MPE_VPAM: Zadání 1. + 2. úkolu

1. Pro následující funkci $f(x)$ vyšetřete: Definiční obor, sudost/lichost, ohraničenost, monotónnost a vykreslete graf funkce.

SK A: $f(x) = 2 + tg(5x - 2)$

SK B: $f(x) = 2 - arctg(x - 2)$

SK C: $f(x) = 1 + arctg(3x - 4)$

2. Určete rozklad na parciální zlomky pro racionální lomenou funkci R

SK A: $R(x) = \frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}$

SK B: $R(x) = \frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2}$

SK C: $R(x) = \frac{x^4-x^3+3x^2-x+1}{x^5+2x^3+x}$

3. Vypočtěte derivace funkcí $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$

SK A: $f(x) = (2x^2 + 4x + 9)e^{-x}$, $g(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$, $h(x) = \sin 3x^2$

SK B: $f(x) = (x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1)e^{2x}$, $g(x) = \frac{x^6+1}{x^3}$, $h(x) = \cos 3x^2$

SK C: $f(x) = (x^4 - x^3 + 2x^2)e^{-2x}$, $g(x) = \frac{x^4+1}{x}$, $h(x) = \sin^3 x^2$

4. Vypočtěte limity:

SK A: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right) \ln x$

SK B: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, $\lim\limits_{x\to 0} \left(cotgx - \frac{1}{x}\right)$

SK C: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+16}-4}$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-10x+16}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

5. Vyšetřete průběh funkce:

SK A: $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

SK B: $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$

SK C: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

6. Vypočtěte neurčité a určité integrály:

SK A: $\int 5x^3 - 3x^5 dx$, $\int e^x * \sin x dx$, $\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2+1}$

SK B: $\int 3x^5 - 5x^3 dx$, $\int e^x * \cos x dx$, $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}$

SK C: $\int 5x^{-3} - 3x^5 dx$, $\int e^x * \sin x dx$, $\int_0^1 x(2x^2 - 1)^{-10}$

7. (Všechny skupiny) Log-linearizujte produkční funkci: $y = a_t l_t^{1-\alpha}$ okolo steady statových hodnot, víte-li že hodnoty steady statu značíme * tzn $x_0 = x^*$

8. (Všechny skupiny) Uvažme výstup y, který je získán zpracováním jediného vstupu x. Ukažte, že pokud máme produkční funkci $y = x^{1/3}$, $x > 0$, pak je nákladová funkce $C(y)$ konvexní když je produkční funkce konkávní. Hint: produkční náklady $C(x) = c_0 + rx$, kde r značí náklady za jednotku vstupu a c_0 fixní náklady.

9. (Všechny skupiny) V továrně na absolutno" pracuje na výrobní lince pan K. ve 12-hodinových směnách. Za první hodinu vyrobí 25 kusů zboží a za druhou hodinu 45 kusů. Pomocí vhodné diferenciální rovnice určete jeho maximální produkci za hodinu, pokud víte, že rychlost jeho produktivity je přímo úměrná rozdílu mezi maximem a tím, kolik v čase t vyrobí. Poté využijte tuto hodnotu maxima a změňte rovnici tak, že do ní zakomponujete faktor únavy $u(t) = t^2/4$. Tento faktor únavy modeluje situaci, kdy produkce pracovníka klesá v důsledku délky pracovní doby. Jak se liší počet výrobků v 6. a 12. hodině směny? A ve kterém čase je jeho hodinová produkce na nejvyšší úrovni?

10. Log-linearizujte ekonomické rovnice okolo steady statových hodnot, víte-li že hodnoty steady statu značíme * tzn $x_0 = x^*$:

SK A: Produkční funkce: $y = a_t l_t^{1-\alpha}$
SK B: Produkční funkce: $y = a_t k_t^{\alpha}$
SK C: Produkční funkce: $y = a_t l_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha}$

11. Vyřešte soustavu maticových rovnic. Nalezněte matice X a Y

SK A: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$
$Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

SK B: $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$
$Y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

SK C: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

12. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic a následně pomocí Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

SK A:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 4u &= 3 \\ -2x + 3y + 4z + u &= 3 \\ 3x - 1y - 2z + 2u &= 8 \\ 5x + 3y + 3z + u &= 22 \end{aligned}$$

SK B:

$$
\begin{aligned}
2x + y + 3z &= 6 \\
3x - 2y + z &= 2 \\
x + 2y + 13z &= 26 \\
4x + 0y + 14z &= 28
\end{aligned}
$$

SK C:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z + u &= 0 \\
x + 4y - 2z + u &= 0 \\
3x + 7y + z + u &= 0 \\
6x + 4y + 2z + 2u &= 0
\end{aligned}
$$

13. Najděte vlastní čísla matice A a pro největší vlastní číslo určete vlastní vektor. Určete determinant a stopu matice.

SK A: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

SK B: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

SK C: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

14. Určete definitnost matice A

SK A: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

SK B: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

SK C: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

15. (Všechny skupiny) Proveďte choleskyho dekompozici matice A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$$