11. seminář:

Nelineární optimalizace s omezením ve tvaru rovnosti i nerovností (Lagrangeovy multiplikátory, KKT podmínky)

Příklad 1: Uvažujte optimalizační problém firmy, která má k dispozici dva výrobní faktory (F_1, F_2) s jednotkovými cenami $w_1 = 2$ Kč a $w_2 = 3$ Kč a rozhoduje se, jak s pomocí těchto výrobních faktorů co nejlevněji vyrobit požadované množství produktu $Q = 10$. Vyprodukované množství produktu se řídí Cobb-Douglasovou produkční funkcí s exponenty $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ pro množství výrobních faktorů F_1 a F_2.

a) zapište matematický model úlohy

b) řešte jako jednorozměrnou úlohu bez omezení

c) řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů, ověřte i podmínky 2. řádu

Příklad 2: Úloha o rozdělení spotřeby v čase:

Předpokládejme, že chceme maximalizovat užitek ze spotřeby během dvou období, ve kterých máme příjmy I_1 a I_2, přičemž nespotřebované prostředky z prvního období můžeme zúročit s úrokovou mírou r. Užitková funkce se předpokládá ve tvaru $U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta \cdot u(C_2)$, kde $\beta \in (0, 1)$ je koeficient vyjadřující subjektivní preferenci současné spotřeby před spotřebou budoucí.

a) Sestavte Lagrangeovu funkci a zapište podmínky prvního řádu, jako proměnné přitom uvažujte C_1, C_2, S_1 a jako omezující podmínky rozpočtová omezení v jednotlivých obdobích.

b) Najděte řešení podmínek, předpokládáme-li užitkovou funkci ve tvaru

$$u(C) = lnC$$

Příklad 3: Vyřešte úkoly 1,2 a 3 ze soutěžního příkladu MUESu, jehož kompletní zadání i s řešením naleznete v učebních materiálech ISu: soubor soutěž.pdf (použito s laskavým soulasem M. Kvasničky)

a) Předpokládejme, že Milton Friedman vlastní domeček, kde bydlí. V domečku má samozřejme i vodovod, takže spotřebovává vodu (na pití, mytí, do bazénu apod.) a ostatní statky. Friedman má roční příjem M dolarů. Dále víme, že jeho preference je možné popsat indiferenční křivkou

$$U = \sqrt{W} + \sqrt{C}$$

kde W je jeho spotřeba vody ve vhodných jednotkách, C je jeho spotřeba ostatních statků (opět ve vhodných jednotkách) a U je číslo indiferenční křivky, kterou mu daný spotřební koš zajistí. Předpokládejme dále, že jednotky, ve kterých je počítána voda i ostatní statky, jsou zvoleny tak vhodně, že cena jednotky vody i jednotky ostatních statků je právě 1 dolar. Zjistěte, kolik vody a kolik ostatních statku bude Milton Friedman spotřebovávat.

b) Po nějaké době bylo Friedmanovi v jeho domě smutno. Proto pozval další dva ekonomy, aby bydleli s ním. (Jména těchto pánů byla Keynes a Marx.) Domeček měl však pouze jeden vodoměr. Protože pánové byli tři, rozdělili vždy poplatky za vodu rovným dílem. Předpokládejme, že Keynes s Marxem spotřebují každý konstantní množství vody – právě tolik vody, kolik spotřebovával Friedman, dokud bydlel v domečku sám (protože Friedman je bezesporu racionální, spotřebovával právě optimální množství vody). Kolik bude za těchto okolností spotřebovávat Milton Friedman vody a kolik ostatních statků?

c) V minulém případě jsem vám ovšem trošku lhal: Keynes s Marxem samozřejmě nespotřebovávají konstantní množství vody. I oni jsou celkem racionální (aspoň když se starají o vlastní užitek), a tak kupují takové množství vody a ostatních statků, aby maximalizovali svůj užitek (jsou to ekonomové!). Každý z nich má stejné preference a příjem jako Friedman. Kolik tedy bude (v rovnováze) spotřebovávat každý z ekonomů vody a kolik ostatních statků, jestliže si budou dělit náklady na vodu rovným dílem?

Příklad 4: Je třeba připravit plán výroby pro výrobní linku, na které je možno vyrábět pět typů výrobků, přitom je třeba dodržet následující podmínky:

- Výrobní náklady nesmějí přesáhnout 1090 Kč.
- Výrobek pátého typu je používán pro kompletaci všech ostatních typů výrobků a alespoň 10 kusů je ho potřeba vyrobit navíc jako náhradní díly.
- Výrobků druhého typu je potřeba vyrobit o 4 kusy více než výrobků čtvrtého typu.
- Tržby za prodané výrobky závisejí na prodaném množství, při větším prodeji mohou být jednotkové tržby nižší podle funkcí uvedených v následující tabulce.

množství výrobků typu 1-5	V1	V2	V3	V4	V5
jednotkové výrobní náklady	5	5	6	5	2
tržby	57-0,03.V1	82-0,05.V2	84-0,05.V3	62-0,04.V4	12

Kolik výrobků jednotlivých typů by měla výrobní linka v následujícím období vyrobit, aby bylo dosaženo maximálních tržeb?

a) Sestavte matematický model problému

b) Sestavte Lagrangeovu funkci

c) Sestavte Kuhn-Tuckerovy podmínky

d) Najděte řešení problému pomocí MS Excelu