Kapitola 3

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice jsou další oblastí, ve které využijeme integrální počet. Diferenciální rovnice je rovnice, ve které jako proměnná vystupuje funkce a její derivace. V tomto textu se pro jednoduchost budeme zabývat pouze diferenciálními rovnicemi prvního řádu (tzn. těmi, ve kterých vystupuje pouze 1. derivace neznámé funkce), konkrétně pak nejjednoduššími typy – autonomními rovnicemi a rovnicemi se separovanými proměnnými.

Diferenciální rovnici se separovanými proměnnými můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou spojité funkce.

Autonomní rovnice je rovnice se separovanými proměnnými, ve které je $f(x) = c$, kde c značí konstantu.

Postup řešení

Při řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými nejprve najdeme nulový bod funkce $g(y)$, tj. řešení rovnice, pro která je $g(y) = 0$. Řešení y taková, že $g(y) \neq 0$, nalezneme rozepsáním

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

a separováním proměnných. Rovnici tedy upravíme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tuto rovnici následně zintegrujeme, čímž získáme obecné řešení. Pokud je to možné, vyjádříme z této rovnice y. Tento postup si nyní ukážeme na dvou vzorových příkladech.

Řešené příklady

Příklad 1

Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y}{1+x}.$$

Nejprve najdeme nulový bod funkce $g(y)$, kterým je v tomto případě $y \equiv 0$. Tato diferenciální rovnice má tedy triviální řešení, což musíme zohlednit ve výsledném řešení. Poté rovnici za předpokladu, že $y \neq 0$, upravíme separací proměnných do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

Odtud integrováním obou stran uvedené rovnosti získáme

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Odlogaritmováním obou stran pak dostaneme

$$|y| = k|1+x|, \qquad k = \mathrm{e}^c > 0,$$

z čehož po odstranění absolutní hodnoty plyne

$$y = l(1+x), \qquad l = \pm\,\mathrm{e}^c, \qquad l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Současně samozřejmě musíme uvážit, že hodnoty, které může integrační konstanta nabýt, se s úpravami mění také, což je ve výpočtu naznačeno. Takto podrobné značení integrační konstanty již v následujících příkladech používat nebudeme, písmeno c bude označovat její všechny možné tvary. Řešení $y(x) \equiv 0$ můžeme získat volbou konstanty $l = 0$. Rozšíříme-li tedy definiční obor l na celé $\mathbb{R}$, získáme obecné řešení

$$y(x) = l(1+x), \quad l \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2

Nyní vyřešíme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = (x-2)y^{-2}.$$

Jedná se opět o rovnici se separovanými proměnnými, postup řešení bude tedy analogický postupu popsanému výše. V tomto případě neexistuje řešení, ve kterém $g(y) = 0$. Nejprve tedy rozepíšeme člen y' na podíl diferenciálů a vynásobíme celou rovnici výrazem y^2, čímž získáme

$$y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - 2.$$

Vynásobením celé rovnice členem dx a následným integrováním postupně dostaneme

$$\int y^2 \,\mathrm{d}y = \int x - 2 \,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 2x + c.$$

Nyní již pouze osamostatníme y, vynásobením celé rovnice třemi a jejím třetím odmocněním tedy dostáváme

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + c},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Všimněte si, že při násobení rovnice číslem 3 se s konstantním členem nestalo nic, pořád je to pro nás konstanta, přestože ta ve výsledku je formálně trojnásobně větší než ta, kterou jsme získali při integrování.

Počáteční podmínky

Při řešení diferenciálních rovnic, a to zejména při řešení praktických příkladů, se můžeme setkat se zadáním, které obsahuje tzv. počáteční podmínky. Těmi jsou určeny nějaké konkrétní hodnoty funkcí v daných příkladech. Představit si to můžeme např. tak, že zkoumáme, jak klesá teplota dortu vytaženého z trouby v místnosti, přičemž známe jeho počáteční teplotu a teplotu po např. 10 minutách, kdy je vytažený. Díky těmto počátečním podmínkám pak můžeme určit hodnotu integrační konstanty a získat nějaké konkrétní výsledky. V příkladu s dortem by šlo např. o čas, za který bude mít dort např. stejnou teplotu jako vzduch v místnosti.

Konkrétní příklad s využitím počátečních podmínek si ukážeme jak na matematickém příkladu, tak ve slovních úlohách.

Příklad 3 - počáteční podmínky

Nyní si ukážeme, jak vyřešit diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = 3x^2 - 4x$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = 1.$$

Rovnici vyřešíme obdobně jako v příkladech 1 a 2. Rozepsáním členu y' na podíl diferenciálů získáme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 4x.$$

Vynásobením celé rovnice členem dx a následným integrováním postupně dostaneme

$$\int \mathrm{d}y = \int 3x^2 - 4x \,\mathrm{d}x,$$

$$y = x^3 - 2x^2 + c.$$

Nyní zjistíme konkrétní hodnotu integrační konstanty c, neboť víme, že $y(0) = 1$. S využitím počáteční podmínky dostáváme rovnici

$$y(0) = 1 = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + c,$$

ze které plyne, že $c = 1$. Hledané řešení je tedy ve tvaru

$$y = x^3 - 2x^2 + 1.$$

Řešení, které získáme s využitím počátečních podmínek, říkáme partikulární řešení.

Aplikace diferenciálních rovnic

Hlavním důvodem pro zahrnutí diferenciálních rovnic do této kapitoly je jejich široká aplikovatelnost, a to jak v přírodních vědách, tak i v ekonomii. Jedním z klasických příkladů je spojité úročení. Tuto aplikaci diferenciálních rovnic v ekonomii si ukážeme na konkrétním, řešeném příkladu. V tomto příkladu si také ukážeme, jak diferenciální rovnici sestavit. Podíl diferenciálů vlastně znamená tempo změny nějaké veličiny, diferenciální rovnice tedy využijeme, když se některá proměnná mění, např. v čase. To je i případ úročení.

Příklad 1 - spojité úročení

Profesor P. začal šetřit na důchod hned po nástupu do práce, a proto má teď na spořícím účtu 500 000. Na tomto účtu je úrok 3 % připisován spojitě. Jestliže profesor plánuje odejít do důchodu za 10 let, kolik peněz může na účtu očekávat? Dále zjistěte, jak se tato částka změní, jestliže bude profesor v těchto deseti letech ukládat vždy 10 000 ročně. Na jak dlouho profesorovi naspořená částka vydrží, jestliže si bude po odchodu do důchodu vybírat každý rok 60 000?

Řešení. Označme $P = P(t)$ částku peněz na účtu v tisících v čase t měřeném v letech a k úrokovou míru. Ze zadání víme, že $P(0) = 500$ a že je úrok připisován spojitě. Po uplynutí času h můžeme na účtu očekávat částku

$$P(t+h) = P(t) + khP(t).$$

Tento výraz nyní upravíme na

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = kP(t).$$

Jestliže pošleme h limitně k nule, získáme na levé straně derivaci $P'(t)$, a to z definice derivace. Rozepsáním $P'(t) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ pak obdobně jako v matematických příkladech můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP.$$

Tato rovnice má opět triviální řešení $P \equiv 0$. V našem případě je $k = 0,03$. Tuto rovnici řešíme obdobně jako rovnice předchozí separací proměnných, čímž získáme řešení

$$P(t) = c\,\mathrm{e}^{0,03t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

které v sobe zahrnuje i řešení triviální. Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení rovnice, tedy

$$P(0) = 500 = c\,\mathrm{e}^{0,03\cdot 0},$$

z čehož plyne, že $c = 500$. Při odchodu do důchodu může profesor očekávat částku

$$P(10) = 500\,\mathrm{e}^{0,03\cdot 10} \doteq 675,$$

tedy necelých 675 000. Jestliže si profesor zároveň každý rok ukládá 10 000, bude mít v čase $t + h$ na účtu

$$P(t+h) = P(t) + 0,03P(t)h + 10h.$$

Z této rovnosti můžeme $P'(t)$ vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0,03P + 10.$$

Jedná se o autonomní rovnici, jež vyřešíme separováním proměnných a integrováním, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{0,03P + 10} = \int \mathrm{d}t,$$

z čehož plyne

$$\frac{1}{0,03} \ln|0,03P + 10| = t + c.$$

Úpravou a odlogaritmováním poté dostaneme

$$0,03P + 10 = c\,\mathrm{e}^{0,03t},$$

z čehož můžeme vyjádřit P jako

$$P = -\frac{10}{0,03} + c\,\mathrm{e}^{0,03t}\,.$$

Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením počáteční podmínky do tohoto obecného řešení rovnice, tj.

$$P(0) = 500 = -\frac{10}{0,03} + c\,\mathrm{e}^{0,03\cdot 0},$$

a tedy

$$c = \frac{2500}{3}.$$

Při odchodu do důchodu může profesor očekávat částku

$$P(10) = -\frac{10}{0,03} + \frac{2500}{3}\,\mathrm{e}^{0,03\cdot 10} \doteq 791,549.$$

Další část příkladu můžeme řešit obdobně. Hledaná diferenciální rovnice je v tomto případě ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0,03P - 60, \quad t > 10.$$

Vzhledem k podobnosti této rovnice a rovnice v první části příkladu ponecháme podrobnější řešení na čtenáři. Výsledek této rovnice je potom

$$P = \frac{60}{0,03} + c\,\mathrm{e}^{0,03t}, \text{ kde } c \doteq -895,242.$$

Toto c jsme získali dosazením podmínky $P(10) = 791,549$ z předchozí části příkladu. Zbývá tedy odpovědět na otázku, na jak dlouho mu naspořená částka při vybírání 60 000 ročně vydrží. Hledáme tedy t, které řeší rovnici

$$0 = 2000 - 895,242\,\mathrm{e}^{0,03t}\,.$$

Úpravou a logaritmováním se dostaneme k výrazu

$$t = \frac{\ln \frac{2000}{895,242}}{0,03},$$

z čehož po vyčíslení dostaneme $t = 26,79$ let. Musíme ovšem vzít v úvahu, že prvních 10 let profesor stále ukládá 10 000 ročně. Profesorovi, který v 11. roce poprvé vybere 60 000 a pak s výběrem nepřestává do té doby, než mu úspory dojdou, naspořené peníze vydrží na téměř 17 let strávených v důchodu.

Příklad 2 - rovnovážná cena

Označme $P = P(t)$ cenu zboží v čase t vyjádřeném v týdnech, $D = D(P) = a - bP$ poptávku po zboží při ceně P a $S = S(P) = \alpha + \beta P$ nabídku zboží při ceně P. Rychlost, s jakou se mění cena, je úměrná rozdílu mezi poptávkou a nabídkou. Najděte rovnici pro $P(t)$ v případě, že poptávka je dána rovnicí $D(P) = 25 - 2P$ a nabídka $S(P) = 5 + 3P$. Firmy ovšem tyto rovnice neznají a nastavily tak cenu za kus rovnu 5,5. V prvním týdnu prodeje zboží se prodejcům nedaří tak, jak předpokládali, a proto začnou cenu spojitě snižovat tak, že po prvním týdnu je $P = 5,4$. Za jak dlouho se trh dostane do bodu vzdáleného maximálně 5 % od rovnovážného stavu?

Řešení. Rovnovážná cena P je cena, která vyrovnává nabídku zboží a poptávku po něm, platí pro ni tedy

$$D(P) = S(P) = 25 - 2P = 5 + 3P,$$

z čehož plyne $P = 4$. Ze zadání nyní sestavme rovnici

$$P(t + h) = P(t) + k(D - S)h,$$

ze které úpravou dostaneme

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = k(D-S).$$

Obdobně jako v předchozím příkladu získáme limitním přechodem pro h jdoucí do nuly na levé straně derivaci $P'(t)$. Hledanou diferenciální rovnici pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k(D-S) = k[a-bP-(\alpha+\beta P)] = k[a-\alpha-P(b+\beta)].$$

Jde o autonomní rovnici, kterou vyřešíme nejprve obecně. Separováním proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{k[a-\alpha-P(b+\beta)]} = \int \mathrm{d}t,$$

z čehož získáme

$$-\frac{1}{k(b+\beta)} \ln\left[a-\alpha-P(b+\beta)\right] = t+c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Odtud stejným postupem jako v předchozích úlohách dostaneme obecné řešení rovnice, které je nyní ve tvaru

$$P = \frac{a-\alpha}{b+\beta} - c\,\mathrm{e}^{k(b+\beta)t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení v sobě zahrnuje i řešení konstantní. S využitím konkrétních hodnot ze zadání můžeme psát

$$P = \frac{25-5}{2+3} - c\,\mathrm{e}^{-5kt} = 4 - c\,\mathrm{e}^{5kt}.$$

Zároveň víme, že $P(0) = 5,5$, z čehož plyne $c = -1,5$, a $P(1) = 5,4$, z čehož získáme rovnici pro k, tj.

$$5,4 = 4 + 1,5\,\mathrm{e}^{5k}$$

a tedy

$$k = -\frac{\ln\frac{1,4}{1,5}}{5} \doteq 0,0138.$$

Nyní najdeme čas, ve kterém bude cena maximálně 5 % od své rovnovážné hodnoty. Vzhledem k tomu, že P je klesající funkce (ověření ponecháme na čtenáři), a $P(0) = 5,5$, nás zajímá čas, ve kterém cena klesne na hodnotu 4,2. Pro tento čas platí rovnost

$$4,2 = 4 + 1,5\,\mathrm{e}^{-5\cdot 0{,}0138\,t},$$

z čehož plyne

$$t = \frac{\ln\frac{4,2-4}{1,5}}{-5\cdot 0,0138} \doteq 29,2.$$

Cena se dostane 5 % od své rovnovážné hodnoty za přibližně 29 týdnů.

Příklad 3 - Solowův model

Jedním z příkladů diferenciální rovnice, se kterou se při studiu ekonomie můžeme setkat, je Solowův (někdy též Swanův-Solowův) model ekonomického růstu. Tento model si nyní představíme, nejprve však zavedeme značení. Označme $K = K(t)$ celkový kapitál dané země, $Y = Y(t)$ produkt (tj. HDP), $L = L(t)$ celkovou pracovní sílu, $k(t) = k = K/L$ kapitál na osobu (tzv. kapitálová intenzita), $y(t) = y = Y/L$ produkt na osobu, přičemž všechny tyto ukazatele uvažujeme v čase t. Označme dále $L' = dL/dt$ změnu počtu obyvatel, $n = L'/L$ tempo růstu populace, které budeme uvažovat konstantní (tj. můžeme ho zapsat např. jako tempo růstu ve výchozím časovém okamžiku $n = L'(t_0)/L(t_0)$, γ část produktu, kterou investujeme do kapitálu, a $\delta > 0$ depreciaci kapitálu (tj. to, jak se kapitál v čase opotřebovává). V tomto příkladu budeme dále uvažovat Cobbovu–Douglasovu produkční funkci, která je ve tvaru

$$Y = AK^{\alpha}L^{1\alpha},$$

kde $A > 0$ označuje produktivitu a $\alpha \in (0, 1)$ je koeficient udávající podíl kapitálu. Tato produkční funkce splňuje klasické předpoklady, kterými jsou konstantní výnosy z rozsahu (což můžeme pro produkční funkci obecně zapsat jako $F(zK, zL) = zF(K, L)$) a kladný a klesající mezní produkt (tj. $F'_k(K, L) > 0$, $F''_{kk}(K, L) < 0$). Ověření toho, že pro Cobbovu–Douglasovu produkční funkci jsou tyto předpoklady splněny, ponecháme na čtenáři. Jestliže $Y = AK^{\alpha}L^{1\alpha}$, můžeme produkci na osobu zapsat jako

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}.$$

Pro jednoduchost uvažujme model, ve kterém je A konstantní, a který odpovídá situaci v uzavřené ekonomice (tj. platí, že investice γY se rovnají úsporám). Změnu kapitálu můžeme z definice zapsat jako rozdíl investic do kapitálu a depreciace kapitálu, máme tedy rovnici

$$K(t + h) = K(t) + h(\gamma Y - \delta K),$$

ze které úpravou (obdobnou té provedené v příkladu 1 o spojitém úročení) a limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme diferenciální rovnici

$$K'(t) = \gamma Y - \delta K.$$

Nyní se zaměříme na tzv. kapitálovou intenzitu k, pro niž můžeme psát

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\cdot\frac{L'}{L} = \frac{\gamma Y - \delta K}{L} - kn = \gamma y - \delta k - kn.$$

Vezmeme–li v úvahu Cobbovu–Douglasovu produkční funkci, tj. $y = Ak^{\alpha}$, získáme

$$k' = A\gamma k^{\alpha}k(\delta + n),$$

což je diferenciální rovnice jiného typu, než s jakou jsme se dosud setkali. Jedná se konkrétně o Bernoulliho rovnici. Tato rovnice se obecně řeší vydělením celé rovnice nejvyšší mocninou k^{α} a následnou substitucí $z = k^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k'$. Tuto rovnici nyní společně vyřešíme postupem nastíněným výše a najdeme hodnotu kapitálové intenzity v dlouhém období (pro $t \to \infty$) za předpokladu, že $\delta + n > 0$. Jaký je pro tuto hodnotu produkt na osobu y?

Řešení. Jak již bylo naznačeno, rovnici nejprve vydělíme členem k^{α}, čímž získáme

$$\frac{k'}{k^{\alpha}} = A\gamma - k^{1-\alpha}(\delta + n).$$

Následně zavedeme substituci $z = k^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k'$. Funkce z je stejně jako funkce k funkcí času, tj. proměnné t. Tímto krokem dostaneme rovnici ve tvaru

$$\frac{z'}{1-\alpha} = A\gamma - z(\delta + n).$$

Tato rovnice je autonomní, umíme ji tedy vyřešit separací proměnných, která v tomto případě vypadá následovně

$$\frac{\frac{}{\mathrm{d}t}}{1-\alpha} = A\gamma - z(\delta + n),$$

a tedy po úpravě

$$\frac{1}{1-\alpha}\int \frac{}{A\gamma - z(\delta + n)} = \int \mathrm{d}t.$$

Abychom snadno vyřešili integrál na levé straně rovnice, vynásobíme celou rovnici jedničkou, rozepsanou v tomto případě jako $\frac{-(\delta+n)}{-(\delta+n)}$, čímž získáme

$$\frac{-1}{(\delta+n)(1-\alpha)}\int\frac{-(\delta+n)}{A\gamma-z(\delta+n)}=\int \mathrm{d}t.$$

Nyní máme v čitateli zlomku v integrálu na levé straně rovnice derivaci příslušného jmenovatele, což můžeme již snadněji zintegrovat. Tímto získáme

$$\frac{-1}{(\delta+n)(1-\alpha)}\ln|A\gamma-z(\delta+n)|=t+c.$$

V následujících krocích osamostatníme z, a to např. následujícím způsobem:

$$\ln|A\gamma-z(\delta+n)|=-(\delta+n)(1-\alpha)t+c,$$

$$A\gamma-z(\delta+n)=c\,\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t},$$

$$z=\frac{1}{(\delta+n)}\left[A\gamma-c\,\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right].$$

Vzhledem k tomu, že c je libovolná reálná konstanta můžeme předchozí rovnost upravit na

$$z=\frac{A\gamma}{\delta+n}+c\,\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}.$$

Nyní se již vrátíme k původní proměnné $k(t)$, neboli kapitálové intenzitě, pro kterou můžeme psát

$$k(t)=\left[\frac{A\gamma}{\delta+n}+c\,\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Za předpokladu, že $\delta+n>0$, jde výraz $\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}$ pro t jdoucí do nekonečna k nule, v dlouhém období bude kapitálová intenzita v blízkosti hodnoty

$$k^{ss}:=\left(\frac{A\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Značení k^{ss} a později i y^{ss} jsou zde použity záměrně, neboť tyto hodnoty označují tzv. stabilní či ustálené stavy neboli „steady states“, ke kterým se úrovně kapitálu a produktu dlouhodobě blíží. Tento ustálený stav můžeme definovat jako bod, ve kterém se proměnná již nemění v čase, tj. její derivace podle času je nulová. Z tohoto plyne, že ke stejnému výsledku jsme mohli dojít položením $k'=0$ v rovnici

$$k'=A\gamma k^{\alpha}k(\delta+n).$$

Pro produkt na osobu můžeme s využitím znalosti rovnice kapitálové intenzity psát

$$y(t)=Ak^{\alpha}=A\left[\frac{A\gamma}{\delta+n}+c\,\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\gamma}{\delta+n}+C\,\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

kde $C=\frac{c}{A}$. V dlouhém období je V dlouhém období je y v blízkosti hodnoty, kterou označíme y^{ss} Pro tuto hodnotu platí

$$y^{ss}:=A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Hodnoty k^{ss} a y^{ss} jsou významné výstupy tohoto modelu, neboť pomocí nich můžeme porovnávat země, které se liší např. jen v růstu populace n. Tyto hodnoty udávají jakési stabilní úrovně kapitálové intenzity a produktu na osobu, ke kterým jednotlivé země směřují. Tento model tak umožňuje růst pouze, pokud se zmenší n, nebo se sníží úroveň depreciace δ, nebo se zvýší produktivita A či část úspor investovaná do kapitálu γ.

Ačkoli je tento model velmi jednoduchý, srovnáme–li jeho výsledky s daty, předpovídá dobře určité trendy, jako například fakt, že země s vyšší mírou úspor γ mají tendenci mít vyšší kapitálovou intenzitu. Model je samozřejmě možné rozšířit např. o zahrnutí lidského kapitálu (tj. jakési kvality pracovníků) nebo o rozšíření produktivity na součet efektivnosti a technologie, které již nejsou konstantní. V případe těchto rozšíření modelu již nelze obecně říci, jakou rovnicí můžeme model popsat, neboť záleží na konkrétních podobách jednotlivých funkcí.

Neřešené příklady

Matematické příklady

1. Vyřešte následující autonomní rovnice a rovnice se separovanými proměnnými:

   (a) $y' = ky$

   (b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

   (c) $y' = 6x^2 + 10x - 6$

   (d) $\frac{y'}{y} = 4x$

   (e) $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$

   (f) $xy' - y = 0$

   (g) $y' = \frac{y^2-y}{x}$

2. Vyřešte následující diferenciální rovnice s počátečními podmínkami:

   (a) $y' = -2\frac{1}{x^2}$, kde $y(0) = 2$

   (b) $y' = x^6 - 2x$, kde $y(1) = 0$

   (c) $y' = \frac{1}{x+3}$, kde $y(-2) = 4$

   (d) $x + y' = 2$, kde $y(2) = 5$

   (e) $(x-1)y' + y^2 = 0$, kde $y(2) = -1$

   (f) $(x+1)\,\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x = 0$, kde $y(0) = 7$

Ekonomické příklady

Pomocí separace proměnných sestavte a vyřešte následující slovní úlohy:

1. Klára začala ve svých 25 letech spořit na důchod tak, že na účet se spojitým připisováním úroků ukládala 15 tisíc ročně. Ve svých 40 letech se začala strachovat, zda se jí tímto způsobem podaří vysněnou částku milion korun naspořit do jejích 65 let, kdy má v plánu odejít do důchodu. Jestliže je úroková sazba 2 %, vypočtěte, zda se jí to podaří.

2. Obdobně jako v řešeném příkladu 2 najděte rovnici pro rovnovážnou cenu $P(t)$ v případě, že poptávka je dána rovnicí $D(P) = 50 - 2P$ a nabídka $S(P) = 2 + 4P$. Počáteční cena, kterou firmy nastavily, je rovna 10, cena po dvou týdnech pak 9,4. Za jak dlouho se trh dostane do bodu vzdáleného maximálně 10 % od rovnovážného stavu?

Seznam použité literatury

[1] ZEMÁNEK, Petr a Petr HASIL. Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy II. 2016. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/ zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

[2] ZUZAŇÁKOVÁ, Jana. Obyčejné diferenciální rovnice ve slovních úlohách. 2018. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/ajxgs/Bakalarska_prace_Zuzanakova_Jana.pdf

[3] ŽELEZNÝ, Zdeněk. Diferenciální rovnice 1. řádu sbírka řešených příkladů. 2012. Dostupné z: https://theses.cz/id/kgrf4r/Zdenk_elezn_Diferenciln_rovnice_1__du_-_Sbrka_eench_pklad.pdf

[4] Elektronické zdroje:

http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_8_1.pdf