Kapitola 6

Konkávní a kvazikonkávní funkce

Řešené příklady

1. Konvexnost a konkávnost funkce

Určete, pro jaké hodnoty konstanty a je následující funkce konkávní/konvexní.

$$f(x, y) = -6x^2 + (2a + 4)xy - y^2 + 4ay$$

Řešení:
V tomto příkladu máme určit, pro jaké hodnoty je daná funkce konkávní/konvexní. Funkci tedy nejprve zderivujeme, abychom získali Hessovu matici. Parciální derivace prvního a druhého řádu jsou:

$$f_x = -12x + 2ay + 4y, \quad f_y = 2ax + 4x - 2y + 4a,$$

$$f_{xx} = -12, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2a + 4.$$

Nyní již můžeme sestavit Hessovu matici, která je má tvar

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 2a+4 \\ 2a+4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Z této matice ihned vidíme, že zadaná funkce nemůže být nikdy konvexní, neboť 1. vedoucí hlavní minor (tj. číslo -12) je záporný. Aby byla funkce konkávní, musí vedoucí hlavní minory střídat znaménko počínaje záporným. 2. vedoucí hlavní minor tedy musí být nezáporný. Determinant Hessovy matice je

$$|H| = (-12) \cdot (-2) - (2a + 4)^2 = 24 - (4a^2 + 16a + 16) = -4a^2 - 16a + 8.$$

Tento výraz nyní položíme roven nule a vyřešíme jej. Kvadratická rovnice $-4a^2 - 16a + 8 = 0$ má dva kořeny, a to

$$a_{1/2} = -2 \pm \sqrt{6},$$

ověření správnosti tohoto řešení ponecháme na čtenáři. Interval, pro který platí $-4a^2 - 16a + 8 \geq 0$, je $[-2 - \sqrt{6}, -2 + \sqrt{6}]$. Pro a z tohoto intervalu je daná funkce konkávní, pro $a \in (-2 - \sqrt{6}, -2 + \sqrt{6})$ je navíc ostře konkávní.

2. Konvexnost a konkávnost funkce

Určete, zda je zadaná funkce konvexní/konkávní

$$y = f(x, y, z) = x^\alpha + y^\beta + z^\gamma, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^3_{++}, 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$

Řešení:
Nejprve spočítáme první parciální derivace

$$f_x = \alpha x^{\alpha-1}, \quad f_y = \beta y^{\beta-1}, \quad f_z = \gamma z^{\gamma-1}$$

Když se zamyslíme, zjistíme, že všechny druhé křížové parciální derivace jsou nulové. Zbylé druhé parciální derivace pak jsou:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2} < 0 \quad \alpha - 1 < 0 \\ f_{yy} &= (\beta-1)\beta y^{\beta-2} < 0 \quad \beta - 1 < 0 \\ f_{zz} &= (\gamma-1)\gamma z^{\gamma-2} < 0 \quad \gamma - 1 < 0. \end{aligned}$$

Nyní můžeme sestavit Hessovu matici, která má tvar:

$$H = \begin{pmatrix} (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-1)\beta y^{\beta-2} & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma-1)\gamma z^{\gamma-2} \end{pmatrix}.$$

Z této matice si určíme znaménka vedoucích hlavních minorů a dostaneme:

$$\begin{aligned} |H_1| &= (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2} < 0 \\ |H_2| &= [(\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}][(\beta-1)\beta y^{\beta-2}] > 0 \\ |H_3| &= [(\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}][(\beta-1)\beta y^{\beta-2}][(\gamma-1)\gamma z^{\gamma-2}] < 0. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že zkoumaná funkce je zjevně konkávní.

3. Konkávnost Cobb–Douglasovy funkce

Dokažte, že Cobb–Douglasova produkční funkce

$$y = f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta},$$

kde $0 < \alpha, \beta < 1$ a $\alpha + \beta < 1$ je striktně konkávní pro $x, y > 0$.

Řešení:
Nejprve musíme funkci zderivovat, abychom mohli sestavit Hessovu matici. Parciální derivace prvního a druhého řádu jsou

$$f_x = \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta}, \quad f_y = \beta A x^{\alpha} y^{\beta-1}$$

$$f_{xx} = \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}y^{\beta}, \quad f_{xy} = \alpha\beta A x^{\alpha-1}y^{\beta-1}, \quad f_{yy} = \beta(\beta-1)Ax^{\alpha}y^{\beta-2}$$

Nyní můžeme sestavit Hessovu matici, která má tvar:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}y^{\beta} & \alpha\beta A x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta A x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)Ax^{\alpha}y^{\beta-2} \end{pmatrix}.$$

Abychom dokázali, že zadaná funkce je konkávní musí vedoucí hlavní minory Hessovy matice střídat znaménko počínaje záporným. Musíme tedy nejdříve dokázat, že výraz $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}y^{\beta}$ je záporný. Jelikož $0 < \alpha < 1$, tak také platí, že $\alpha - 1 < 0$, a tedy $|H_1| = f_{xx} < 0$.
Dále potřebujeme dokázat, že $|H_2| = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$. Tedy, že

$$f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2.$$

Pokud tuto rovnici nahradíme konkrétními výrazy, dostaneme

$$[\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}y^{\beta}][\beta(\beta-1)Ax^{\alpha}y^{\beta-2}] > [\alpha\beta Ax^{\alpha-1}y^{\beta-1}]^2.$$

Následující úpravy nám pomohou ukázat, že tato nerovnice pro $\alpha+\beta<1$ opravdu platí

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)A^2x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} &> \alpha^2\beta^2A^2x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\\ (\alpha-1)(\beta-1) &> \alpha\beta\\ \alpha\beta-\alpha-\beta+1 &> \alpha\beta\\ -\alpha-\beta &> -1\\ \alpha+\beta &< 1.\end{aligned}$$

4. Kvazikonvexnost a kvazikonkávnost funkce

Rozhodněte o kvazikonvexnosti/kvazikonkávnosti funkce

$$f(x,y) = y\,\mathrm{e}^x, y>0.$$

Řešení:
K vyřešení tohoto příkladu využijeme tzv. rozšířenou Hessovu matici, která je obecně ve tvaru

$$\bar{H} = \bar{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Parciální derivace v tomto příkladu rovnou zapíšeme do této matice a dostáváme

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & y\,\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \\ y\,\mathrm{e}^x & y\,\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x & 0 \end{pmatrix}.$$

První vedoucí hlavní minor (označený jako $|\bar{H}_0|$) rozšířené Hessovy matice je vždy roven 0. Vzhledem ke tvaru této matice je 2. vedoucí hlavní minor (označený $|\bar{H}_1|$) vždy záporný. K vyřešení tedy potřebujeme znát znaménko determinantu matice H (tj. $|\bar{H}_2|$) – v případě, že by bylo záporné jde o kvazikonvexní funkci, v opačném případě jde o funkci kvazikonkávní. Determinant matice H je

$$|\bar{H}| = |\bar{H}_2| = 2(y\,\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x) - y\,\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x = y\,\mathrm{e}^{3x} > 0.$$

Tento výraz je vždy kladný, zadaná funkce je tedy kvazikonkávní.

Obecně lze při posouzení, zda je funkce f kvazikonkávní či kvazikonvexní využít následující teorém.

Teorém. Předpokládejme, že f je funkce definovaná na $\mathbb{R}^n$ a má spojité první a druhé parciální derivace. Nechť $\bar{H}$ reprezentuje ohraničený determinant rozšířené Hessovy matice (Hessián) funkce f.

1. Pokud $|\bar{H}_2| > 0$, $|\bar{H}_3| < 0, \ldots, |\bar{H}_n| = |\bar{H}| > 0$ (n sudá), < 0 (n lichá) pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, pak je f kvazikonkávní.
2. Pokud $|\bar{H}_2| < 0$, $|\bar{H}_3| < 0, \ldots, |\bar{H}_n| = |\bar{H}| < 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, pak je f kvazikonvexní.

Neřešené příklady

1. Rozhodněte o konvexnosti/konkávnosti následujících funkcí:
   (a) $f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4+x_1^2x_2^2-3x_1-8x_2 \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$
   (b) $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2_{++}$
   (c) $f(x_1,x_2)=(x_1)^{\frac{1}{2}}(x_2)^{\frac{1}{3}} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2_{++}$
   (d) $f(x_1,x_2)=2x_1-x_2-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2 \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$
   (e) $f(x,y)=x+y-\mathrm{e}^x-e^{x+y} \quad x,y\in\mathbb{R}$
   (f) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}-\frac{1}{2}y \quad x,y\in\mathbb{R}$
   (g) $f(x,y,z)=(x+2y+3z)^2 \quad x,y,z\in\mathbb{R}$
   (h) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\alpha}+x_2^{\beta}+x_3^{\gamma} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3_{++}$
   (i) $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+6x_1x_2-9x_2^2-2x_3^2 \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$
   (j) $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2 \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ a,b,c\geq 0$
   (k) $f(x_1,x_2,x_3)=\mathrm{e}^{ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ a,b,c\geq 0$
   (l) $f(x_1,\dots,x_n)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2 \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$

2. Najděte největší definiční obor S, na kterém je funkce $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2-x_1x_2-x_1^3$ konkávní.

3. Za předpokladu, že $a+b\leq 1$ a $a,\ b\geq 0$, ověřte konvexnost/konkávnost Cobb–Douglasovy funkce $f(x,y)=x^ay^b$ definované na $\mathbb{R}^2_{++}$.

4. Dokažte, že funkce $f(x,y)=x^{1/4}y^{1/2}$ definovaná na $\mathbb{R}^2_{++}$ je ostře konkávní.

5. Dokažte, že funkce $f(x,y,z)=100-2x^2-y^2-3z-xy-\mathrm{e}^{x+y+z}$ definovaná na $\mathbb{R}^3$ je ostře konkávní.

6. Ukažte, že funkce $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r$ je ostře konkávní, jestliže $ac-b^2>0$ a $a<0$. Ukažte dále, že za předpokladu $ac-b^2>0$ a $a>0$, je daná funkce ostře konvexní.

7. Dokažte, že funkce
$$f(x,y,z)=Ax^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$$
   $A>0$, $\alpha_i>0$ pro všechna i, definovaná na $\mathbb{R}^3_{++}$ je kvazikonkávní. Dále dokažte, že konkávní je pouze tehdy, když přidáme omezení $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leq 1$.

8. Použijte Vennovy diagramy k ilustraci následujících vztahů mezi:
   (a) skupinou kvazikonkávních funkcí a skupinou konkávních funkcí
   (b) skupinou kvazikonvexních funkcí a skupinou konvexních funkcí

9. Rozhodněte, zda mohou být následující funkce definované na $\mathbb{R}^2_{++}$ konvexní/konkávní či kvazikonvexní/kvazikonkávní.
   (a) $f(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}$
   (b) $f(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$
   (c) $f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^3$
   (d) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$
   (e) $f(x_1,x_2)=3x_1^4+5x_2^2$
   (f) $f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2-x_1^2x_2^3$
   (g) $f(x,y)=100x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}$
   (h) $f(x,y)=x^2y^3$
   (i) $f(x,y)=250\,x^{0{,}02}y^{0{,}98}$

(j) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(k) $f(x,y) = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3$

(l) $f(x,y) = \left(x^{-\frac{1}{4}} + y^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{3}{4}}$

10. Určete, zda jsou následující funkce kvazikonvexní či kvazikonkávní.

(a) $f(x) = 3x+4$

(b) $f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$

(c) $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^x,\ y>0$

(d) $f(x,y) = -x^2y^3$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^3+x^2+1 & \text{pro } x<0, \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

11. Ukažte, že funkce:

(a) $f(x,y,z) = x^{1/4}y^{1/3}z^{1/4}$ splňuje podmínky kvazikonkávnosti i striktní konkávnosti na $\mathbb{R}^3_{++}$

(b) $f(x,y,z) = x^{1/2}y^{1/3}z^{1/4}$ splňuje podmínky kvazikonkávnosti, ale nesplňuje podmínky striktní konkávnosti na $\mathbb{R}^3_{++}$

12. Ukažte, že i když jsou obě funkce $f(x) = -x$ a $g(x) = x^3$ kvazikonkávní a kvazikonvexní, jejich součet není ani kvazikonkávní, ani kvazikonvexní.

13. (a) Uvažme konkávní funkci $f(\mathbf{x})$. Pro které hodnoty konstant a a b je konkávní funkce $af(\mathbf{x})+b$?

(b) Uvažme konkávní funkci $f(\mathbf{x})$, která nabývá pouze kladných hodnot. Určete, zda jsou konkávní (resp. kvazikonkávní) funkce $g(\mathbf{x}) = \ln f(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{f(\mathbf{x})}$.

14. Vlastnosti Cobb–Douglasovy funkce

$$F(x_1,\dots,x_n) = Ax_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}, \quad A, a_1,\dots,a_n > 0,$$

definované pro $x_1,\dots,x_n > 0$:

(a) je homogenní stupně $a = a_1+\dots+a_n$,

(b) je kvazikonkávní pro každé $a_1,\dots,a_n > 0$,

(c) je konkávní pro $a \le 1$,

(d) je ostře konkávní pro $a < 1$.

15. Vlastnosti CES produkční funkce

$$F(x_1,\dots,x_n) = A\left(\delta_1x_1^{-\rho} + \delta_2x_2^{-\rho} + \dots + \delta_nx_n^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}, \quad A,\mu,\delta_i > 0, \rho \ne 0,$$

definované pro $x_1,\dots,x_n > 0$:

(a) je homogenní stupně μ,

(b) je kvazikonvexní pro $\rho \le -1$, kvazikonkávní pro $\rho \ge -1$,

(c) je konkávní, pokud $0 < \mu \le 1$ a $\rho \ge -1$,

(d) je ostře konkávní, pokud $0 < \mu < 1$ a $\rho > -1$.

16. Uvažujte následující CES produkční funkci definovanou pro $x_1 > 0$, $x_2 > 0$:

$$f(x_1,x_2) = [0{,}3x_1^{-2} + 0{,}7x_2^{-2}]^{-1/2}$$

(a) Nalezněte výraz pro mezní míru technické substituce a dokažte, že izokvanty jsou striktně konvexní k počátku.

(b) Použijte podmínku determinantu a dokažte, že f je kvazikonkávní.

(c) Dokažte, že f je konkávní.

(d) Dokažte, že f je homogenní a nalezněte stupeň homogenity.

(e) Dokažte, že následující výsledek (z Eulerova teorému) platí pro f

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 = kf(x_1, x_2)$$

kde k je stupeň homogenity f.

17. Zopakujte části (a), (d) a (e) příkladu č. 16 pro obecnou CES produkční funkci

$$y = A[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \quad A > 0, 0 < \delta < 1, \rho > -1,$$

definovanou pro $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Seznam použité literatury

[1] HOY, Michael. Mathematics for economics. 3rd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2011. ISBN 978-0-262-01507-3.

[2] SYDSÆTER, Knut a Peter J. HAMMOND. Essential mathematics for economic analysis. 3rd ed. Harlow: Prentice-Hall, 2008. ISBN 978-0-273-71324-1.