p(\eta_i|y)$  pro  $i = 1, \dots, B$ )  $\rightarrow$  aproximativně odpovídají výběrům z  $p(\eta|y)$  (rostoucí  $B$  vede k růstu kvality aproximace).

## Další otázky

- Vyžadován výběr  $\underline{\theta}_1$ ,  $\underline{V}_{11}$ ,  $\underline{s}^{-2}$  a  $\underline{\nu}$  (případně  $p(\eta)$  při využití druhého přístupu).
- Obvyklá neinformativních volba (ve většině modelů dobře funguje).
- Nefunguje pro případ local level modelu.
- Nastavení  $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0 \rightarrow$  hodnoty  $\underline{s}^{-2}$  a  $\underline{\theta}_1$  irelevantní  $\Rightarrow p(\theta, \sigma^{-2} | y, \eta)$  je dobře definovaná posteriorní hustota.

# Problémy

- Nedeterminovatelná integrační konstanta  $\times$  při zaměření jen na  $\eta$  (nebo modely se stejnou apriorní hustotou)  $\rightarrow c$  buď do vztahů nevstoupí nebo se vykrátí.
- Vážnější problém:  $\overline{\nu s^2}$  se blíží nule pro  $\eta \rightarrow \infty$ .
- Neinformativní výsledky:  $\bar{\theta} = (W'W)^{-1}W'y$  a  $y - W\bar{\theta} = 0_T \rightarrow$  marginální věrohodnost nekonečno (bez důkazu).
- Empirická bayesovská analýza nastaví  $\hat{\eta} \rightarrow \infty$  pro jakoukoliv datovou sadu  $\Rightarrow E(\alpha|y) = y$  (žádné vyhlazení).
- Závěr: empirické bayesovské metody selhávají v rámci local level model při  $\underline{\nu}$  a  $\underline{V}_{11}^{-1}$  na neinformativních hodnotách.
- Důvod: počet vysvětlujících proměnných je roven počtu pozorování (přesné proložení dat).

## Problémy – pokračování

- Nastavením  $\underline{\nu} > 0$  nebo  $\underline{V}_{11}^{-1} > 0$  (a volbou  $\underline{s}^2$  nebo  $\underline{\theta}_1$  adekvátním způsobem)  $\rightarrow$  možné použití empirických bayesovských metod.
- $\underline{\nu s}^2$  se pro  $\eta \rightarrow \infty$  nebude blížit nule  $\Rightarrow$  nepotřebná informativní apriorní hustota pro  $h$  i  $\theta_1$ .
- Pro alternativní přístup ( $\eta$  jako parametr) problém pro  $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0$  a pro nepravý prior pro  $\eta$ .
- V případě  $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0$  a  $p(\eta)$  jako nepravou  $U(0, \infty) \rightarrow p(\eta|y)$  není platná hustota.
- Pro  $\underline{\nu} > 0$  nebo  $\underline{V}_{11}^{-1} > 0$  anebo  $p(\eta)$  jako platná p.d.f.  $\rightarrow p(\eta|y)$  platná posteriorní hustota.
- Pro  $\eta$  jako neznámý parametr  $\rightarrow$  bayesiánská analýzu v případě informativního  $\eta$ ,  $h$  nebo  $\theta_1$ .

# Obsah tématu

## 1 Local level model

- Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
- Posteriorní hustota
- Empirické bayesovské metody
- **Empirická ilustrace**

## 2 Obecný stavový model

- Bayesovský výpočet
- Empirická ilustrace

# Příklad

- viz Koop (2003).



# Obsah tématu

- 1 Local level model
  - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
  - Posteriorní hustota
  - Empirické bayesovské metody
  - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
  - Bayesovský výpočet
  - Empirická ilustrace

# Úvod

- Obecnější (ne zcela) stavový model:

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + \epsilon_t,$$

kde

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + u_t.$$

- $\alpha_t$  je  $p \times 1$  rozměrný vektor obsahující  $p$  stavových rovnic.
- Předpokládáme, že  $\epsilon_t$  je i.i.d.  $N(0, h^{-1})$  ×  $u_t$  je  $p \times 1$  rozměrný vektor i.i.d.  $N(0, H^{-1})$ .
- $\epsilon_t$  a  $u_s$  vzájemně nezávislé pro všechna  $s$  a  $t$ .
- $X_t$  a  $Z_t$  vektory rozměru  $1 \times k$  a  $1 \times p$  obsahující vysvětlující proměnné a (nebo) známé konstanty.
- Matice  $T_t$  známých konstant rozměru  $p \times p$  (možné i neznámé parametry).

# Varianty

- Local level model:  $p = 1$ ,  $k = 0$ ,  $T_t = 1$  a  $Z_t = 1$ .
- Normální lineární regresní model:  $Z_t = 0$ .
- Normální lineární regresní model s v čase proměnnými parametry:  $Z_t$  obsahuje některé nebo všechny vysvětlující proměnné.
- *Strukturální modely časových řad*: lze převést do podoby stavového modelu.
- Jeden z běžných strukturálních modelů časových: *local linear trend model*:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \nu_t + \xi_t$$

$$\nu_{t+1} = \nu_t + \zeta_t$$

- $\xi_t$  je i.i.d.  $N(0, \sigma_\xi^2)$ ,  $\zeta_t$  je i.i.d.  $N(0, \sigma_\zeta^2)$  a všechny náhodné chyby jsou vzájemně nezávislé.

# Local linear trend model

- Stavová podoba:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix}$$

$$u_t = \begin{pmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{pmatrix}$$

$$T_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix}$$

a  $\beta = 0$ .

# Obsah tématu

- 1 Local level model
  - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
  - Posteriorní hustota
  - Empirické bayesovské metody
  - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
  - Bayesovský výpočet
  - Empirická ilustrace

# Úvod

- Metody posteriorní analýzy v řadě komplikovaných modelů lze odvodit jednoduchou kombinací výsledků jednodušších modelů.
- Pro posteriorní simulaci nastává komplikace toho rázu, že posteriorní hustoty pro  $\alpha$  nebudou v čase nezávislé  $\rightarrow \alpha_t$  a  $\alpha_{t-1}$  nebudou vzájemně nezávislé.
- Nejsme schopni najednou generovat výběry pro  $\alpha_t \rightarrow$  přímá implementace Gibbsova vzorkovače by zahrnovala výběry z  $T$ -rozměrného normálního rozdělení.
- De Jong a Shephard (1995): efektivní metoda Gibbsova vzorkovače pro tuto třídu modelů.

# Postup

- V případě známého  $\alpha_t$  pro  $t = 1, \dots, T \rightarrow$  normální lineární regresní model:

$$y_t^* = X_t \beta + \epsilon_t,$$

kde  $y_t^* = y_t - Z_t \alpha_t$ .

- Gibbsův vzorkovač s obohacenými daty (*data augmentation*).
- Zavedení nepozorovaných dat či latentních proměnných (resp. latentních dat).
- Gibbsův vzorkovač v závislosti na  $p(\beta, h|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$  bude mít známou podobu.
- Pokud známé  $\alpha_t$  pro  $i = 1, \dots, T \rightarrow$  stavové rovnice jako varianta SUR modelu a  $p(H|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$  má známou formu.
- Příklad  $T_t$  s neznámými parametry:  $p(H, T_1, \dots, T_t|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T) \rightarrow$  „v čase neměnném“ ( $T_1 = \dots = T_t$ ):  $p(H, T_1, \dots, T_t|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$  podoba SUR modelu.

# Apriorní hustoty

- Gibbsův vzorkovač, pokud umíme výběry z  $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H)$ .
- $\beta$  a  $h$  s nezávislou normální-gama apriorní hustotou, matice  $H$  má Wishartovu apriorní hustotu a  $\alpha_1, \dots, \alpha_T$  apriorní hustotu implikovanou stavovou rovnicí:

$$p(\beta, h, H, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = p(\beta)p(h)p(H)p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | H),$$

kde

$$p(\beta) = f_N(\beta | \underline{\beta}, \underline{V}),$$

$$p(h) = f_G(h | \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}),$$

$$p(H) = f_W(H | \underline{\nu}_H, \underline{H}).$$



# Hierarchická apriorní hustota stavů

- Pro  $t = 0, 1, \dots, T$ ) a za předpokladu  $\alpha_0 = 0$ :

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | H) = p(\alpha_1 | H) p(\alpha_2 | \alpha_1, H) \dots p(\alpha_T | \alpha_{T-1}, H),$$

kde pro  $t = 1, \dots, T - 1$

$$p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, H) = f_N(\alpha_{t+1} | T_t \alpha_t, H)$$

a

$$p(\alpha_1) = f_N(\alpha_1 | 0, H).$$

- $H$  má podobnou roli jako  $\eta$  v local level modelu (matice  $p \times p \Rightarrow$  nevhodné použít empirických bayesovských metod.)

## Posteriorní hustota pro $\beta$ a $h$

- Z předchozích kapitol:

$$\beta | y, h, \alpha_1, \dots, \alpha_T \sim N(\bar{\beta}, \bar{V})$$

$$h | y, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_T \sim G(\bar{s}^{-2}, \bar{\nu}),$$

kde

$$\bar{V} = \left( \underline{V}^{-1} + h \sum_{t=1}^T X_t' X_t \right)^{-1},$$

$$\bar{\beta} = \bar{V} \left( \underline{V}^{-1} \underline{\beta} + h \sum_{t=1}^T X_t' (y_t - Z_t \alpha_t) \right),$$

$$\bar{\nu} = T + \underline{\nu},$$

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - X_t \beta - Z_t \alpha_t)^2 + \underline{\nu} s^2}{\bar{\nu}}.$$

# Posteriorní hustota pro $H$

- Z analýzy SUR modelu:

$$H|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T \sim W(\bar{\nu}_H, \bar{H}),$$

kde

$$\bar{\nu}_H = T + \underline{\nu}_H,$$

$$\bar{H} = \left[ \underline{H}^{-1} + \sum_{t=0}^{T-1} (\alpha_{t+1} - T_t \alpha_t)(\alpha_{t+1} - T_t \alpha_t)' \right]^{-1}.$$

- Pro úplnost Gibbsova vzorkovače:  $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H)$  a způsob generování výběrů.
- Lze jako vícerozměrné normální rozdělení  $\times$   $T$ -rozměrné rozdělení a vysoce korelované prvky.
- Efektivní způsob generování náhodných výběrů: Carter a Kohn (1994) a DeJong a Shephard (1995).

## DeJong a Shephard – značení

- Podoba stavového modelu:

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + G_t\nu_t,$$

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + J_t\nu_t.$$

pro  $t = 1, \dots, T$  resp.  $t = 0, \dots, T$  a  $\alpha_0 = 0$ .

- Náhodná složka  $\nu_t$  je i.i.d.  $N(0, h^{-1}I_{p+1})$ ; ostatní stejné.
- Ekvivalence s původní formulací pro:  $\nu_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \end{pmatrix}$ .
- $G_t$  řádkový vektor rozměru  $(p+1)$ :  $G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .
- $J_t$  rozměru  $p \times (p+1)$ :  $J_t = \begin{bmatrix} 0_p & A \end{bmatrix}$ , kde  $A$  je matice  $p \times p$  implicitně definována vztahem

$$H^{-1} = \frac{1}{h}AA'.$$

# DeJong a Shephard – princip

- Simulační vyhlazovač.
- Podmíněné posteriorní hustoty  $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H) \rightarrow$  neznámé jen  $\alpha_t$  a  $\nu_t$ .
- Příspěvek DeJonga a Shepharda: návrh efektivního algoritmu pro výběry  $\eta_t = F_t \nu_t$  pro různé volby  $F_t$ .
- Výběry z  $\eta_t$  lze transformovat do výběrů z  $\alpha_t$ .
- Možné arbitrární  $F_t$ , obvyklá volba  $F_t = J_t \Rightarrow$  výběry chyb stavové rovnice, které lze přímo transformovat do požadovaných výběrů z  $\alpha_t$ .

# Filtrace

- Nastavení  $a_1 = 0$ ,  $P_1 = J_0 J_0'$  a výpočet následujících veličin pro  $t = 1, \dots, T$  (běh Kalmanova filtru):

$$e_t = y_t - X_t \beta - Z_t \alpha_t$$

$$D_t = Z_t P_t Z_t' + G_t G_t'$$

$$K_t = (T_t P_t Z_t' + J_t G_t') D_t^{-1}$$

$$a_{t+1} = T_t a_t + K_t e_t$$

$$P_{t+1} = T_t P_t (T_t - K_t Z_t)' + J_t (J_t - K_t G_t)'$$

- Uložení  $e_t$ ,  $D_t$  a  $K_t$ .

# Smoothing

- Výpočet nové sady veličin v obrácené časové posloupnosti (tj.  $t = T, T - 1, \dots, 1$ ).
- Nastavení  $r_T = 0$  a  $U_T = 0$  a výpočet

$$C_t = F_t(I - G_t'D_t^{-1}G_t - [J_t - K_tG_t]'U_t[J_t - K_tG_t])F_t'$$

$$\xi_t \sim N(0, h^{-1}C_t)$$

$$V_t = F_t(G_t'D_t^{-1}Z_t + [J_t - K_tG_t]'U_t[T_t - K_tZ_t])$$

$$r_{t-1} = Z_t'D_t^{-1}e_t + (T_t - K_tZ_t)'r_t - V_t'C_t^{-1}\xi_t$$

$$U_{t-1} = Z_t'D_t^{-1}Z_t + (T_t - K_tZ_t)'U_t(T_t - K_tZ_t) + V_t'C_t^{-1}V_t$$

$$\eta_t = F_t(G_t'D_t^{-1}e_t + [J_t - K_tG_t]'r_t) + \xi_t$$

kde  $G_0 = 0$ .

# Výsledek

- Získáme  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_T)'$  a lze dokázat, že se jedná o náhodný výběr z  $p(\eta|y, \beta, h, H)$ .
- Podle podoby  $F_t$  lze tento výběr transformovat na náhodný výběr  $\alpha_t$  pro  $t = 1, \dots, T$ .
- Při  $F_t = J_t \rightarrow$  výběry náhodných chyb ve stavové rovnici (tj.  $\eta_t = J_t \nu_t$ )  $\rightarrow$  transformace na výběry z  $\alpha_t$  za využití stavové rovnice a skutečnosti  $\alpha_0 = 0$ .
- Jednoduché počítačové zpracování (matice nízkých rozměrů a náhodný výběr z normálního rozdělení pro získání  $\xi_t$ ).
- Umíme sekvenční výběry z podmíněných hustot  $\rightarrow$  standardní posteriorní analýza.



# Obsah tématu

- 1 Local level model
  - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
  - Posteriorní hustota
  - Empirické bayesovské metody
  - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
  - Bayesovský výpočet
  - Empirická ilustrace

# Příklad

- Viz Koop (2003).