Kapitola 1

Diferenciální počet v R

Řešené příklady

Maximalizace zisku[1]

Typickým ekonomickým problémem, který můžeme řešit s využitím diferenciálního počtu, je maximalizace zisku. Zisk π je definován jako rozdíl celkových příjmů a celkových nákladů, což můžeme zapsat jako

$$\pi = TR(Q) - TC(Q) = Q \cdot D(Q) - FC - Q \cdot VC,$$

kde Q značí prodané množství, D(Q) poptávku po zboží firmy, FC fixní náklady a VC náklady variabilní. Ve speciálním případě dokonalé konkurence, ve které je cena pevně daná, můžeme zisk zapsat ve tvaru

$$\pi = TR(Q) - TC(Q) = Q \cdot P - FC - Q \cdot VC.$$

Body, ve kterých dochází k vyrovnání celkových příjmů a celkových nákladů (a tedy $\pi = 0$), se nazývají **body zvratu** či **body vyrovnání**. Při hledání množství, které maximalizuje zisk firmy, můžeme využít standardní hledání extrémů dané funkce či tzv. princip maximalizace zisku. Tento princip říká, že v bodě, ve kterém je zisk maximální, platí rovnost mezních nákladů a mezních příjmů, tj.

$$Q^* \text{ takové, že maximalizuje } \pi \implies MR(Q^*) = MC(Q^*).$$

Jestliže má rovnice $MR(Q) = MC(Q)$ jediné řešení, pak jde o maximum a tento výsledek již nemusíme ověřovat.

V rámci dokonale konkurenčních trhů pak s využitím $D(Q) = P$ můžeme celkový příjem zapsat ve tvaru $TR = P \cdot Q$, a tedy derivací TR podle množství získáme

$$MR(Q) = MC(Q) = P.$$

Výrobce na dokonale konkurenčním trhu tedy při maximalizaci zisku musí zvolit takové množství, aby se mezní náklady rovnaly pevně dané tržní ceně. Jestliže se v úloze setkáme s více řešeními rovnice $MC(Q) = P$, musíme o množství, které maximalizuje zisk, rozhodnout s využitím znaménka druhé derivace zisku.

Hledání množství, při kterém firma maximalizuje zisk, si nyní ukážeme na konkrétním příkladu.

Zadání: V továrně na výrobu kalkulaček zjistili, že mohou funkci celkových příjmů vyjádřit jako $TR(Q) = 9Q$, kde Q je počet kalkulaček (v tisících) vyrobených za hodinu. Funkce celkových nákladů je ve tvaru $TC(Q) =$

[1] Příklad vychází z Mezník (2011).

$Q^3 - 6Q^2 + 18Q$. Jaký počet kalkulaček maximalizuje zisk továrny?

Řešení: Z tvaru funkce celkových příjmů vidíme, že se jedná o firmu na dokonale konkurenčním trhu, neboť její příjem lze zapsat jako $TR = P \cdot Q$, kde nyní $P = 9$. Zisk, který chce firma maximalizovat, můžeme zapsat ve tvaru

$$\pi = TR(Q) - TC(Q) = 9Q - (Q^3 - 6Q^2 + 18Q) = -Q^3 + 6Q^2 - 9Q.$$

Maximum zisku získáme první derivací ziskové funkce a jejím položením rovným 0, tj.

$$\pi' = -3Q^2 + 12Q - 9 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny, a to $Q_1 = 1$ a $Q_2 = 3$. Nyní můžeme postupovat různě. To, jaké množství odpovídá maximalizaci zisku, můžeme ověřit určením znaménka druhé derivace. Druhá derivace ziskové funkce je

$$\pi'' = -6Q + 12,$$

v bodě $Q_1 = 1$ je hodnota kladná, naopak v bodě $Q_2 = 3$ je její hodnota záporná. Bod Q_2 je tedy hledaným maximem.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i následující úvahou. Víme, že zisková funkce má dva stacionární body. Rozdělme si tedy definiční obor na 3 intervaly a prozkoumejme, zda je funkce v daných intervalech rostoucí či klesající. Výsledky můžeme zaznamenat do tabulky:

Q	(0,1)	(1,3)	$(3, \infty)$
sign π'	$-$	$+$	$-$
π	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Výroba záporného množství zboží nedává smysl, definiční obor je z toho důvodu ohraničen nulou. Z tabulky můžeme vidět, že zisková funkce je rostoucí až do bodu $Q = 3$, ve kterém dosahuje svého maxima.

Posledním ze způsobů je využití principu maximalizace zisku popsaného výše. Mezní příjmy jsou ve tvaru $MR = 9$, mezní náklady pak $MC = 3Q^2 - 12Q + 18$. Vyrovnáním těchto dvou výrazů dostaneme kvadratickou rovnici vyřešenou výše.

Výrobce bude tedy vyrábět 3 000 kalkulaček. Jeho zisk je v tomto případě

$$\pi(Q = 3) = -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = 0.$$

Tento výsledek odpovídá očekávání, neboť na dokonale konkurenčních trzích je v dlouhém období zisk výrobců vždy nulový.

Maximalizaci zisku si ukážeme ještě na jednom příkladu, tentokrát na monopolním trhu.

Zadání: Firma řeší problém stanovení cen pro malé a velké odběratele za účelem maximalizace zisku. Poptávka maloodběratelů je $P_1 = 500 - Q_1$, poptávka velkoodběratelů je $P_2 = 300 - 2Q_2$. Celkové náklady firmy jsou $TC(Q) = 50\,000 + 20\,Q$, kde $Q = Q_1 + Q_2$. Stanovte ceny, při kterých firma maximalizuje zisk, a to jak v případě dokonalé cenové diskriminace, tak bez ní. Tyto výsledky pak porovnejte.

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladu si nejprve sestavíme ziskovou funkci v případě dokonalé cenové diskriminace. Příjem na maloobchodním trhu můžeme zapsat jako $TR_1 = (500 - Q_1)Q_1$, na velkoobchodním pak obdobně, tj. $TR_2 = (300 - 2Q_2)Q_2$. Zisková funkce firmy je tedy ve tvaru

$$\pi = (500 - Q_1)Q_1 + (300 - 2Q_2)Q_2 - (50\,000 + 20(Q_1 + Q_2)) = 480Q_1 - Q_1^2 + 280Q_2 - 2Q_2^2 - 50\,000,$$

kde Q_1 a Q_2 značí postupně množství prodaná maloodběratelům a velkoodběratelům. Tento problém můžeme vyřešit jako dva oddělené problémy, neboť monopol vlastně řeší dvě oddělené maximalizace zisku. K řešení této úlohy tedy můžeme opět využít princip maximalizace zisku. Mezní příjmy, které monopolista získá na maloobchodním a velkoobchodním trhu jsou postupně

$$MR_1 = 500 - 2Q_1, \qquad MR_2 = 300 - 4Q_2.$$

Mezní náklady jsou na obou trzích rovny $MC_1 = MC_2 = 20$. Množství, která na jednotlivých trzích maximalizují zisk, pak najdeme vyřešením soustavy

$$500 - 2Q_1 = 20, \qquad 300 - 4Q_2 = 20,$$

ze které získáme $Q_1 = 240$ a $Q_2 = 70$. Hledané ceny na jednotlivých trzích pak dopočítáme z rovnic poptávek, a tedy $P_1 = 500 - 240 = 260$ a $P_2 = 300 - 2 \cdot 70 = 160$. Celkový zisk monopolu v případě cenové diskriminace je tedy roven

$$\pi = 260 \cdot 240 + 160 \cdot 70 - (50\,000 + 20(240 + 70)) = 17\,400.$$

Nyní si sestavíme ziskovou funkci v případě, že monopolista nemůže cenově diskriminovat, což znamená, že jde vlastně o jeden trh s jedinou cenou. Platí tedy rovnost $P_1 = P_2 = P$. Z rovnic poptávek pro jednotlivé trhy pak získáme $P = 500 - Q_1$, a tedy $Q_1 = 500 - P$, obdobně pro trh velkoobchodníků platí $Q_2 = 150 - 0{,}5P$. Celkové poptávané množství je součtem $Q = Q_1 + Q_2 = 650 - 1{,}5P$, celkovou tržní poptávku pak můžeme zapsat jako

$$P = \frac{2}{3}(650 - Q).$$

S využitím těchto znalostí pak sestavíme ziskovou funkci, která je ve tvaru

$$\pi = \frac{2}{3}(650 - Q)Q - (50\,000 + 20Q).$$

Jejím zderivováním podle množství a položením derivace rovné nule získáme

$$\pi' = \frac{2}{3} \cdot 650 - \frac{4}{3}Q - 20 = 0,$$

z čehož jednoduchou úpravou dojdeme k výsledku $Q = 310$. Cenu, za kterou bude monopolista svůj produkt prodávat získáme z výrazu

$$P = \frac{2}{3}(650 - Q) = |\text{ pro } Q = 310| = \frac{680}{3} \doteq 226{,}6.$$

Zisk je v tomto případě roven

$$\pi = \frac{680}{3} \cdot 310 - (50\,000 + 20 \cdot 310) \doteq 14\,066.$$

Můžeme si tedy všimnout, že pro monopolistu je cenová diskriminace výhodná. Cena na trhu bez cenové diskriminace se nachází mezi cenami na diskriminujících trzích a celkové prodané množství se v případě s diskriminací a bez ní neliší.

Solowův model ekonomického růstu a Zlaté pravidlo[2]

Nyní si ukážeme jak lze pomocí Solowova modelu nalézt optimální úroveň úspor a z ní následně plynoucí úroveň spotřeby. Před tím, než začneme hledat řešení, si položme otázku, co je to vůbec ta optimální úroveň

[2] Příklad vychází z Klein (2002).

úspor. První aspekt našeho problému se týká samotného matematicko–ekonomického úhlu pohledu na problém, druhý aspekt můžeme označit jako morální pohled na problém. Dá se tvrdit, že úspory, které dnes vytvoříme, nám (či generacím, které přijdou po nás) v budoucnosti mohou vytvořit vyšší možnost spotřebovávat. Tato mezičasová změna naráží na morální otázku hodnoty spotřeby v aktuální a budoucí generaci spotřebitelů.

Robert Solow při řešení tohoto problému vycházel z publikace s dosud snad největším impaktem - Bible. Bible velmi volně říká následující: „Do unto others as you would have them do unto you". Jinými slovy, pro nás ekonomy - snaž se spotřebu mezi časem rozložit tak, aby byla maximální, skrz všechny generace. A právě maximalizace spotřeby skrz všechny období je ekonomickou částí našeho problému, která nám ve finále pomůže určit optimální výši úspor. Nástrojem pro vyřešení našeho problému bude Solowův model ekonomického růstu, který nabízí rámec pro analyzování dlouhodobých dopadů úspor a spotřeby v uzavřené ekonomice.

Základním stavebním kamenem Solowova modelu je Cobb-Douglasova produkční funkce $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Kde Y značí výstup, K kapitál, L pracovní sílu a $\alpha \in (0,1)$ je podíl kapitálu na produkci. Tato produkční funkce může být prostým vydělením pracovní silou L přepsána do tzv. intenzivní formy $y = k^{\alpha}$, kde $y = \frac{Y}{L}$ značí výstup na pracovníka a $k = \frac{K}{L}$ kapitál na pracovníka. Ostatní proměnné označené malými písmeny v Solowově modelu budou také interpretovány jako "proměnná"na pracovníka. V dalším kroku si zavedeme rozpočtovou identitu. Uvažujme, že to, co si dělník v ekonomice vyprodukuje (y), buď uspoří (s) a nebo spotřebuje (c), proto $y = c + s$. Ze základních kurzů makroekonomie známe jiný druh účetní identity, kterou je $y = c + i$, kde je výstup pracovníka rozložen na spotřebu c a investice i. Jelikož musí být identity splněny, pak pro náš model nutně platí, že jsou úspory rovny investicím, tj. $s = i$.

Investice zvyšují úroveň kapitálu. V ekonomice pozorujeme také postupné opotřebení kapitálu. Tomuto opotřebení se říká depreciace kapitálu, my ho do modelu zavedeme pomocí parametru δ, který bude vyjadřovat míru opotřebení kapitálu v každém roce. Čistá změna kapitálu na hlavu v každém období pak lze označit jako Δk a odpovídá rozdílu mezi zvýšením úrovně kapitálu v daném období (i) a depreciaci kapitálu v daném období (δk), tedy $\Delta k = i - \delta k$.

Poslední z uvažovaných rovnic je vztah, kdy jsou úspory na hlavu rovny parametricky dané procentní části produkce na hlavu, tedy $s = \sigma y$, kde $\sigma \in (0,1)$. Extrémní případy, kdy $\sigma = 0$ nebo $\sigma = 1$, odpovídají situacím, kdy je buď vše spotřebováno a nebo naopak vše uspořeno.

V Solowově modelu předpokládáme, že je dlouhodobá úroveň kapitálu na pracovníka konstantní. Tento předpoklad má několik důležitých implikací pro vyřešení dlouhodobé úrovně spotřeby na pracovníka jako funkce dlouhodobé úrovně kapitálu na pracovníka. Z výše uvedeného vyplývá, že Δk je v dlouhém období nulová. Z tohoto a výše uvedených vztahů dále vyplývá, že $i = \delta k$. Využijeme–li informaci, že se úspory rovnají investicím $i = s$, pak je zřejmé, že v dlouhém období budou úspory rovny opotřebení kapitálu $\delta k = s$. S využitím znalosti o rozdělení produktu mezi spotřebu a úspory a dlouhodobých vztahů jsme schopni získat úroveň spotřeby na hlavu v závislosti na úrovni kapitálu jako $c = y - s = y - i = k^{\alpha} - \delta k$.

Dlouhodobá spotřeba na hlavu bude maximální v místě, kde funkce $c(k) = k^{\alpha} - \delta k$ bude nabývat svého maxima. Pomocí první derivace $\frac{dc}{dk}$ určíme body podezřelé z extrému. V našem případě je první derivace

$$\frac{dc}{dk} = \alpha k^{\alpha-1} - \delta = 0,$$

což platí pro $k = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}$. Pomocí druhé derivace (tj. $\frac{d^2c}{d^2k}$) poté určíme, zda se skutečně jedná o extrém. V našem případě je druhá derivace

$$\frac{d^2c}{d^2k} = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}.$$

Jelikož parametr α nabývá hodnoty mezi nulou a jedničkou, pak víme, že $\alpha(\alpha-1) < 0$ a $k^{\alpha-2} > 0$, z čehož vyplývá, že druhá derivace bude záporná - funkce $c(k)$ je konkávní. Bod podezřelý z extrému je tedy skutečně maximum.

Pravidla versus diskrece monetární politiky[3]

Model ilustrující problém časové nekonzistence monetární politiky zahrnuje dva vztahy. Prvním ze vztahů je Phillipsova křivka, která popisuje negativní vztah mezi nezaměstnaností (u) a rozdílem mezi aktuální inflací (π) a očekávanou inflací (π^e). Phillipsova křivka je dána vztahem

$$u = \bar{u} - \alpha(\pi - \pi^e),$$

kde $\bar{u}$ značí přirozenou míru nezaměstnanosti a α je kladný parametr. Poznamenejme, že inflace může ovlivnit míru nezaměstnanosti pouze v případě, že je neočekávaná ($\pi \neq \pi^e$). Druhým vztahem bude ztrátová funkce L vyjadřující preference centrální banky mít nízkou nezaměstnanost a zároveň nízkou inflaci. Centrální banka se tedy bude snažit ztrátovou funkci minimalizovat. Ztrátová funkce může být ve tvaru

$$L = u + \beta\pi^2.$$

Substitucí Phillipsovy křivky do ztrátové funkce vyjádříme ztrátovou funkci L jako funkci inflace, očekávané inflace a přirozené míry nezaměstnanosti

$$L = \bar{u} - \alpha(\pi - \pi^e) + \beta\pi^2,$$

kde parametr β představuje relativní zájem centrální banky o výši inflace. Předpokladem takto stanoveného modelu je myšlenka, že jako první nastavuje svá očekávání ohledně inflace veřejnost, a poté nastupuje centrální banka, která zvolí skutečnou míru inflace. Míra nezaměstnanosti je potom dána součtem přirozené míry nezaměstnanosti a váženého rozdílu skutečné a očekávané inflace. Zde se nabízí možnost modelování pravidla nebo diskrece.

Klíčovou roli zde hraje očekávání inflace od veřejnosti. Pokud jsou očekávání nastavená na nulu, tzn. $\pi^e = 0$, a centrální banka sleduje politiku pravidel a nastavuje skutečnou inflaci na nulu, tzn. $\pi = 0$, pak bude ztrátová funkce vždy rovna přirozené míře nezaměstnanosti. Hovoříme o situaci, kdy $\pi = \pi^e = 0$ a $u = \bar{u}$, a tedy

$$L = \bar{u} - \alpha(0 - 0) + \beta \cdot 0^2 = \bar{u}.$$

Při diskrečním chování centrální banky veřejnost věří, že se centrální banka bude snažit vždy minimalizovat ztrátu danou volbou veřejnosti o výši očekávané inflace. Optimální nastavení výše míry inflace je centrální bankou nalezeno pomocí první derivace ztrátové funkce vzhledem k míře inflace. Jinými slovy hledáme minimum míry inflace pro zadaný problém

$$\frac{dL}{d\pi} = -\alpha + 2\beta\pi = 0.$$

Vyjádřením inflace získáváme optimální míru inflace danou jako $\pi = \frac{\alpha}{2\beta}$. Druhá derivace předchozího výrazu je kladná $\frac{d^2L}{d^2\pi} = 2\beta > 0$, jedná se tedy skutečně o minimum. Jelikož veřejnost zná motivaci centrální banky stejně dobře jako její omezení, nastavuje očekávanou míru inflace rovnu rozhodnutí centrální banky provádějící diskrétní politiku o skutečné míře inflace

$$\pi^e = \pi = \frac{\alpha}{2\beta}.$$

Substitucí skutečné a očekávané míry inflace při diskrečním chování monetární politiky do ztrátové funkce získáváme následující ztrátu

$$L = \bar{u} - \alpha(\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\alpha}{2\beta}) + \beta \cdot \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2 = \bar{u} + \beta \cdot \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2.$$

Tento výsledek má množství teoretických implikací, z nichž jedna může být kladení důrazu na nezávislost centrální banky vůči politickému vlivu (má za následek vysokou hodnotu parametru β).

[3] Příklad vychází z Klein (2002).

Neřešené příklady

Matematické příklady

1. Pro následující funkci $f(x)$ vyšetřete: definiční obor, sudost/lichost, ohraničenost, monotónnost a vykreslete graf funkce.

   (a) $f(x) = x(x^2+1)^{-1}$
   (b) $f(x) = (1-x^2)(x^2+1)^{-1}$
   (c) $f(x) = (1+x)(x^2+1)^{-1}$
   (d) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$
   (e) $f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}$
   (f) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$
   (g) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
   (h) $f(x) = \log(x+3) - 1$
   (i) $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$

2. Rozložte polynom $P(x)$ na součin kořenových činitelů v reálném oboru a určete znaménko hodnot $P(x)$ na jednotlivých intervalech:

   (a) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
   (b) $P(x) = x^4 - x^2$
   (c) $P(x) = x^5 + 2x^3 + x$
   (d) $P(x) = x^5 + x^2$
   (e) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$
   (f) $P(x) = x^5 - 10x^4 + 34x^3 - 36x^2 - 27x + 54$
   (g) $P(x) = x^6 - x^2$
   (h) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$
   (i) $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
   (j) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 13x^2 + 14x - 6$

3. Určete rozklad na parciální zlomky pro racionální lomenou funkci $R(x)$:

   (a) $R(x) = \frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}$
   (b) $R(x) = \frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$
   (c) $R(x) = \frac{x^4-x^3+3x^2-x+1}{x^5+2x^3+x}$
   (d) $R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$
   (e) $R(x) = \frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2}$
   (f) $R(x) = \frac{x-6}{x^4+3x^2}$
   (g) $R(x) = \frac{1}{x^3+4x^2+4x}$
   (h) $R(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}$
   (i) $R(x) = \frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}$
   (j) $R(x) = \frac{x-4}{x^4+8x}$
   (k) $R(x) = \frac{x^2-x+4}{x^2+2x+1}$
   (l) $R(x) = \frac{x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

4. Vypočtěte limity:

   (a) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\sqrt{x+6}+4}{1-x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x^3 + x - 5)$
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+9}-3}$
   (d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-10x+16}{x^2-3x+2}$
   (e) $\lim\limits_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3-x+2}{3x^3+x^2+x-2}$
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^3+x^2-x}$
   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2+x}}$
   (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{e^{2x}}$
   (j) $\lim\limits_{x\to3} (\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6})$
   (k) $\lim\limits_{x\to0} \frac{xe^x-x}{\sin^2 x}$
   (l) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$
   (m) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x-5}{x^2-7x+12}$
   (n) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2x-3}{\sin x}$
   (o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$
   (p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$
   (q) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{x-1}\right)^{2x}$

5. Vypočtěte derivaci funkce $f(x)$:

(a) $f(x) = (2x^2 + 4x + 9)$
(b) $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$
(c) $f(x) = \sin 3e^{x^2}$
(d) $f(x) = (1 - x^3)^2$
(e) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$
(f) $f(x) = xe^x - x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2$
(g) $f(x) = 2x^3 - 5\sqrt[3]{x} + 8\sqrt[4]{x}$
(h) $f(x) = 4\sqrt{x}(x + \sqrt[4]{x} + 1)$
(i) $f(x) = \frac{x+\sin x}{\pi}$
(j) $f(x) = \frac{2-x^2}{e^x}$
(k) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
(l) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$
(m) $f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+x})$
(n) $f(x) = 10^{4x+5}$
(o) $f(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)^3$
(p) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$
(q) $f(x) = (17x^2 + 5x + 3)^6$
(r) $f(x) = \sqrt{\sin(3x)}$
(s) $f(x) = x^2\, \mathrm{e}^x \sin x$
(t) $f(x) = 3^x(5x^2 - 3x + 2)$

6. Vyšetřete průběh funkce $f(x)$:

(a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$
(b) $f(x) = x(x^2 + 1)^{-1}$
(c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
(d) $f(x) = \ln(4 - x^2)$
(e) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 1$
(f) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
(g) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$
(h) $f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}$
(i) $f(x) = x - \ln(x)$
(j) $f(x) = (x^2 + x + 1)\,\mathrm{e}^x$
(k) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(1-x)^2}$
(l) $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$
(m) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$

7. Napište Taylorův polynom stupně n pro následující funkce v bodě x_0 a určete maximální chybu aproximace:

(a) $f(x) = x^2 + 1$ pro $x_0 = 1$ a $n = 3$
(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ pro $x_0 = 1$ a $n = 2$
(c) $f(x) = x\ln(x)$ pro $x_0 = 1$ a $n = 4$
(d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ pro $x_0 = 0$ a $n = 2$
(e) $f(x) = x^3 - 2x + 5$ pro $x_0 = 1$ a $n = 3$
(f) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ pro $x_0 = \pi/2$ a $n = 2$
(g) $f(x) = x^2 \cos x$ pro $x_0 = 0$ a $n = 5$
(h) $f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+x})$ pro $x_0 = 0$ a $n = 4$
(i) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ pro $x_0 = 0$ a $n = 3$
(j) $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ pro $x_0 = 2$ a $n = 4$
(k) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ pro $x_0 = 0$ a $n = 2$
(l) $f(x) = \ln(1 + x)$ pro $x_0 = 0$ a $n = 2$
(m) $f(x) = xe^{-x}$ pro $x_0 = 0$ a $n = 4$
(n) $f(x) = e^x \sin x$ pro $x_0 = 0$ a $n = 5$

Ekonomické příklady

1. Mějme funkci celkových nákladů $TC(y) = y^2 + 10y + 25$, ukažte že:
   (a) $MC(y)$ je menší než $AC(y)$, když AC klesá
   (b) $MC(y) = AC(y)$ v bodě, v minimu křivky AC
   (c) $MC(y)$ je vyšší než $AC(y)$, když AC roste
2. Mějme funkci celkových nákladů $TC(y) = 3y^2 + 7y + 24$, ukažte že:
   (a) $MC(y)$ je menší než $AC(y)$, když AC klesá
   (b) $MC(y) = AC(y)$ v bodě, v minimu křivky AC
   (c) $MC(y)$ je vyšší než $AC(y)$, když AC roste
3. Předpokládejme lineární funkci poptávky monopolu zapsanou v inverzní podobě $p(q) = 40 - 2q$. Jak bude vypadat funkce mezního příjmu? Jaká bude cena a mezní příjem, pokud se firma rozhodne vyrábět 5 kusů svých výrobků? Zakreslete.
4. Nalezněte elasticitu poptávky pro funkci poptávky $y = 50 - 2p$ a nastavenou cenu $p = 5$. Jakou musíme nastavit cenu, aby elasticita poptávky byla menší/větší než 1.
5. Nalezněte elasticitu poptávky pro funkci poptávky $y = 8000p^{-1,5}$ a nastavenou cenu $p = 4$. Určete k jaké procentní změně poptávaného množství dojde, když cena vzroste o 1 procento.
6. Při studiu transportní ekonomie se využívá vztah $T = 0,4K^{1,06}$, kde K označuje výdaje na výstavbu silnic a T značí míru objemu dopravy. Nalezněte elasticitu funkce T a určete jak se (přibližně) procentuálně změní objem dopravy, když výdaje vzrostou o procento.
7. Nakladatelství platí autorovi knihy 15 % z prodeje. Poptávka po knihách je vyjádřena rovnicí $x = 200 - 5p$. Náklady na produkci popisuje rovnice $C = 10 + 2x + x^2$. Najděte optimální množství prodaných knih tak aby byl spokojen nakladatel i autor.
8. Ukažte, že produkční funkce $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 10x^2 + 5x$ má konvexní i konkávní část.
9. Nechť $C(y) = y^3 - 9y^2 + 60y + 10, y \geq 0$ je produkční funkce firmy. Nalezněte interval, na kterém je tato funkce konvexní a interval, na kterém je konkávní.
10. Uvažme výstup y, který je získán zpracováním jediného vstupu x. Ukažte, že pokud máme produkční funkci $y = x^{1/3}, x > 0$, pak je funkce nákladů $C(y)$ konvexní když je produkční funkce konkávní.
11. Ověřte platnost principu maximalizace zisku pro lineární poptávku $D(Q) = 30 - Q$ a celkové náklady $TC = 0,5Q^2 + 6Q + 7$.
12. Firma vyrábějící na dokonale konkurenčním trhu produkuje 30 výrobků denně. Jejich prodejní cena je 900 euro za kus. Firma chce maximalizovat zisk, a tak si najme poradenskou firmu, které sdělí, že její celkové náklady jsou dány vztahem $TC(Q) = 50 + 30Q^2$. Je tato informace dostatečná pro poradenskou firmu? Jestliže ano, k jakému doporučení by měla dospět? Jakého zisku dosahovala firma původně?
13. Firma má celkové náklady ve tvaru $TC(Q) = 2Q + 10$ a celkové příjmy $TR(Q) = -2Q^2 + 14Q$. Určete množství, při kterém firma maximalizuje zisk a hodnotu tohoto maxima. Dále najděte body zvratu a interval, ve kterém je firma v zisku. Na závěr určete množství, které maximalizuje celkové příjmy a stanovte hodnotu tohoto maxima. Vše graficky znázorněte.
14. Najděte množství, které maximalizuje zisk monopolisty, jestliže poptávka po jeho zboží je ve tvaru $D(Q) = 100 - 0,01Q$ a nákladová funkce je dána vztahem $TC(Q) = 50Q + 10\,000$. Určete také cenu, za kterou bude monopolista prodávat, a jeho celkový zisk. Jak se odpovědi změní, jestliže je na zboží monopolisty uvalená množstevní daň ve výši 10? (pozn. Náklady se tedy změní na $TC(Q) = 50Q + 10\,000 + 10Q$.)

15. Malá firma prodává kravaty, tržní cena kravat je 3,50 \$ za kus. Denní celkové náklady jsou odhadnuty na $TC(Q) = 0,0006Q^3 - 0,03Q^2 + 2Q + 20$, kde Q je typický denní počet prodaných kravat. Najděte množství Q, které maximalizuje denní zisk firmy.

16. Firma řeší problém stanovení cen pro domácí a zahraniční trh za účelem maximalizace zisku. Poptávka na domácím trhu je $P_1 = 300 - Q_1$, poptávka na zahraniční trhu je $P_2 = 200 - 0,5Q_2$. Celkové náklady firmy jsou $TC(Q) = 5000 + 100Q$, kde $Q = Q_1 + Q_2$. Stanovte ceny, při kterých firma maximalizuje zisk, a to jak v případě dokonalé cenové diskriminace, tak bez ní. Tyto výsledky pak porovnejte.

17. Jedno z rozšíření Solowova modelu zahrnuje efekt rostoucí pracovní síly v ekonomice. Předpokládejme intenzivní formu Cobb-Douglasovy produkční funkce $y = k^\alpha$, kde $y = \frac{Y}{L}$ a $k = \frac{K}{L}$. Navíc předpokládáme populační růst o velikosti n, který se projeví v rovnici opotřebení kapitálu jako $\Delta k = i - (\delta + n)k$.

    (a) Předpokládejme dlouhé období, $\Delta k = 0$. Nalezněte velikost kapitálu na hlavu tak, aby byla spotřeba maximální.

    (b) Předpokládejme dvě identické ekonomiky maximalizující spotřebu a jsou v dlouhodobé rovnováze, pouze s rozdílem v růstu populace $n_1 > n_2$, která z těchto ekonomik bude mít vyšší mezní produkt kapitálu? Zakreslete.

    (c) Jaký by byl dopad vyššího populačního růstu u jedné ekonomiky na její ustálený stav kapitálu na hlavu a výstupu na hlavu?

18. Dalším možným rozšířením Solowova modelu je rozšíření o technologický progres. Technologický progres může být do Solowova modelu zakomponován jako nárůst efektivity práce (E). Produkční funkce pak nabývá podobu $Y = f(K, L \times E)$. Efektivita práce roste (v takto specifikovaném modelu) konstantně rychlostí g procent za každý rok. Označme $y = \frac{Y}{L \times E}$ a $k = \frac{K}{L \times E}$, tyto proměnné nyní měří výstup a kapitál na efektivnostního pracovníka. Následně stanovme odpovídající produkční funkci v intenzivní formě $y = k^\alpha$, přičemž platí platí $\Delta k = i - (\delta + n + g)k$.

    (a) Předpokládejme ekonomiku s konkrétně zadanou produkční funkcí $Y = K^{\frac{1}{2}}(LE)^{\frac{1}{2}}$. V této ekonomice roste efektivita práce tempem dvě procenta za rok $g = 0,02$, kapitál se opotřebovává rychlostí deset procent za rok $\delta = 0,1$ a populace roste tempem 2,5 % za rok $n = 0,025$. Jaká bude úroveň kapitálu na hlavu v ustáleném stavu podle zlatého pravidla?

    (b) Předpokládejme, že produkční funkce má podobu: $Y = F(K, EL) = 10(K)^{1/4}(EL)^{3/4}$ a kapitál má dobu životnosti průměrně 10 let, takže 10 % kapitálu se ročně opotřebuje. Předpokládejme, že tempo růstu populace je 4 %, míra růstu technologického pokroku 2 % a míra úspor $s = 0,128$.

        - Vyjádřete produkční funkci pro výstup na efektivnostního pracovníka $y = Y/EL = f(k)$, kde k je množství kapitálu na efektivnostního pracovníka.
        - Vypočítejte hodnoty ve stálém stavu pro následující veličiny: kapitál na efektivnostního pracovníka, výstup na efektivnostního pracovníka, spotřeba na efektivnostního pracovníka, úspory a investice na efektivnostního pracovníka a amortizaci na efektivnostního pracovníka.
        - Nyní vypočtěte míry růstu ve stálém stavu pro následující veličiny: kapitál na pracovníka, výstup na pracovníka a spotřeba na pracovníka.
        - Vypočtěte, jaká jsou ve stálém stavu tempa růstu celkového kapitálu, celkového výstupu a celkové spotřeby.

Seznam použité literatury

[1] HOY, Michael. Mathematics for economics. 3rd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2011. ISBN 978-0-262-01507-3.

[2] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.

[3] KLEIN, Michael W. Mathematical methods for economics. 2nd ed. Boston: Addison-Wesley, c2002. ISBN 0-201-72626-2

[4] MAŘÍK, Robert. Taylorův polynom funkce jedné proměnné. Dostupné z:

http://user.mendelu.cz/marik/wiki/pdf/taylor.pdf.

[5] MAŘÍK, Robert. Hornerovo schéma. Dostupné z:

http://user.mendelu.cz/marik/wiki/pdf/algrce.pdf.

[6] MEZNÍK, Ivan. Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy. Brno: VUT, 2011. ISBN 978-80-214-4239-9.

[7] MOUČKA, Jiří a Petr RÁDL. Matematika pro studenty ekonomie. 2., upravené a doplněné vydání. Praha: Grada, 2015. Expert. ISBN 978-80-247-5406-2.

[8] NAVRÁTIL, M. Matematika pro FRRMS (1. část). Dostupné z: http://user.mendelu.cz/navratil/akademie/.

[9] PŘIBYLOVÁ, Lenka. Rozklad na parciální zlomky. 2009. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/ pribylova/rlf.pdf.

[10] SYDSÆTER, Knut a Peter J. HAMMOND. Essential mathematics for economic analysis. 3rd ed. Harlow: Prentice-Hall, 2008. ISBN 978-0-273-71324-1.

[11] ZEMÁNEK, Petr a Petr HASIL. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2010. Elportál. ISSN 1802-128X.

[12] Elektronické zdroje:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/22_MI_KAPI_1_2.pdf

http://reseneulohy.cz/1485/rozklad-na-parcialni-zlomky-vi

https://mathonline.fme.vutbr.cz/default.aspx

http://user.mendelu.cz/marik/wiki/pdf/mm2.pdf