MPE_VPAM: Příklady k 6. cvičení

Matematické

1. Získejte parciální derivace funkce $y = x_1^2 x_2$. Při výpočtu využijte definici parciální derivace.

2. Najděte a interpretujte parciální derivace produkční funkce $y = 10x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Graficky znázorněte sklon parciální derivace $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ v bodech $[x_1, x_2] = [25, 4]$ a $[x_1, x_2] = [25, 9]$.

3. Najděte a interpretujte mezní produkt Cobb-Douglasovy produkční funkce se dvěma vstupy:
$$y = f(K, L) = AK^\alpha L^\beta \quad A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1$$
kde A, α a β jsou parametry.

4. Najděte a interpretujte mezní produkt Cobb-Douglasovy produkční funkce se třemi vstupy:
$$y = Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \quad A > 0, 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$
kde A, α, β a γ jsou parametry.

5. Najděte mezní produkt CES produkční funkce. Jaká je hodnota elasticity substituce?
$$y = 12\left[0,4x_1^{-\frac{1}{2}} + 0,6x_2^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}$$

6. Ukažte, jak lze z CES produkční funkce $y = \gamma\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{\frac{k}{-\rho}}$ získat:
   - Leontiefovu produkční funkci
   - Cobb-Douglasovu produkční funkci

7. Nalezněte gradient funkce $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$.

8. Nalezněte gradient a Hessovu matici pro funkci $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. Na tomto příkladu demonstrujte platnost Youngova teorému.

9. Najděte a interpretujte Hessovu matici Cobb-Douglasovy produkční funkce se dvěma vstupy:
$$y = Ax_1^\alpha x_2^\beta \quad A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1$$
kde A, α, β jsou parametry.

10. Rozhodněte o konvexnosti/konkávnosti následujících funkcí:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 - 3x_1 - 8x_2 \quad \mathbf{x} \in \mathrm{R}^2$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{R}^2_{++}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^{\frac{1}{2}} (x_2)^{\frac{1}{3}} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{R}^2_{++}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha + x_2^\beta + x_3^\gamma \quad \mathbf{x} \in \mathrm{R}^3_{++}$$

11. Rozhodněte, zda mohou být následující funkce definované na R^2_{++} konvexní/konkávní či kvazikonvexní/kvazikonkávní.

    (a) $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$
    (b) $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$
    (c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$
    (d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
    (e) $f(x_1, x_2) = 3x_1^4 + 5x_2^2$
    (f) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 x_2^3$

12. Ukažte, že je produkční funkce $y = f(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{2}{3}} \quad 0 < \alpha, \beta < 1$ homogenní se stupněm homogenity $\frac{7}{6}$.

13. Ukažte, že je produkční funkce $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ homogenní se stupněm homogenity $\alpha + \beta + \gamma$.

14. Určete stupeň homogenity CES produkční funkce $y = \gamma \left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{\frac{1}{-\rho}}$. Ukažte že pro tuto funkci platí eulerův teorém $f_1 x_1 + f_2 x_2 = f(x_1.x_2)$.