Kapitola 7

Maximalizace bez omezujících podmínek

Řešené příklady

1. Stacionární body a extrémy funkcí více proměnných

1. Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$.

   Řešení:
   Nejprve si ukážeme, jak najít stacionární body (tedy body podezřelé z extrému) zadané funkce. Stacionární bod je bod, ve kterém je gradient (sloupcový vektor parciálních derivací) roven nule nebo neexistuje. Gradient je v tomto případě ve tvaru

   $$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z \\ 2x + 4y \\ 2x + 6z \end{pmatrix}.$$

   Gradient je nulový v případě, že platí

   $$\begin{gathered} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 2x + 6z = 0. \end{gathered}$$

   Řešením této soustavy je bod $(0, 0, 0)$. Nyní víme, že se jedná o stacionární bod, nevíme ale, zda jde zároveň o extrém. Sestavíme tedy Hessovu matici, která je v našem případě ve tvaru

   $$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Tato matice je pozitivně definitní, což znamená, že zadaná funkce je ostře konvexní. Stacionární bod je tedy ostrým globálním minimem.

2. Funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3xz + 3yz$ má stacionární body $(-2, -2, -2)$ a $(0, 0, 0)$. Určete vlastnosti těchto stacionárních bodů.

Řešení:
Hessova matice je v tomto případě ve tvaru

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 3 & 3 \\ 3 & 6y & 3 \\ 3 & 3 & 6z \end{pmatrix}.$$

V bodě $(-2,-2,-2)$ jsou vedoucí hlavní minory postupně

$$6 \cdot (-2) = -12, \qquad \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 135, \qquad |H(-2,-2,-2)| = -1350.$$

Podrobnější výpočty zde přenecháme na čtenáři. Zadaná funkce je v tomto bodě ostře konkávní (viz kapitola 6), stacionární bod $(-2,-2,-2)$ je tedy lokálním maximem.
V bodě $(0,0,0)$ jsou vedoucí hlavní minory postupně

$$6 \cdot (0) = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \qquad |H(0,0,0)| = 54.$$

Z Hessovy matice vidíme, že zadaná funkce je v tomto bodě indefinitní. Jedná se tedy o sedlový bod.

2. Monopol

Monopol produkuje dva výstupy x_1 a x_2 s lineárními poptávkovými funkcemi:

$$x_1 = 100 - 2p_1 + p_2,$$

$$x_2 = 120 + 3p_1 - 5p_2.$$

Nákladová funkce monopolu má tvar:

$$C = 50 + 10x_1 + 20x_2.$$

Určete profit–maximalizující množství, odpovídající ceny a celkový zisk.

Řešení:
Jak již víme, pro řešení optimalizačních problémů je vhodné vyjádřit si poptávkové funkce v inverzní podobě. Abychom získali inverzní poptávkové funkce v tomto příkladu, musíme ceny p_1 a p_2 považovat za neznámé a řešit rovnice simultánně. Přepíšeme tedy poptávkové funkce jako systém

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 - x_1 \\ 120 - x_2 \end{bmatrix}$$

a pomocí Cramerova pravidla vyjádříme p_1, p_2 jako

$$p_1 = \frac{5(100 - x_1) + (120 - x_2)}{7},$$

$$p_2 = \frac{2(120 - x_2) + 3(100 - x_1)}{7}.$$

Tyto rovnice můžeme dále upravit a vyjádřit si inverzní poptávkové funkce

$$p_1 = 88,57 - 0,71x_1 - 0,14x_2,$$

$$p_2 = 77,14 - 0,29x_1 - 0,43x_2.$$

Všimněte si, že pokud jsou výstupy v inverzní poptávkové funkci substituty, pak první výstup má vždy záporné znaménko v poptávce po druhém výstupu. Takže například růst množství x_1 způsobí pokles ceny p_1, což způsobí pokles v poptávce po x_2 a tedy i pokles ceny p_2, a to při jakémkoliv množství x_2.

Nyní si sestavíme ziskovou funkci firmy

$$\pi(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - C,$$

$$\pi(x_1, x_2) = 88,57x_1 - 0,71x_1^2 - 0,14x_1x_2 + 77,14x_2 - 0,29x_1x_2 - 0,43x_2^2 - 50 - 10x_1 - 20x_2,$$

$$\pi(x_1, x_2) = 78,57x_1 + 57,14x_2 - 0,71x_1^2 - 0,43x_2^2 - 0,43x_1x_2 - 50.$$

Abychom získali podmínky prvního řádu, budeme výraz parciálně derivovat a tyto derivace položíme rovny 0, tj.

$$\pi_1(x_1, x_2) = 78,57 - 1,42x_1 - 0,43x_2 = 0,$$

$$\pi_2(x_1, x_2) = 57,14 - 0,86x_2 - 0,43x_1 = 0.$$

Po vyřešení této soustavy dostáváme profit–maximalizující množství

$$x_1^* = 41,35,$$

$$x_2^* = 45,53.$$

Pro výpočet odpovídajících cen p_1^*, p_2^* dosadíme výsledné hodnoty x_1^*, x_2^* do poptávkových funkcí a získáme

$$p_1^* = 52,84,$$

$$p_2^* = 45,57.$$

Nakonec dosadíme naše výsledky do ziskové funkce monopolu a vypočítáme celkový zisk firmy

$$\pi^* = 2885,64.$$

Pro korektnost bychom měli ověřit, zda jsou nalezená množství opravdu maximy ziskových funkcí. Ověření pomocí podmínek druhého řádu si budeme demonstrovat v následujících řešených příkladech. Pro tento příklad necháme ověření k samostatnému řešení.

3. Cournotův duopol

Předpokládejme, že dvě firmy produkují identický výstup a prodávají jej na trhu s lineární poptávkovou funkcí

$$p = 100 - (q_1 + q_2),$$

kde q_i značí množství výstupu firmy $i = 1, 2$. Dále předpokládejme, že obě firmy mají nulové produkční náklady. Obě firmy chtějí maximalizovat svůj zisk, který je dán funkcí

$$\pi_i = pq_i = 100q_i - (q_1 + q_2)q_i.$$

Základní myšlenkou tohoto příkladu je, že tržní cena závisí na celkovém množství výstupu obou firem, takže zisk každé firmy závisí na jejím vyprodukovaném množství výstupu, stejně jako na vyprodukovaném množství výstupu druhé firmy. Tato závislost je charakteristická pro oligopolní tržní soustavy (duopol je speciálním případem). Každá firma tedy při stanovení profit–maximalizujícího množství čelí problému neznámého vyprodukovaného množství druhé firmy. Francouzský ekonom Augustin Cournot zavedl předpoklad, že každá firma bere výstup druhé firmy jako daný parametr při vlastním výběru produkovaného množství a tržní rovnováha je pak získána jako řešení dvojice simultánních rovnic. Nyní se podíváme, jak tento předpoklad funguje. Pokud maximalizujeme zisk i-té firmy a množství produkované druhou firmou bereme jako daný parametr, dostáváme rovnice

$$100 - 2q_1 - q_2 = 0,$$

$$100 - 2q_2 - q_1 = 0.$$

Po vyřešení soustavy dostáváme

$$q_1 = q_2 = 33,33,$$

$$p = 100 - 66,67 = 33,33.$$

Jak tedy vidíme, firmy si rozdělí trh rovnoměrně. Nyní se ještě chvíli zamyslíme nad našimi výsledky. Z podmínek prvního řádu dostaneme rovnice

$$q_1 = \frac{100 - q_2}{2}, \qquad q_2 = \frac{100 - q_1}{2}.$$

Tyto rovnice označují výstup firmy, který je pro firmu nejlepší (profit–maximalizující) při jakémkoliv možném produkovaném množství druhé firmy. Takový výstup je tedy často označován jako „best response“ nebo „best reply“. Pokud si tyto reakce vykreslíme do grafu, zjistíme, že bod, kde se reakční křivky protnou, je přesně optimem, ke kterému jsme se dopočítali. Tento bod se označuje jako tzv. Cournotova rovnováha.

4. Volba profit–maximalizujícího množství u konkurenční firmy

Předpokládejme, že konkurenční firma produkuje výstup y za použití dvou vstupů - práce L a kapitálu K. Firma čelí ceně výstupu p, ceně práce w a ceně kapitálu r a má Cobb–Douglasovu produkční funkci $y = AL^\alpha K^\beta$. V tomto klasickém příkladu si firma volí množství vstupů L a K tak, aby maximalizovala zisk daný funkcí

$$\pi = f(L,K) = pAL^\alpha K^\beta - wL - rK, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Vypočítejte profit–maximalizující množství vstupů.

Řešení:
Hledáme maximum ziskové funkce, začneme tedy výpočtem podmínek prvního řádu

$$f_L = \alpha pAL^{\alpha-1}K^\beta - w = 0,$$

$$f_K = \beta pAL^\alpha K^{\beta-1} - r = 0.$$

Víme, že řešení této soustavy je lokálním maximem, pokud je odpovídající kvadratická forma negativně definitní. Lépe řečeno, pokud je Hessova matice negativně definitní, tedy pokud vedoucí minory této matice střídají znaménko, počínaje záporným. Zapíšeme si tedy Hessovu matici druhých parciálních derivací.

$$H(L,K) = \begin{pmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{KL} & f_{KK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)pAL^{\alpha-2}K^\beta & \alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1} \\ \alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1} & \beta(\beta-1)AL^\alpha K^{\beta-2} \end{pmatrix}.$$

Prvním vedoucím minorem je druhá parciální derivace podle L. Tedy

$$|H_1| = \alpha(\alpha-1)pAL^{\alpha-2}K^\beta.$$

Tato derivace je záporná, pouze pokud $\alpha < 1$, což víme, že platí. Druhým vedoucím hlavním minorem je celý determinant Hessovy matice

$$|H_2| = \alpha\beta p^2 A^2 L^{2\alpha-2} K^{2\beta-2}(1 - \alpha - \beta),$$

který je kladný pouze tehdy, když $1 > \alpha + \beta$.
Připomeňme si, že $\alpha + \beta < 1$ značí klesající výnosy z rozsahu, $\alpha + \beta = 1$ značí konstantní výnosy z rozsahu a $\alpha + \beta > 1$ značí rostoucí výnosy z rozsahu. Výsledek konstantních či rostoucích výnosů z rozsahu však není konzistentní s tržní strukturou konkurenčního trhu. Pro náš příklad tedy platí, že $\alpha + \beta < 1$, a získaný bod je lokálním maximem naší funkce.

Neřešené příklady

Matematické

1. Nalezněte stacionární body následujících funkcí.

   (a) $y(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$
   (b) $y(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$
   (c) $y(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
   (d) $y(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^4 + x_3^6)^2$
   (e) $y(x_1, x_2) = 2(x_1 - x_2)^2 - x_1^4 - x_2^4$
   (f) $y(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$
   (g) $h(a, b) = (a + 5)^2 - (b + 3)^2$
   (h) $h(a, b) = 0,5(a)^4 - (b)^6$
   (i) $h(a, b) = (a)^{-1} + (b)^{-1} + ab$

2. Určete všechny stacionární body následujících funkcí. Rozhodněte, zda jsou nalezené body také extrémy, a v případě kladné odpovědi určete typ extrému. Vyčíslete funkční hodnoty zjištěných extrémů.

   (a) $y = 2x_1^2 + x_2^2$
   (b) $y = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1^3$
   (c) $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5$
   (d) $y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2 - x_1x_2$
   (e) $y = (x_1^2 + x_2^2)e^{x_1+x_2}$
   (f) $y = (x_1^2 - 2x_2^2)e^{x_1-x_2}$
   (g) $y = (x_1^2 + 2x_2^2)e^{-x_1^2-x_2^2}$
   (h) $f(x, y, z) = x^2 + x^2y + y^2z + z^2 - 4z$
   (i) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20x_2 + 48x_3 + 6x_4 + 8x_1x_2 - 4x_1^2 - 12x_3^2 - x_4^2 - 4x_2^3$
   (j) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 21x_1 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$
   (k) $f(x_1, x_2, x_3) = 0,5x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + x_2x_3 - 1,5x_3^2 + 10x_3$

3. Ukažte, že funkce $g(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 5)^3$ definovaná pro $x, y, z \in \mathbb{R}$ má minimum v bodě $(0, 0, 0)$.

4. Ukažte, že funkce $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 2y$ definovaná pro $x > 0$, $y > 0$ je striktně konvexní a najděte její minimum.

5. Funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$ definovaná na $\mathbb{R}$ má jediný stacionární bod. Ukažte, že tento bod je bodem lokálního minima.

6. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má pouze jeden stacionární bod (x^*, y^*), který je lokálním minimem. Je bod (x^*, y^*) nutně i globálním minimem? Jaké jsou stacionární body a lokální a globální minimum pro funkci $f(x, y) = (1 + y)^3x^2 + y^2$?

Ekonomické

1. Květoslav má užitkovou funkci $U(x_A, x_B) = x_A x_B$, cena květáku $p_A = 1\,\$$ a cena brokolice $p_B = 1\,\$$. Pokud by byl Květoslavův příjem 240 \$, kolik kusů brokolice a květáku by spotřebovával, pokud by volil spotřební koš, který maximalizuje jeho užitek za existujícího rozpočtového omezení?

2. Předpokládejte monopol působící ve dvou různých ekonomikách (ve vlastní (1) a v sousední (2)). V obou ekonomikách čelí různým poptávkovým funkcím:

$$p_1 = 100 - q_1$$
$$p_2 = 80 - 2q_2.$$

   Dále víme, že funkce celkových nákladů monopolu je $C = (q_1 + q_2)^2$.

   (a) Rozhodněte, jaké množství a za jaké ceny bude monopol v jednotlivých zemích prodávat, pokud maximalizuje zisk. Spočtěte celkový zisk monopolu.

   (b) Předpokládejme, že sousední země obviní monopol z dumpingu a uvalí dovozní kvóty ve výši maximálně 4 kusů produktu monopolu. Diskutujte dopady uvalení této kvóty.

3. Firma vyrábí 2 statky, které označíme A a B. Denní náklady jsou dány funkcí

$$C(x, y) = 0,04x^2 - 0,01xy + 0,01y^2 + 4x + 2y + 500,$$

   kde x značí počet vyrobených jednotek statku A a y počet vyrobených jednotek statku B ($x > 0$, $y > 0$). Firma prodává jednotku statku A za cenu 13 a jednotku statku B za 8. Sestavte ziskovou funkci $\pi(x, y)$ a hodnoty x, y, které maximalizují zisk.

4. Firma prodává část svého výstupu na dokonale konkurenčním trhu, kde je cena za jednotku výstupu \$60. Zbylou část svého výstupu prodává firma na trhu, kde má monopol a čelí poptávkové funkci $p_2 = 100 - q_2$, kde q_2 značí množství na monopolním trhu. Funkce celkových nákladů firmy má tvar $C = (q_1 + q_2)^2$, kde q_1 značí množství na dokonale konkurenčním trhu. Nalezněte profit–maximalizující množství na těchto trzích a diskutujte výsledek. Dále předpokládejte, že se cena na dokonale konkurenčním trhu změní na \$10. Nalezněte nové optimum a porovnejte jej s původním optimem.

5. Dvě firmy produkují identický výstup na trhu s poptávkovou funkcí

$$p = 10 - 0,1(q_1 + q_2).$$

   Nákladové funkce mají tvar

$$C_1 = 0,25q_1 \qquad C_2 = 0,5q_2.$$

   Nalezněte Cournotovu rovnováhu. Dále předpokládejte, že firmy zvolí strategii společné maximalizace zisku (maximalizují sumu svých zisků). Nalezněte tuto rovnováhu a porovnejte s původním optimem.

6. Monopol čelí poptávkové funkci

$$p = 100 - (q_1 + q_2)$$

   a produkuje identický výstup ze dvou závodů s nákladovými funkcemi

$$C_1 = 2q_1^2, \qquad C_2 = 3q_2^2.$$

   Nalezněte profit–maximalizující cenu, celkový výstup a odpovídající výstupy pro oba závody.

7. Vyřešte problém volby profit–maximalizujícího množství u konkurenční firmy s produkční funkcí $y = L^{0,25}K^{0,5}$, cenou $p = 64$, cenou práce $w = 2$ a cenou kapitálu $r = 4$. Dokažte, že řešení je maximem funkce.

Seznam použité literatury

[1] HOY, Michael. Mathematics for economics. 3rd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2011. ISBN 978-0-262-01507-3.

[2] KLEIN, Michael W. Mathematical methods for economics. 2nd ed. Boston: Addison-Wesley, c2002. ISBN 0-201-72626-2

[3] SYDSÆTER, Knut a Peter J. HAMMOND. Essential mathematics for economic analysis. 3rd ed. Harlow: Prentice-Hall, 2008. ISBN 978-0-273-71324-1.