Technický apendix k Makroekonomii I

Jan Čapek

9. března 2011

Logaritmická aproximace tempa růstu a její užití

Abstrakt

Tato část ukazuje, jak můžeme použít (přirozený) logaritmus k přibližnému spočítání tempa růstu, jaká je chyba této aproximace a na příkladu inflace deflátoru srovnává postupy výpočtů, které vedou k přesným výsledkům, resp. k přibližným (aproximovaným) výsledkům.

Při nízkých tempech růstu (obvykle do cca 15%) řady můžeme používat aproximaci

$$x_t - 1 \approx \log x_t, \tag{1}$$

v tomto případě užití je x_t koeficient růstu řady v čase t. Tempo růstu řady je pak $x_t - 1$. Přesnost logaritmické aproximace lze ukázat na velmi nízkých hodnotách růstu (1%) a na tempech růstu, kde je již chyba aproximace více než procentní bod (15%):

$$1.01 - 1 = 0.01 = 1\% \approx \log 1.01 = 0.00995 = 1\%$$
$$1.15 - 1 = 0.15 = 15\% \approx \log 1.15 = 0.13976 = 14\%$$

K ukázce užití můžeme využít výpočtu implicitního cenového deflátoru IPD:

$$IPD_t = \frac{GDP_t^N}{GDP_t^R} \tag{2}$$

Posunutím v čase můžeme přepsat rovnici (2) z času t i pro čas $t-1$ a vydělit jím (2):

$$\Pi_t^{IPD} + 1 = \frac{IPD_t}{IPD_{t-1}} = \frac{\frac{GDP_t^N}{GDP_{t-1}^N}}{\frac{GDP_t^R}{GDP_{t-1}^R}},$$

z čehož plyne že inflace deflátoru je rovna podílu koeficientu růstu nominálního a reálného HDP (minus 1 pro přechod mezi koeficientem růstu a tempem růstu).

Využití vzorce (1) pro výpočet inflace (tedy tempa růstu) deflátoru můžeme demonstrovat následovně:

$$\frac{IPD_t}{IPD_{t-1}} - 1 \approx \log \frac{IPD_t}{IPD_{t-1}} = ipd_t - ipd_{t-1},$$

kde je využito značení logaritmovaných veličin malými písmeny, tj. např. $\log IPD_t = ipd_t$.

Po zlogaritmování (2) vyjde

$$ipd_t = gdp_t^N - gdp_t^R. \tag{3}$$

Opět můžeme použít posunutí v čase a získat tak analogii k (3) pro čas $t-1$ a příslušnou rovnici tentokráte odečíst od (3). Pokud použijeme ke značení první diference (tj. rozdílu sousedních členů) znak Δ kdy např. $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$, pak můžeme psát

$$\Pi_t^{IPD} = \Delta ipd_t = \Delta gdp_t^N - \Delta gdp_t^R,$$

z čehož tentokrát plyne, že inflace deflátoru je (přibližně) rovna rozdílu tempa růstu nominálního a reálného HDP.

Některé důsledky Cobb-Douglasovy produkční funkce

Abstrakt

Cílem této části je ukázat, proč u Cobb-Douglasovy produkční funkce s konstantními výnosy z rozsahu platí, že koeficienty, na které jsou umocněny vstupy – tj. α pro pracovní vstup a $1-\alpha$ pro kapitálový vstup – jsou zároveň poměry odměn těchto výrobních faktorů na celkovém důchodu.

Mějme Cobb-Douglasovu funkci dvou proměnných tvaru

$$Y_t = f(L_t, K_t) = A_t L_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha}, \tag{4}$$

kdy země může volit množství práce L a kapitálu K za dané technologiee A. Tato funkce vykazuje konstantní výnosy z rozsahu což jde snadno ukázat vynásobením vstupů koeficientem β:

$$\begin{aligned} A_t(\beta L_t)^{\alpha}(\beta K_t)^{1-\alpha} &= \beta^{\alpha+1-\alpha} A_t L_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} \\ &= \beta^1 f(L_t, K_t) \end{aligned}$$

Odvození konstantních výnosů z rozsahu je intuitivní: β-násobné zvýšení všech vstupů vede k β-násobnému nárůstu produkce.

Za předpokadu dokonalé konkurence je mezní produkt kapitálu MPK zaplacen úrokem r a mezní produkt práce MPL mzdou w. Mezní produkt práce můžeme spočítat jako parciální derivaci produkční funkce $f(L_t, K_t)$ podle kapitálu:

$$\begin{aligned} r_t = MPK_t = \frac{\partial f}{\partial K_t} &= (1-\alpha) A_t L_t^{\alpha} K_t^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha)\frac{Y_t}{K_t} \end{aligned}$$

Vynásobením poslední rovnice členem K_t získáme výraz pro celkovou hodnotu vyplacených úroků $r_t K_t$:

$$r_t K_t = (1-\alpha) Y_t \tag{5}$$

Analogicky postupujeme v případě výrobního faktoru práce:

$$\begin{aligned} w_t = MPL_t = \frac{\partial f}{\partial L_t} &= \alpha A_t L_t^{\alpha-1} K_t^{1-\alpha} \\ &= \alpha \frac{Y_t}{L_t}. \end{aligned}$$

Opět, vynásobením poslední rovnice L_t získáme celkovou hodnotu vyplacených mezd:

$$w_t L_t = \alpha Y_t \tag{6}$$

Sečtením rovnic (5) a (6) získáme

$$r_t K_t + w_t L_t = Y_t,$$

tj. součet úroků a mezd se právě rovná úrovni výstupu. Pokud tedy vydělíme rovnice (5) a (6) úrovní výstupu Y_t, získáme poměry všech úroků a mezd na celkovém důchodu:

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = 1-\alpha \qquad \frac{w_t L_t}{Y_t} = \alpha,$$

tj. $1-\alpha$ je podíl úroků na celkovém důchodu a α je podíl mezd na celkovém důchodu.