MPE_VPAM: Zadání 3. úkolu - 10 bodů

1. Najděte a interpretujte mezní produkty Cobb-Douglasovy produkční funkce s n vstupy:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad A > 0, 0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < 1$$

kde A, α_1, α_2, $\ldots$, α_n jsou parametry.

2. Najděte mezní produkt CES produkční funkce. Jaká je hodnota elasticity substituce?

$$y = A\left[\delta x_1^{-r} + (1-\delta)x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}}$$

3. Ukažte, jak lze z CES produkční funkce $y = \gamma\left[aK^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{\frac{k}{-\rho}}$ vhodnými úpravami získat

   (a) Cobb-Douglasovu produkční funkci.

   (b) produkční funkci, kde vstupy jsou dokonalými komplementy.

   (c) produkční funkci, kde vstupy jsou dokonalými substituty.

4. Najděte gradient a Hessovu matici funkce $f(x_1, x_2, x_3)$. Na tomto příkladu demonstrujte platnost Youngova teorému.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{3x_2 + x_1 x_3} + \frac{2x_2^3}{x_1}$$

5. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou konvexní/konkávní/ani jedno:

   - $f(x, y) = -3x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 4y + 1$
   - $f(x, y) = x^a y^b, \quad a, b > 0$
   - $f(x, y, z) = 3e^x + 5y^2 - ln(z)$

6. Mějme zadánu funkci

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^a x_2^b x_3^c, \text{ kde } 0 < a, b, c < 1, a + b + c = 1, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^3_{++}.$$

   (a) Sestavte gradient funkce f.

   (b) Rozhodněte (pomocí výpočtu) o konvexnosti/konkávnosti a kvazikonvexnosti/kvazikonkávnosti funkce f.

   (c) Určete stupeň homogenity funkce f.

   (d) Ukažte, že pro tuto funkci platí Eulerův teorém

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$$

.