Matice - pokročilé partie

Ze základního kurzu matematiky je třeba znát následující témata: (stačí např. v rozsahu `http://mathstat.econ.muni.cz/materialy/matematika`)

- Matice a základní operace s maticemi
- Determinant matice
- Inverzní matice
- Systémy lineárních rovnic
- Elementární transformace, Gaussova eliminační metoda
- Euklidovský prostor
- Lineární nezávislost vektorů, hodnost matice

Matice a lineární zobrazení

Pomocí matic můžeme definovat lineární zobrazení:

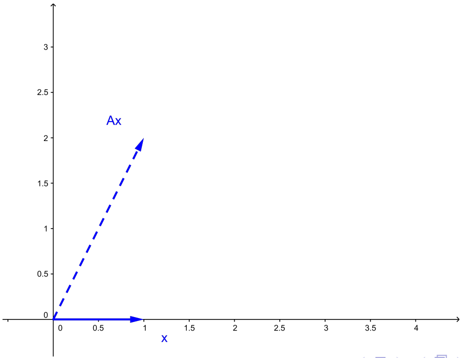
Příklad : Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ definuje lineární zobrazení přiřazující vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$

Matice a lineární zobrazení

Pomocí matic můžeme definovat lineární zobrazení:

Příklad : Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ definuje lineární zobrazení přiřazující vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$

Například pro vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dostaneme $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

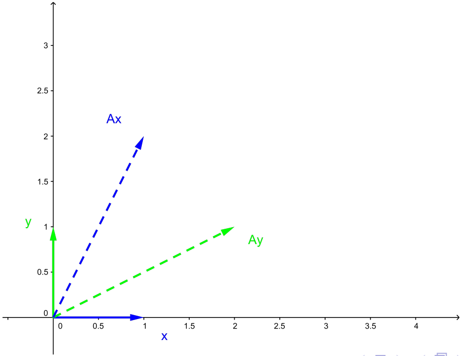


Matice a lineární zobrazení

Pomocí matic můžeme definovat lineární zobrazení:

Příklad : Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ definuje lineární zobrazení přiřazující vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$

Pro $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dostaneme $\mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

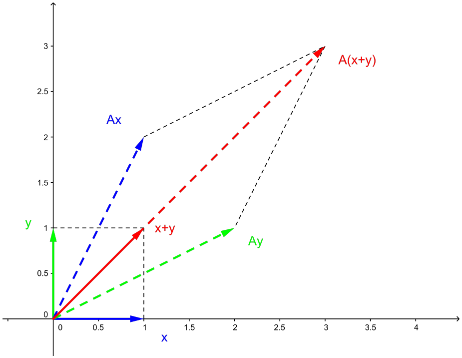


Matice a lineární zobrazení, příklad

Pokud bychom chtěli provést totéž pro vektor $z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ díky linearitě zobrazení nemusíme počítat součin $\mathbf{A} \cdot (x + y)$, ale stačí sečíst $\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

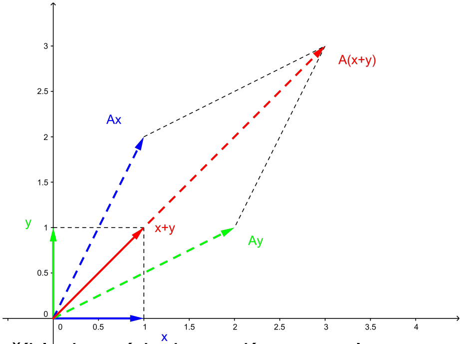
Matice a lineární zobrazení, příklad

Pokud bychom chtěli provést totéž pro vektor $z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ díky linearitě zobrazení nemusíme počítat součin $\mathbf{A} \cdot (x + y)$, ale stačí sečíst $\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Matice a lineární zobrazení, příklad

Pokud bychom chtěli provést totéž pro vektor $z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ díky linearitě zobrazení nemusíme počítat součin $\mathbf{A} \cdot (x + y)$, ale stačí sečíst $\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Vektor $z = x + y$ z příkladu má jednu zajímavou vlastnost. Při násobení maticí $\mathbf{A}$ se nezměnil jeho směr, ale pouze se ztrojnásobila jeho délka. Takový vektor pak nazýváme vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu 3.

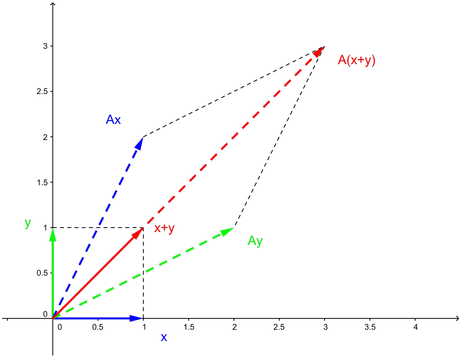
Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice : Pokud pro čtvercovou matici **A** existuje číslo λ a nenulový vektor x takové že $\mathbf{A}x = \lambda x$, pak číslo λ nazýváme vlastním číslem matice **A** a x nazveme vlastním vektorem odpovídajícím číslu λ.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice : Pokud pro čtvercovou matici **A** existuje číslo λ a nenulový vektor x takové že $\mathbf{A}x = \lambda x$, pak číslo λ nazýváme vlastním číslem matice **A** a x nazveme vlastním vektorem odpovídajícím číslu λ.

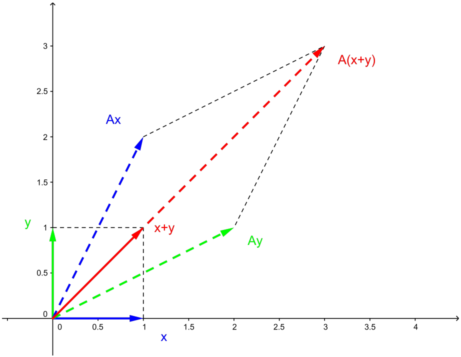
Příklad : Existují pro matici **A** z předchozího příkladu nějaké další vektory příslušející vlastnímu číslu 3?



Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice : Pokud pro čtvercovou matici **A** existuje číslo λ a nenulový vektor x takové že $\mathbf{A}x = \lambda x$, pak číslo λ nazýváme vlastním číslem matice **A** a x nazveme vlastním vektorem odpovídajícím číslu λ.

Příklad : Existují pro matici **A** z předchozího příkladu nějaké další vektory příslušející vlastnímu číslu 3?



Příklad : Existuje pro matici **A** nějaké jiné vlastní číslo? (hint: najdete na obrázku nějaký jiný vektor, který nemění transformací směr?)

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Řešení: Přepišme si soustavu rovnic, pomocí které jsou vlastní čísla definována.

$$x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

Anulováním rovnic dostaneme homogenní systém

$$(1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

Kdy má homogenní systém i jiné než triviální (rozuměj nulové) řešení? Matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici) musí být singulární, tedy její determinant musí být nulový.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Řešení: Přepišme si soustavu rovnic, pomocí které jsou vlastní čísla definována.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

Anulováním rovnic dostaneme homogenní systém

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kdy má homogenní systém i jiné než triviální (rozuměj nulové) řešení? Matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici) musí být singulární, tedy její determinant musí být nulový. Rozepišme tuto podmínku podrobněji: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, tedy $(1-\lambda)^2 = 4$ a $(1-\lambda) = \pm 2$. Dostali jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Řešení: Přepišme si soustavu rovnic, pomocí které jsou vlastní čísla definována.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

Anulováním rovnic dostaneme homogenní systém

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kdy má homogenní systém i jiné než triviální (rozuměj nulové) řešení? Matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici) musí být singulární, tedy její determinant musí být nulový. Rozepišme tuto podmínku podrobněji: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, tedy $(1-\lambda)^2 = 4$ a $(1-\lambda) = \pm 2$. Dostali jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$. Jaké vektory příslušejí těmto vlastním číslům zjistíme již snadno jako řešení systémů $\mathbf{A}x = \lambda_1 x$ a $\mathbf{A}x = \lambda_2 x$. První systém nemusíme řešit, víme že rovnici vyhovuje

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Pro $\lambda_2 = -1$ dostaneme:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

Po anulování:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

dostáváme řešení $x_1 = -x_2, x_2 = t \in \mathbb{R}$. Odpovídající vlastní vektor je tedy lib. nenulový násobek vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, návod

Shrňme si nyní postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů pro obecnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$:

- Odečteme λ od každého z diagonálních prvků matice $\mathbf{A}$
- Vyjádříme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$, tzv. charakteristcký polynom
- Položíme tento polynom roven nule, čímž získáme tzv. charakteristickou rovnici $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- Nalezneme reálné kořeny charakteristické rovnice
- Ke každému vlastnímu číslu λ_i sestavíme systém rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})x = 0$, jeho řešením získáme odpovídající vlastní vektor(y) v_i.

Vlastní čísla a vlastní vektory, návod

Shrňme si nyní postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů pro obecnou čtvercovou matici **A**:

- Odečteme λ od každého z diagonálních prvků matice **A**
- Vyjádříme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$, tzv. charakteristcký polynom
- Položíme tento polynom roven nule, čímž získáme tzv. charakteristickou rovnici $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- Nalezneme reálné kořeny charakteristické rovnice
- Ke každému vlastnímu číslu λ_i sestavíme systém rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})x = 0$, jeho řešením získáme odpovídající vlastní vektor(y) v_i.

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, návod

Shrňme si nyní postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů pro obecnou čtvercovou matici **A**:

- Odečteme λ od každého z diagonálních prvků matice **A**
- Vyjádříme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$, tzv. charakteristcký polynom
- Položíme tento polynom roven nule, čímž získáme tzv. charakteristickou rovnici $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- Nalezneme reálné kořeny charakteristické rovnice
- Ke každému vlastnímu číslu λ_i sestavíme systém rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})x = 0$, jeho řešením získáme odpovídající vlastní vektor(y) v_i.

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Sestavíme charakteristický polynom:

$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ nemá bohužel v reálném oboru řešení, takže neexsitují žádná reálná vlastní čísla matice **B**.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Pro $\lambda_1 = 1$ dostaneme systém $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right)$, který elementárními úpravami převedeme na $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Z druhé rovnice získáme pro lib. nenulové $t \in R$: $x_2 = -t, \; x_3 = 3t$, což nám po dosazení do první rovnice dá $x_1 = 3t$, tedy vlastní vektor je $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad pokračování

Pro $\lambda_{2,3} = 2$ dostaneme systém $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right)$, který elementárními úpravami převedeme na $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Tato soustava má řešení závislé na dvou parametrech, pro volbu $x_2 = t \in \mathbb{R}$ a $x_3 = s \in \mathbb{R}$ dopočítáme $x_1 = 2t + 2s$. Každé řešení tedy můžeme zapsat jako kombinaci $s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Řekneme, že vlastnímu číslu 2 odpovídají dva vlastní vektory, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vlastní vektory, využití

Vlastní čísla a vlastní vektory jsou využívány v mnoha oblastech matematiky a statistiky:

- Diagonalizace a rozklady matic
- Systémy diferenciálních rovnic
- Analýza hlavních komponent https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis
- Vícerozměrná optimalizace
- Teorie grafů

Vlastní čísla a vlastní vektory, využití

Vlastní čísla a vlastní vektory jsou využívány v mnoha oblastech matematiky a statistiky:

- Diagonalizace a rozklady matic
- Systémy diferenciálních rovnic
- Analýza hlavních komponent `https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis`
- Vícerozměrná optimalizace
- Teorie grafů

Mají nesmírný praktický význam v řadě aplikačních oblastí:

- Zpracování obrazu (rozpoznávání tváří apod.) `https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenface`
- Komprese a dekomprese dat `https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxuYXNsdW5kZXJpY3xneDpkMTI4OTI1NTc4YjRl`
- Analýza tržního rizika, predikce vývoje na burze
- Google Pagerank algoritmus "The $25,000,000,000 Eigenvector"
- Fyzika, stavební inženýrství a další

Vlastní čísla a vlastní vektory diagonální matice

Příklad : Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = diag(3,2,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory diagonální matice

Příklad : Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = diag(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory diagonální matice

Příklad : Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = diag(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka : Každá diagonální matice $\mathbf{D} = diag(d_1,\ d_2, \dots, d_n)$ má vlastní čísla rovna svým diagonálním prvkům a vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu d_i je příslušný sloupec jednotkové matice $e_i,\ i = 1, \dots, n$.

Diagonalizace matice

Definice : Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, jestliže existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n, takové že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Diagonalizace matice

Definice : Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, jestliže existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n, takové že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Nyní bychom chtěli vědět, za jakých podmínek je čtvercová matice diagonalizovatelná, a jak nalezneme matici $\mathbf{P}$. Na obě otázky nám odpoví následující věta:

Věta : Matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná tehdy a jen tehdy, má-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů $x_1, \dots x_n$. Potom $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde $\mathbf{P}$ je matice sestavená ze sloupců $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou odpovídající vlastní čísla.

Diagonalizace matice

Definice : Řekneme, že čtvercová matice **A** řádu n je diagonalizovatelná, jestliže existují diagonální matice **D** a regulární matice **P** řádu n, takové že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Nyní bychom chtěli vědět, za jakých podmínek je čtvercová matice diagonalizovatelná, a jak nalezneme matici **P**. Na obě otázky nám odpoví následující věta:
Věta : Matice **A** řádu n je diagonalizovatelná tehdy a jen tehdy, má-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů $x_1, \ldots x_n$. Potom $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, kde **P** je matice sestavená ze sloupců $x_1, \ldots, x_n$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou odpovídající vlastní čísla.

Poznámka : V ekonomii se často pracuje se symetrickými maticemi. Každá symetrická matice řádu n je diagonalizovatelná, protože má právě n vlastních čísel a jejich odpovídající vlastní vektory jsou nezávislé (lze ukázat, že jsou dokonce vzájemně ortogonální)

Diagonalizace matice, příklad

Příklad : Diagonalizujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonalizace matice, příklad

Příklad : Diagonalizujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Již dříve jsme nalezli $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1$ a $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pro matici $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ spočteme inverzi. Determinant je roven $|\mathbf{P}| = -2$, takže $\mathbf{P}^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Můžeme tedy zapsat:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizace matice, využití

Poznámka : S výhodou lze využít diagonalizace při výpočtu vyšších mocnin matice $\mathbf{A}$. Platí: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Pro $\mathbf{A}^2$ dostaneme $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}$, neboť $\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Tento postup můžeme opakovat k vyjádření $\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}$. Mocniny diagonální matice $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ spočteme snadno, $\mathbf{D}^m = diag(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$.

Diagonalizace matice, využití

Poznámka : S výhodou lze využít diagonalizace při výpočtu vyšších mocnin matice $\mathbf{A}$. Platí: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Pro $\mathbf{A}^2$ dostaneme $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}$, neboť $\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Tento postup můžeme opakovat k vyjádření $\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}$. Mocniny diagonální matice $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ spočteme snadno, $\mathbf{D}^m = diag(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$.

Příklad : Pro matici $\mathbf{A}$ z předchozího příkladu spočtěte $\mathbf{A}^4$

Řešení: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{P}\mathbf{D}^4\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^4 & 0 \\ 0 & (-1)^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 81 & 1 \\ 81 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$$

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Označíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots 2}$ a $x = (x_1, x_2)'$, z definice maticového násobení je zřejmé, že funkci $Q(x_1, x_2)$ lze zapsat jako

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'\mathbf{A}x.$$

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Označíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots 2}$ a $x = (x_1, x_2)'$, z definice maticového násobení je zřejmé, že funkci $Q(x_1, x_2)$ lze zapsat jako

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'\mathbf{A}x.$$

Příklad : Určete matici kvadratické formy $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Označíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots 2}$ a $x = (x_1, x_2)'$, z definice maticového násobení je zřejmé, že funkci $Q(x_1, x_2)$ lze zapsat jako

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'\mathbf{A}x .$$

Příklad : Určete matici kvadratické formy $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix}$

Kvadratické formy

Uveďme obecnou definici kvadratické formy pro případ n proměnných:
Definice : Kvadratickou formou n proměnných nazveme funkci $Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,\dots n$. Symetrickou matici $\mathbf{A}=(a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ nazýváme maticí kvadratické formy.

Poznámka : Při označení $x=(x_1,\dots,x_n)'$ lze opět psát $Q(x_1,\dots,x_n)=x'\mathbf{A}x$

Kvadratické formy

Uveďme obecnou definici kvadratické formy pro případ n proměnných:
Definice : Kvadratickou formou n proměnných nazveme funkci $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \ldots n$. Symetrickou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ nazýváme maticí kvadratické formy.

Poznámka : Při označení $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ lze opět psát $Q(x_1, \ldots, x_n) = x'\mathbf{A}x$

Příklad : Zapište kvadratickou formu
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$ maticově.

Kvadratické formy

Uveďme obecnou definici kvadratické formy pro případ n proměnných:
Definice : Kvadratickou formou n proměnných nazveme funkci $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \ldots n$. Symetrickou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ nazýváme maticí kvadratické formy.

Poznámka : Při označení $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ lze opět psát $Q(x_1, \ldots, x_n) = x'\mathbf{A}x$

Příklad : Zapište kvadratickou formu
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$ maticově.

Řešení: $Q(x) = x'\mathbf{A}x$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)'$ a $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Řešení: Výraz $-x_1^2 - x_2^2$ je vždy nekladný a pokud je alespoň jedna složka nenulová, tak je dokonce záporný. Forma Q_1 je tedy negativně definitní.

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Řešení: Výraz $-x_1^2 - x_2^2$ je vždy nekladný a pokud je alespoň jedna složka nenulová, tak je dokonce záporný. Forma Q_1 je tedy negativně definitní. Výraz $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ lze upravit na $(x_1 - x_2)^2$, což nabývá pouze nezáporných hodnot, ale může být rovno nule např. pro $x_1 = x_2 = 1$. Kvadratická forma Q_2 je tedy pozitivně semidefinitní

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Řešení: Výraz $-x_1^2 - x_2^2$ je vždy nekladný a pokud je alespoň jedna složka nenulová, tak je dokonce záporný. Forma Q_1 je tedy negativně definitní.
Výraz $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ lze upravit na $(x_1 - x_2)^2$, což nabývá pouze nezáporných hodnot, ale může být rovno nule např. pro $x_1 = x_2 = 1$.
Kvadratická forma Q_2 je tedy pozitivně semidefinitní
Výraz $x_1^2 - x_2^2$ může nabývat kladné hodnoty (např. pro $x_1 = 1,\ x_2 = 0$) i záporné hodnoty (např. pro $x_1 = 0,\ x_2 = 1$). Forma Q_3 je tedy indefinitní.

Definitnost kvadratické formy dvou proměnných

Příklad : Určete definitnost kvadratické formy $Q = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Definitnost kvadratické formy dvou proměnných

Příklad : Určete definitnost kvadratické formy $Q = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Řešení: Doplníme první dva členy výrazu na čtverec:
$Q = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2) + x_2^2 = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2 + \frac{1}{25}x_2^2 - \frac{1}{25}x_2^2) + x_2^2 =$
$5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 - \frac{1}{5}x_2^2 + x_2^2 = 5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{4}{5}x_2^2$.
Vidíme, že koeficienty u obou kvadratických výrazů jsou kladné, forma je tedy pozitivně definitní.

Definitnost kvadratické formy dvou proměnných

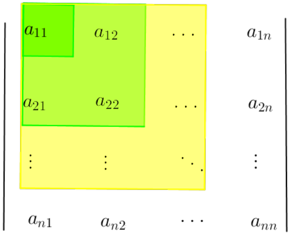
Příklad : Určete definitnost kvadratické formy $Q = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Řešení: Doplníme první dva členy výrazu na čtverec:
$Q = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2) + x_2^2 = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2 + \frac{1}{25}x_2^2 - \frac{1}{25}x_2^2) + x_2^2 =$
$5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 - \frac{1}{5}x_2^2 + x_2^2 = 5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{4}{5}x_2^2.$
Vidíme, že koeficienty u obou kvadratických výrazů jsou kladné, forma je tedy pozitivně definitní.
Pokud bychom provedli postup doplnění na čtverec pro formu s obecnými koeficienty, dostali bychom následující pravidlo:
Věta : Kvadratická forma $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ je

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0,\ a_{22} \geq 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow a_{11} > 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow a_{11} \leq 0,\ a_{22} \leq 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow a_{11} < 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium

K uvedení kritéria pro rozhodnutí o definitnosti kvadratické formy potřebujeme připomenout pojem vedoucích hlavních minorů matice **A**. Vedoucím hlavním minorem řádu k rozumíme determinant D_k submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců matice **A**. Na obrázku vidíme barevně jednotlivé submatice naznačeny.



Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium

K uvedení kritéria pro rozhodnutí o definitnosti kvadratické formy potřebujeme připomenout pojem vedoucích hlavních minorů matice **A**. Vedoucím hlavním minorem řádu k rozumíme determinant D_k submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců matice **A**. Na obrázku vidíme barevně jednotlivé submatice naznačeny.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nyní stačí určit znaménka vedoucích hlavních minorů matice **A** příslušné formě Q.

1. Jestliže $D_1 > 0,\ D_2 > 0, \dots,\ D_n > 0$, je Q pozitivně definitní.
2. Jestliže $D_1 < 0,\ D_2 > 0, \dots,\ (-1)^n D_n > 0$, je Q negativně definitní.

Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy
$Q = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2.$

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy
$Q = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Řešení: Matice formy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ má řídící hlavní minory

$$D_1 = 3,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,\quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 3$$

$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0$, tedy forma Q je pozitivně definitní.

Definitnost kvadratické formy a vlastní čísla

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy s maticí $D = diag(-1, -4, -5)$.

Definitnost kvadratické formy a vlastní čísla

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy s maticí $D = diag(-1, -4, -5)$.

Máme-li čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární, pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ mají stejná vlastní čísla. Toto důležité tvrzení nám umožní rozhodnout o definitnosti matice na základě její diagonalizace.

Definitnost kvadratické formy a vlastní čísla

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy s maticí $D = diag(-1, -4, -5)$.

Máme-li čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární, pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ mají stejná vlastní čísla. Toto důležité tvrzení nám umožní rozhodnout o definitnosti matice na základě její diagonalizace.

Věta : Pro kvadratickou formu $Q(x)$ se symetrickou maticí $\mathbf{A}$, která má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, platí, že tato forma je:

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ má kladná i záporná vlastní čísla.

Matematická analýza funkcí více proměnných

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Příklad : Určete gradient a Hessovu matici funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ v bodě $(5, 3)$.

Matematická analýza funkcí více proměnných

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Příklad : Určete gradient a Hessovu matici funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ v bodě $(5, 3)$.
Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou: $f'_x(x, y) = y^2$, $f'_y(x, y) = 2x \cdot y$, tedy $\nabla f(5, 3) = (9, 30)^\top$.

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Příklad : Určete gradient a Hessovu matici funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ v bodě $(5, 3)$.
Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou: $f'_x(x, y) = y^2$, $f'_y(x, y) = 2x \cdot y$, tedy $\nabla f(5, 3) = (9, 30)^\top$. Parciální derivace druhého řádu jsou: $f''_{xx}(x, y) = 0$, $f''_{xy}(x, y) = 2y$, $f''_{yy}(x, y) = 2x$, tedy $H(5, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.)

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f'_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top .$$

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f'_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top.$$

Příklad : Určete první a druhou derivaci funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f'_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top.$$

Příklad : Určete první a druhou derivaci funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Řešení: Víme, že $\nabla f(x, y) = (y^2, \; 2xy)^\top$, tedy $f'_s(x, y) = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{2}}$.

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f'_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}),\ f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top.$$

Příklad : Určete první a druhou derivaci funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

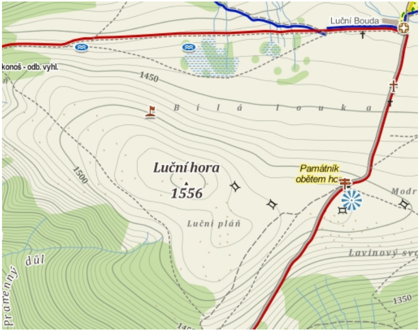
Řešení: Víme, že $\nabla f(x, y) = (y^2,\ 2xy)^\top$, tedy $f'_s(x, y) = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{2}}$.

Hessova matice je: $H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, tedy

$f''_s(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 2y + 2y + 2x) = 2y + x$.

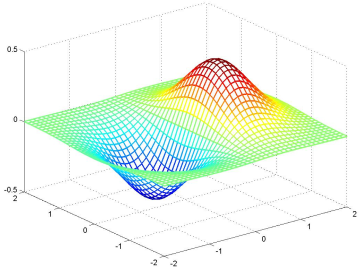
Grafické znázornění funkce dvou proměnných

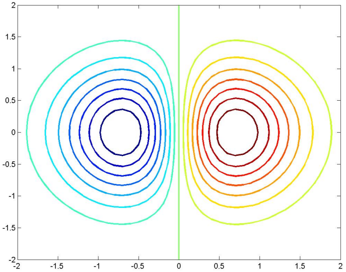
V třírozměrném prostoru si můžeme graf funkce dvou proměnných představit jako zemský povrch. Pro znázornění povrchu ve 2D se používají většinou vrstevnice funkce.



Grafické znázornění funkce dvou proměnných

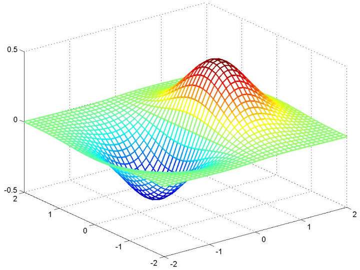
Podobným způsobem si můžeme znázornit třeba funkci $f(x, y) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$.

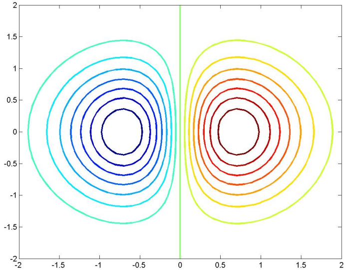




Grafické znázornění funkce dvou proměnných

Podobným způsobem si můžeme znázornit třeba funkci $f(x,y) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$.

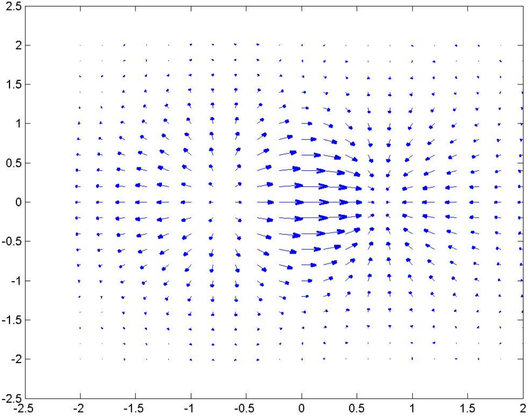




Vrstevnicí funkce $f(x,y)$ "o nadmořské výšce c"rozumíme množinu všech bodů $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takových, že platí $f(x,y) = c$. Například pro výše uvedenou funkci $f(x,y)$ určíme nultou vrstevnici jako množinu všech řešení rovnice o dvou neznámých $\frac{x}{e^{x^2+y^2}} = 0$. Zřejmě musí být $x = 0$, ale y je libovolné, tedy dostaneme množinu $\{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

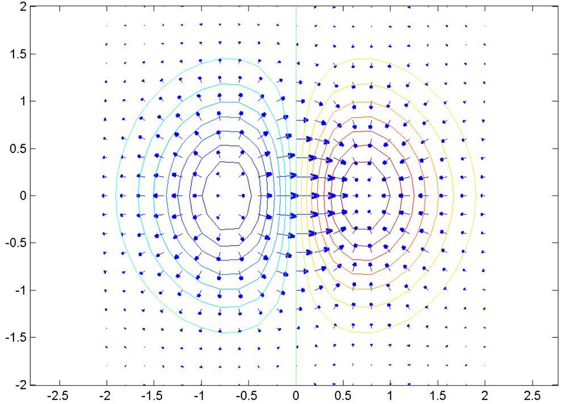
Grafické znázornění gradientů funkce dvou proměnných

Gradient $\nabla f(x, y)$ většinou znázorňujeme jako vektor vycházející z bodu (x, y) do bodu $(x + f'_x(x, y),\ y + f'_y(x, y))$. Na obrázku vidíme gradienty funkce $f(x, y) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$ v bodech pravidelné sítě.



Gradienty a vrstevnice

Znázorníme-li gradienty funkce do stejného obrázku s vrstevnicemi, můžeme si všimnout, že se jeví jako normálové vektory vrstevnic. Dá se ukázat, že libovolná funkce f v zadaném bodě $\mathbf{x}$ nejprudčeji roste ve směru gradientu $\nabla f(\mathbf{x})$ a nejstrměji klesá ve směru $-\nabla f(\mathbf{x})$.



Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.
Řešení: Funkce $z = x^3y^4$ má spojité parciální derivace $f'_x(x, y) = 3x^2y^4$ a $f'_y(x, y) = 4x^3y^3$ v každém bodě $[x, y]$, tedy i v bodě $[2, 3]$. Dostáváme pak

$$dz = (3x^2y^4)_{[2,3]}dx + (4x^3y^3)_{[2,3]}dy,$$

$$dz = 972\,dx + 864\,dy.$$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a + h, b + k] \in U_\delta([a, b])$ platí:

$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \eta(h, k)$ a zároveň

$\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h,k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a+h, b+k] \in U_\delta([a,b])$ platí:
$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \eta(h,k)$ a zároveň
$\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$

Význam věty:
$f(a+dx, b+dy) - f(a,b)$ je přírůstek funkce při přechodu z bodu $[a,b]$ do bodu $[a+dx, b+dy]$. Předchozí vztah lze tedy zapsat takto
$\Delta f = f(a+dx, b+dy) - f(a,b) = df_{a,b}(dx,dy) + \eta(dx,dy).$
Jestliže nahradíme přírůstek Δf přírůstkem na tečné rovině df, dopustíme se chyby $\eta(dx,dy)$, tato chyba se blíží k nule, blížíme-li se k bodu $[a,b]$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \ldots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n] \in \Omega$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$.

Analogicky případu $n = 2$ lze formulovat větu, ze které vyplývá, že pokud má funkce $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) \approx f'_{x_1}(X_0)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0)dx_n.$$

Totální diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině, přejdeme-li z bodu $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ do bodu $X = [x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n]$.

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x, \ y$:

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right).$$

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2\right).$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_2(x, y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a, b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x, y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $T_2(x, y)$ až do řádu 2 se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_2(x, y)$ nazýváme Taylorovým polynomem řádu 2 příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1,1]$ jsou
$f'_x(1,1) = 1,\ f'_y(1,1) = 0,\ f''_{xx}(1,1) = 0,\ f''_{xy}(1,1) = 1,\ f''_{yy}(1,1) = 0$, takže
$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)(y-1)$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1,1]$ jsou
$f'_x(1,1) = 1$, $f'_y(1,1) = 0$, $f''_{xx}(1,1) = 0$, $f''_{xy}(1,1) = 1$, $f''_{yy}(1,1) = 0$, takže
$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)(y-1)$

Aplikujeme tento vztah pro odhad $0,9^{1,1}$ pomocí $T_2(0,9;1,1)$:
$0,9^{1,1} \approx T_2(0,9;1,1) = 1 + \frac{1}{1!}(0,9-1) + \frac{2}{2!}(0,9-1)(1,1-1) = 0,89.$

Hessova matice kvadratické formy

Příklad : Určete Hessovu matici kvadratické formy
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Hessova matice kvadratické formy

Příklad : Určete Hessovu matici kvadratické formy
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $Q(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{array}{ccc} Q''_{11} = 6 & Q''_{12} = 0 & Q''_{13} = 6 \\ Q''_{21} = 0 & Q''_{22} = 2 & Q''_{23} = -4 \\ Q''_{31} = 6 & Q''_{32} = -4 & Q''_{33} = 16 \end{array}$$

Hessova matice kvadratické formy

Příklad : Určete Hessovu matici kvadratické formy
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $Q(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{array}{lll} Q''_{11} = 6 & Q''_{12} = 0 & Q''_{13} = 6 \\ Q''_{21} = 0 & Q''_{22} = 2 & Q''_{23} = -4 \\ Q''_{31} = 6 & Q''_{32} = -4 & Q''_{33} = 16 \end{array}$$

Již dříve jsme zavedli maticový zápis $Q(x) = x'\mathbf{A}x$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)'$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Nyní vidíme, že $H(x_1, x_2, x_3) = 2\mathbf{A}$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.
Řešení: Funkce $z = x^3y^4$ má spojité parciální derivace $f'_x(x, y) = 3x^2y^4$ a $f'_y(x, y) = 4x^3y^3$ v každém bodě $[x, y]$, tedy i v bodě $[2, 3]$. Dostáváme pak

$$dz = (3x^2y^4)_{[2,3]}dx + (4x^3y^3)_{[2,3]}dy,$$

$$dz = 972\,dx + 864\,dy.$$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a + h, b + k] \in U_\delta([a, b])$ platí:

$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \eta(h, k)$ a zároveň

$\lim\limits_{[h,k] \to [0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h| + |k|} = 0.$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a + h, b + k] \in U_\delta([a, b])$ platí:
$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \eta(h, k)$ a zároveň
$\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$

Význam věty:
$f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$ je přírůstek funkce při přechodu z bodu $[a, b]$ do bodu $[a + dx, b + dy]$. Předchozí vztah lze tedy zapsat takto
$\Delta f = f(a + dx, b + dy) - f(a, b) = df_{a,b}(dx, dy) + \eta(dx, dy)$.
Jestliže nahradíme přírůstek Δf přírůstkem na tečné rovině df, dopustíme se chyby $\eta(dx, dy)$, tato chyba se blíží k nule, blížíme-li se k bodu $[a, b]$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \ldots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n] \in \Omega$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$.

Analogicky případu $n = 2$ lze formulovat větu, ze které vyplývá, že pokud má funkce $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) \approx f'_{x_1}(X_0)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0)dx_n.$$

Totální diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině, přejdeme-li z bodu $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ do bodu $X = [x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n]$.

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2\right).$$

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2\right).$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_2(x, y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a, b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x, y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $T_2(x, y)$ až do řádu 2 se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_2(x, y)$ nazýváme Taylorovým polynomem řádu 2 příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right).$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_2(x, y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a, b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x, y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $T_2(x, y)$ až do řádu 2 se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_2(x, y)$ nazýváme Taylorovým polynomem řádu 2 příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Poznámka : Místo výrazů $(x - a),\ (y - b)$ lze také psát $dx,\ dy$.

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0, 0) = 0$,

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0, 0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x, y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0, 0) = (0, 0)^\top$,

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0, 0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x, y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0, 0) = (0, 0)^\top$,
a pro Hessovu matici platí $\mathbf{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0, 0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x, y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0, 0) = (0, 0)^\top$,
a pro Hessovu matici platí $\mathbf{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
Dostaneme tedy $T_2(0, 0) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}(0(x - 0) + 0(y - 0)) + \frac{1}{2!}\left(2(x - 0)^2 + 2 \cdot 5(x - 0)(y - 0) + 6(y - 0)^2\right) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x,y)$ v bodě $[0,0]$ pro kvadratickou formu $Q(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0,0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x,y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0,0) = (0,0)^\top$,
a pro Hessovu matici platí $\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
Dostaneme tedy $T_2(0,0) = f(0,0) + \frac{1}{1!}(0(x-0) + 0(y-0)) + \frac{1}{2!}\left(2(x-0)^2 + 2\cdot 5(x-0)(y-0) + 6(y-0)^2\right) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Věta : Pro kvadratickou formu $Q(x,y)$ platí $T_2(x,y) = Q(x,y)$.

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y)$:
$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x, y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x, y) = y \cdot (y - 1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x, y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x, y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y)$:
$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x, y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x, y) = y \cdot (y - 1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x, y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x, y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1, 1]$ jsou
$f'_x(1, 1) = 1,\ f'_y(1, 1) = 0,\ f''_{xx}(1, 1) = 0,\ f''_{xy}(1, 1) = 1,\ f''_{yy}(1, 1) = 0$, takže
$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}(x - 1) + 1 + \frac{1}{2!}(x - 1)(y - 1)$

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1,1]$ jsou
$f'_x(1,1) = 1,\ f'_y(1,1) = 0,\ f''_{xx}(1,1) = 0,\ f''_{xy}(1,1) = 1,\ f''_{yy}(1,1) = 0$, takže
$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + 1 + \frac{1}{2!}(x-1)(y-1)$

Aplikujeme tento vztah pro odhad $0,9^{1,1}$ pomocí $T_2(0,9;1,1)$:
$0,9^{1,1} \approx T_2(0,9;1,1) = 1 + \frac{1}{1!}(0,9-1) + 1 + \frac{2}{2!}(0,9-1)(1,1-1) = 0,89.$

Konvexní množina

Konvexita hraje v matematice pro ekonomy významnou roli. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní, jestliže pro každé dva její body $A,\ B$ jsou všechny body úsečky AB také prvky množiny M. Tuto vlastnost můžeme analyticky vyjádřit symbolickým zápisem:

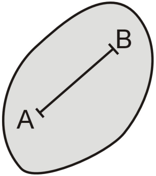
$$A, B \in M \Rightarrow \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : \lambda A + (1 - \lambda) B \in M$$

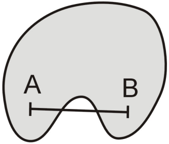
Konvexní množina

Konvexita hraje v matematice pro ekonomy významnou roli. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní, jestliže pro každé dva její body $A,\ B$ jsou všechny body úsečky AB také prvky množiny M. Tuto vlastnost můžeme analyticky vyjádřit symbolickým zápisem:

$$A, B \in M \Rightarrow \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : \lambda A + (1 - \lambda) B \in M$$

(výrazu na pravé straně se říká konvexní kombinace $A,\ B$) Na obrázku je znázorněn příklad konvexní a nekonvexní množiny.





Poznámka : Prázdná a jednobodová množina jsou triviálně konvexní. Průnik dvou konvexních množin je opět konvexní množinou (toto tvrzení lze rozšířit pro průnik více konvexních množin). Platí totéž i pro sjednocení?

Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$$

Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B).$$

Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."

Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:
$$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$$
Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."Pro opačné nerovnosti dostaneme definici konkávní, resp. ryze konkávní funkce.

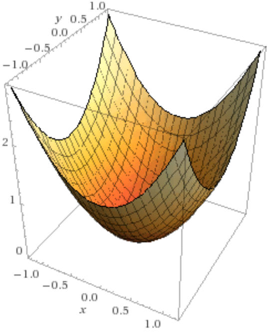
Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$

Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."Pro opačné nerovnosti dostaneme definici konkávní, resp. ryze konkávní funkce.

Na obrázku je znázorněn příklad funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$, která je ryze konvexní v $\mathbb{R}^2$.



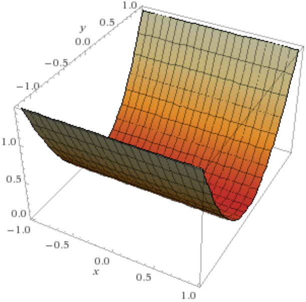
Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$

Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."Pro opačné nerovnosti dostaneme definici konkávní, resp. ryze konkávní funkce.

Na obrázku je znázorněn příklad funkce $f(x, y) = y^2$, která je (neryze) konvexní v $\mathbb{R}^2$.



Konvexní a konkávní funkce

Příklady konvexních funkcí v $\mathbb{R}^n$:

- Pro libovolný vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$ konvexní na $\mathbb{R}^n$ (není ale ryze konvexní). Současně je tato funkce i konkávní (není ale ryze konkávní).
- Euklidovská metrika $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ je konvexní na $\mathbb{R}^n$.

Konvexní a konkávní funkce

Příklady konvexních funkcí v $\mathbb{R}^n$:

- Pro libovolný vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$ konvexní na $\mathbb{R}^n$ (není ale ryze konvexní). Současně je tato funkce i konkávní (není ale ryze konkávní).
- Euklidovská metrika $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je konvexní na $\mathbb{R}^n$.

Pro konvexní funkce platí řada tvrzení:

- Jsou-li $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ konvexní funkce, pak jejich součet $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ je též konvexní (totéž platí i pro součin $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ v případě nezápornosti funkcí).
- Funkce $f(\mathbf{x})$ je (ryze) konvexní funkce $\Leftrightarrow -f(\mathbf{x})$ je (ryze) konkávní.
- Pro konvexní funkci $f(\mathbf{x})$ na $\mathbb{R}^n$ a libovolnou konstantu c platí: Množina $X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ je konvexní. Všechny funkce splňující zadanou podmínku pro $\forall c \in \mathbb{R}$ se souhrně nazývají kvazikonvexní. Kvazikonvexita je tedy slabší pojem než konvexita. Tento pojem se v ekonomii hodně používá, neboť ekonomové někdy vyjadřují užitek pomocí preferencí a ne pomocí přesně specifikované měřitelné užitkové funkce (ordinalita vs kardinalita).

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace.

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu).

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f''_s(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).
Příklad : Je funkce $f(x, y, z) = x^2 + z \cdot y^2$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1, 1]$?

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f''_s(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Příklad : Je funkce $f(x, y, z) = x^2 + z \cdot y^2$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1, 1]$?

Řešení: Spočítáme Hessovu matici:

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f''_s(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Příklad : Je funkce $f(x, y, z) = x^2 + z \cdot y^2$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1, 1]$?

Řešení: Spočítáme Hessovu matici: $H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, například pro vektor $\mathbf{s} = (-1, -1, 2)$ platí $\mathbf{s} \cdot H(1,1,1) \cdot \mathbf{s}^\top = -4 < 0$, ale pro vektor $\mathbf{s} = (1, 1, 1)$ platí $\mathbf{s} \cdot H(1,1,1) \cdot \mathbf{s}^\top = 8 > 0$ Funkce není v bodě $[1, 1, 1]$ ani konvexní ani konkávní.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Lokální extrémy

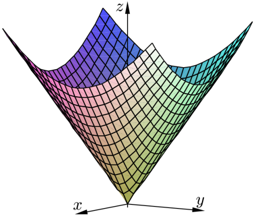
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad: Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má minimum v bodě $[0, 0]$, kde neexistují parciální derivace.



Lokální extrémy

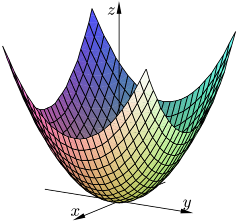
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad: Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má minimum ve stacionárním bodě $[0, 0]$.



Lokální extrémy

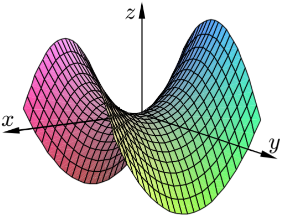
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad: Funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ má stacionární bod $[0, 0]$, kde není extrém, jedná se o sedlový bod.



Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Sylvestrovo kritérium

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in Df$ její stacionární bod. Označme $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ determinant submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců Hessovy matice $H(\mathbf{a})$. Pak

1. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) > 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. minimum.
2. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) < 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ (-1)^n D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. maximum.
3. Jestliže jsou všechny minory $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ nenulové a přitom neplatí žádná z předchozích možností, pak v bodě $\mathbf{a}$ není extrém.

Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Sylvestrovo kritérium

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in Df$ její stacionární bod. Označme $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ determinant submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců Hessovy matice $H(\mathbf{a})$. Pak

1. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) > 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. minimum.
2. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) < 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ (-1)^n D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. maximum.
3. Jestliže jsou všechny minory $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ nenulové a přitom neplatí žádná z předchozích možností, pak v bodě $\mathbf{a}$ není extrém.

Příklad: Hessova matice funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ ve stacionárním bodě $[0, 0]$ je: $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, její hlavní minory jsou $D_1(0, 0) = 2,\ D_2(0, 0) = 4$, tedy je pozitivně definitní a v bodě $[0, 0]$ je minimum.

Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Sylvestrovo kritérium

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in Df$ její stacionární bod. Označme $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \dots, n$ determinant submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců Hessovy matice $H(\mathbf{a})$. Pak

1. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) > 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \dots,\ D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. minimum.
2. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) < 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \dots,\ (-1)^n D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. maximum.
3. Jestliže jsou všechny minory $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \dots, n$ nenulové a přitom neplatí žádná z předchozích možností, pak v bodě $\mathbf{a}$ není extrém.

Příklad: Hessova matice funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ ve stacionárním bodě $[0, 0]$ je: $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, její hlavní minory jsou $D_1(0, 0) = 2,\ D_2(0, 0) = -4$, tedy je indefinitní a v bodě $[0, 0]$ není extrém.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad : Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad : Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy$.
Řešení: První derivace jsou $f'_x = 2xy + y^2 - y, f'_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení:
$x = y = 0;\ x = 0, y = 1;\ x = 1, y = 0;\ x = 1/3, y = 1/3$, což dává čtyři stacionární body dané funkce.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad : Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$.
Řešení: První derivace jsou $f'_x = 2xy + y^2 - y$, $f'_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení: $x = y = 0$; $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 1/3, y = 1/3$, což dává čtyři stacionární body dané funkce. Hodnoty Hessovy matice ve stacionárních bodech jsou postupně $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $H(1/3, 1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Pouze poslední matice je pozitivně definitní, funkce má jen jedno lokální minimum, a to v bodě $[1/3, 1/3]$.

Globální extrémy

Řekneme, že funkce f dosahuje na množině X v bodě $\mathbf{a} \in X$ svého

1. globálního maxima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
2. globálního minima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$

Poznámka: Místo pojmu globální též používáme pojem absolutní. Opět definujeme ostré extrémy, jestliže nerovnosti jsou ostré pro $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Globální extrémy

Řekneme, že funkce f dosahuje na množině X v bodě $\mathbf{a} \in X$ svého

1. globálního maxima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
2. globálního minima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$

Poznámka: Místo pojmu globální též používáme pojem absolutní. Opět definujeme ostré extrémy, jestliže nerovnosti jsou ostré pro $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Weierstrassova věta:

Je-li $X \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na X, pak má f na X globální extrémy, a to buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici množiny X.

Globální extrémy

Řekneme, že funkce f dosahuje na množině X v bodě $\mathbf{a} \in X$ svého

1. globálního maxima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
2. globálního minima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$

Poznámka: Místo pojmu globální též používáme pojem absolutní. Opět definujeme ostré extrémy, jestliže nerovnosti jsou ostré pro $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Weierstrassova věta:

Je-li $X \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na X, pak má f na X globální extrémy, a to buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici množiny X.

Poznámka: Není-li množina X uzavřená nebo ohraničená, pak globální extrémy nemusí existovat. Pokud extrémy existují, jsou jejich hodnoty určeny jednoznačně. Funkce však může nabývat těchto hodnot obecně ve více bodech. Hranici množiny lze většinou popsat pomocí rovnic. Vyšetřování hranice je úlohou s omezením.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1, 0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1, 0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.
Pro další postup stanovíme podezřelé body. Nejprve vyšetříme stacionární body jako řešení soustavy

$$f'_x = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

$$f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1,0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.
Pro další postup stanovíme podezřelé body. Nejprve vyšetříme stacionární body jako řešení soustavy

$$f'_x = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

$$f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

Nalezli jsme bod $P_1 = [1,0]$. Další skupinou podezřelých bodů je hraniční elipsa, a to proto, že hranice je vždy podezřelá a navíc v jejích bodech neexistují parciální derivace.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1, 0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.
Pro další postup stanovíme podezřelé body. Nejprve vyšetříme stacionární body jako řešení soustavy

$$f'_x = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

$$f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

Nalezli jsme bod $P_1 = [1, 0]$. Další skupinou podezřelých bodů je hraniční elipsa, a to proto, že hranice je vždy podezřelá a navíc v jejích bodech neexistují parciální derivace.

Porovnáme funkční hodnoty, $f(P_1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2 - 4 \cdot 0^2} = 1$. Pro libovolný bod P_e na hraniční elipse platí: $f(P_e) = 0$. Tedy funkce má v bodě P_1 globální maximum a ve všech bodech hranice nabývá globálního minima.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku, který je určen body $A = [0; 0]$; $B = [2; 0]$; $C = [2; 1]$; $D = [0; 1]$.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ na obdélníku, který je určen body $A = [0; 0]$; $B = [2; 0]$; $C = [2; 1]$; $D = [0; 1]$.

Řešení: Nalezneme lokální extrémy funkce f. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f'_y = 2y - 1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhých derivací je rovna $H(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ na obdélníku, který je určen body $A = [0; 0]$; $B = [2; 0]$; $C = [2; 1]$; $D = [0; 1]$.

Řešení: Nalezneme lokální extrémy funkce f. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f'_y = 2y - 1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhých derivací je rovna $H(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f.
Hranice zadané množiny je tvořena čtyřmi úsečkami AB, BC, CD a DA. Je tedy třeba řešit čtyři optimalizační úlohy s funkcí f a postupně s podmínkami $V_1 : y = 0$, $V_2 : x = 2$, $V_3 : y = 1$ a $V_4 : x = 0$.

Pozor! Při této formulaci je zapotřebí zvlášť vyšetřit body A, B, C, D, protože nehledáme extrémy na celých hraničních přímkách, ale pouze na příslušných úsečkách.

Globální extrémy - příklad

Úlohy optimalizace f za podmínky V_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde

$F_1(x) = f(x, 0) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_2(y) = f(2, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$,
$F_3(x) = f(x, 1) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_4(y) = f(0, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$.

Globální extrémy - příklad

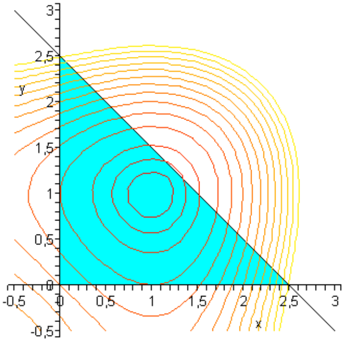
Úlohy optimalizace f za podmínky V_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde
$F_1(x) = f(x, 0) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_2(y) = f(2, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$,
$F_3(x) = f(x, 1) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_4(y) = f(0, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$.
Snadno se zjistí, že jednotlivé úlohy mají minimum v bodech postupně: $a = [1, 0]$, $b = [2, \frac{1}{2}]$, $c = [1, 1]$ a $d = [0, \frac{1}{2}]$. Hodnoty funkce f ve všech podezřelých bodech shrneme v tabulce:

x	s	A	B	C	D	a	b	c	d
f(**x**)	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1

Je zřejmé, že nejmenší hodnoty dosahuje funkce v bodě $s = [1, \frac{1}{2}]$ a největší v bodech A, B, C, D.

Optimalizace s omezením - grafické řešení

Uvažujme úlohu optimalizace funkce $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x \geq 0,\ y \geq 0, 2x + 2y \leq 5$. Problém si můžeme znázornit graficky. Modře je vyznačena přípustná množina, vrstevnice jsou odstupňovány od nejnižší červené po nejvyšší žlutou.



Zřejmě má funkce f na množině M minimum v bodě $[1, 1]$ a maximum v bodech $[0; 2, 5]$ a $[2, 5; 0]$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots m.$

Jsou - li funkce f i $g_i, \; i = 1, \dots, m$ spojitě diferencované a jsou - li gradienty omezení ∇g_i lineárně nezávislé vektory (tj. žádné omezení není nadbytečné), pak pro bod optima $\mathbf{x}^*$ existují jednoznačné hodnoty $\lambda_1, \; \dots, \lambda_m$, takové, že:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Čísla $\lambda_1, \; \dots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory a umožňují převedení optimalizační úlohy na řešení systému rovnic.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \dots m.$

Jsou - li funkce f i $g_i,\ i = 1, \dots, m$ spojitě diferencované a jsou - li gradienty omezení ∇g_i lineárně nezávislé vektory (tj. žádné omezení není nadbytečné), pak pro bod optima $\mathbf{x}^*$ existují jednoznačné hodnoty $\lambda_1, \ \dots, \lambda_m$, takové, že:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Čísla $\lambda_1, \ \dots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory a umožňují převedení optimalizační úlohy na řešení systému rovnic. Jaký je formální postup? Vytvoří se tzv. Lagrangeova funkce

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x})$$

a sestaví se podmínky pro její stacionární body, tzv. podmínky 1. řádu:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0, \quad \nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

Jde o systém $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých (posledních m rovnic vyjadřuje vlastně vazební podmínky). Jestliže má tento systém řešení $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ a jsou-li f i M konvexní, pak je bod $\mathbf{x}^*$ globálním minimem funkce f na množině M.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze:
Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze: Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Řešení: Hledáme tedy bod $[x, y, z]$ ležící v zadané rovině, pro nějž je vzdálenost od bodu $[5, 1, 2]$ minimální. Místo minimalizace funkce $f(x, y, z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$ můžeme pro zjednodušení výpočtu minimalizovat její druhou mocninu. Abychom mohli použít Lagrangeův multiplikátor, je třeba rovnici omezení anulovat: $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze: Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Řešení: Hledáme tedy bod $[x, y, z]$ ležící v zadané rovině, pro nějž je vzdálenost od bodu $[5, 1, 2]$ minimální. Místo minimalizace funkce $f(x, y, z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$ můžeme pro zjednodušení výpočtu minimalizovat její druhou mocninu. Abychom mohli použít Lagrangeův multiplikátor, je třeba rovnici omezení anulovat: $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Sestavme Lagrangeovu funkci úlohy:
$L(x, y, z, \lambda) = (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(2x + 3y + z - 6)$ a určeme její parciální derivace:
$L_x(x, y, z, \lambda) = 2(x-5) + 2\lambda,$
$L_y(x, y, z, \lambda) = 2(y-1) + 3\lambda,$
$L_z(x, y, z, \lambda) = 2(z-2) + \lambda,$
$L_\lambda(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + z - 6.$

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze: Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Řešení: Hledáme tedy bod $[x, y, z]$ ležící v zadané rovině, pro nějž je vzdálenost od bodu $[5, 1, 2]$ minimální. Místo minimalizace funkce $f(x, y, z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$ můžeme pro zjednodušení výpočtu minimalizovat její druhou mocninu. Abychom mohli použít Lagrangeův multiplikátor, je třeba rovnici omezení anulovat: $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Sestavme Lagrangeovu funkci úlohy:
$L(x, y, z, \lambda) = (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(2x + 3y + z - 6)$ a určeme její parciální derivace:
$L_x(x, y, z, \lambda) = 2(x-5) + 2\lambda,$
$L_y(x, y, z, \lambda) = 2(y-1) + 3\lambda,$
$L_z(x, y, z, \lambda) = 2(z-2) + \lambda,$
$L_\lambda(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + z - 6.$
Položíme parciální rovnice rovny nule a dostaneme lineární systém, jehož vyřešením získáme bod optima $[\frac{52}{14}, \frac{-13}{14}, \frac{19}{14}]$. Protože minimalizovaná funkce i přípustná množina jsou konvexní, nalezli jsme bod minima.

Úloha lineárního programování

Úvod do problematiky lineárního programování ilustrujme na následující optimalizační úloze převzaté z knihy Josefa Jablonského "Operační výzkum, Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování":

Balírny a pražírny kávy DE, a.s. plánují výrobu dvou směsí *Mocca* a *Standard*. Od dodavatelů mají k dispozici tři druhy kávových bobů K_1, K_2 a K_3 v kapacitě 40, 60 a 25 tun. Technologický postup určující skladbu směsí shrňme v tabulce.

Komponenta	*Mocca*	*Standard*	Kapacita [t]
K_1	0,5	0,25	40
K_2	0,5	0,5	60
K_3		0,25	25

Vzhledem k výrobním nákladům a prodejní ceně směsí byl vykalkulován zisk, který činí 20000 Kč resp. 14000 Kč na jednu tunu směsi *Mocca* resp. *Standard*. Management firmy chce naplánovat produkci tak, aby její zisk byl maximální.

Formulace úlohy optimalizace výrobního programu

Označíme - li x_1 množství tun směsi *Mocca* a x_2 množství tun směsi *Standard*, můžeme problém formulovat matematicky jako úlohu maximalizovat účelovou funkci:

$$z = 20000x_1 + 14000x_2$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcrl} 0,5x_1 & + & 0,25x_2 & \leq 40 \\ 0,5x_1 & + & 0,5x_2 & \leq 60 \\ & & 0,25x_2 & \leq 25 \\ & & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Formulace úlohy optimalizace výrobního programu

Označíme - li x_1 množství tun směsi *Mocca* a x_2 množství tun směsi *Standard*, můžeme problém formulovat matematicky jako úlohu maximalizovat účelovou funkci:

$$z = 20000x_1 + 14000x_2$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcrl} 0,5x_1 & + & 0,25x_2 & \leq 40 \\ 0,5x_1 & + & 0,5x_2 & \leq 60 \\ & & 0,25x_2 & \leq 25 \\ & & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Je možný též maticový zápis úlohy:

$z = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to max$ za podmínek $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$

kde $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2)^\top$ je vektor strukturních proměnných, $\mathbf{c} = (20,\ 14)^\top$ je vektor cenových koeficientů v účelové funkci, $\mathbf{b} = (40, 60, 25)^\top$ je vektor kapacitních omezení a $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ je matice strukturních koeficientů.

Matematická formulace obecné úlohy lineárního programování (LP)

Obecnou úlohu LP pro n proměnných a m omezení můžeme zapsat takto: minimalizuj (maximalizuj) funkci

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; ? \; b_i, \;\; i = 1, \ldots m$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \ldots n,$$

kde na místě symbolů ? můžou být libovolná relační znaménka $\leq, =, \geq$. Omezení se uvádějí v takové podobě, aby pravé strany b_i byly nezáporné.

Matematická formulace obecné úlohy lineárního programování (LP)

Obecnou úlohu LP pro n proměnných a m omezení můžeme zapsat takto: minimalizuj (maximalizuj) funkci

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; ? \; b_i, \; i = 1, \dots m$$

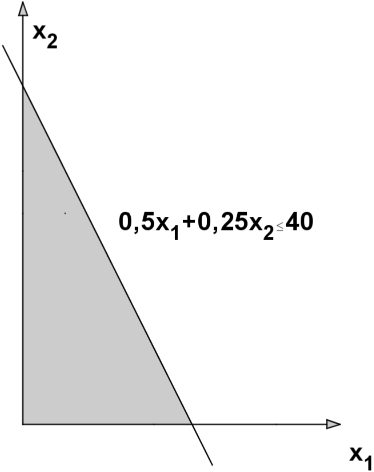
$$x_j \geq 0, \; j = 1, \dots n,$$

kde na místě symbolů ? můžou být libovolná relační znaménka $\leq, =, \geq$. Omezení se uvádějí v takové podobě, aby pravé strany b_i byly nezáporné.

Je dobré si uvědomit, že jednu úlohu lze formulovat různými způsoby, obvykle se uvádí v tzv. základním tvaru. Snadno lze převést úlohu minimalizační na úlohu maximalizace funkce $-z = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$. Omezení ve formě rovnosti lze přepsat jako dvě nerovnice typu $\leq$ a $\geq$ s týmiž koeficienty i pravou stranou jako původní rovnice. Převod omezení ve formě nerovnosti na rovnici se zase řešení zavedením dodatečných proměnných.

Grafické řešení úlohy LP

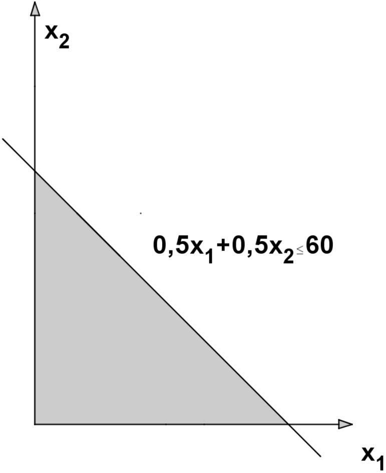
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Kvůli nezápornosti proměnných se omezíme pouze na první kvadrant. Znázorníme zde polorovinu tvořenou body splňujícími první omezující podmínku.

Grafické řešení úlohy LP

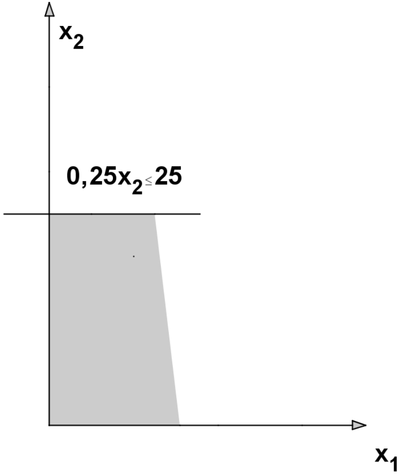
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Znázorníme také polorovinu tvořenou body splňujícími druhou omezující podmínku.

Grafické řešení úlohy LP

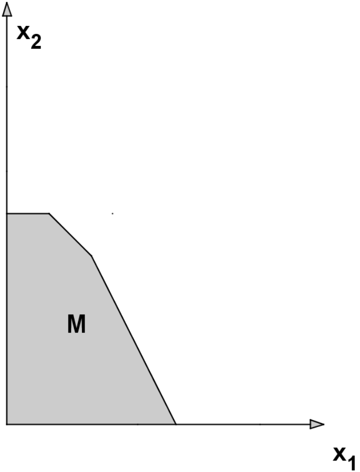
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Znázorníme ještě polorovinu tvořenou body splňujícími třetí omezující podmínku.

Grafické řešení úlohy LP

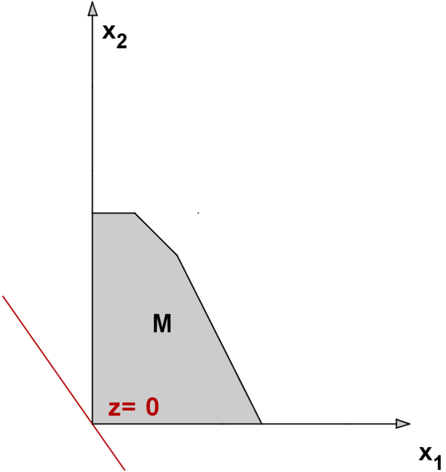
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Množina přípustných řešení *M* je tvořena body, které vyhovují všem omezením.

Grafické řešení úlohy LP

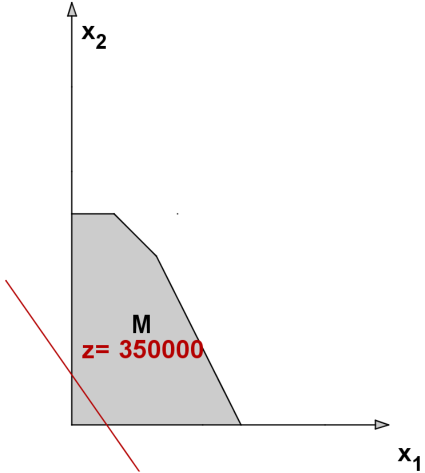
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 0$

Grafické řešení úlohy LP

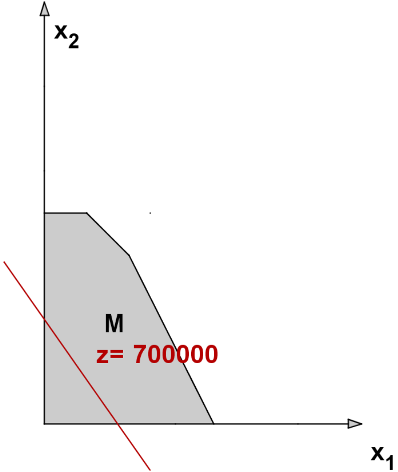
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 350000$

Grafické řešení úlohy LP

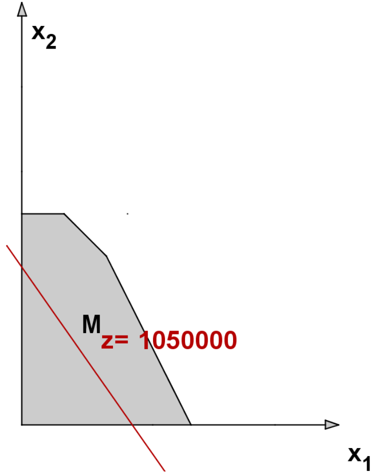
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 700000$

Grafické řešení úlohy LP

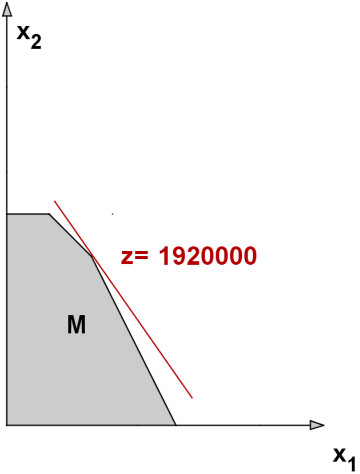
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 1050000$

Grafické řešení úlohy LP

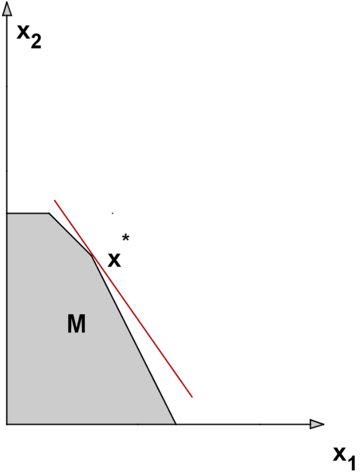
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 1920000$

Grafické řešení úlohy LP

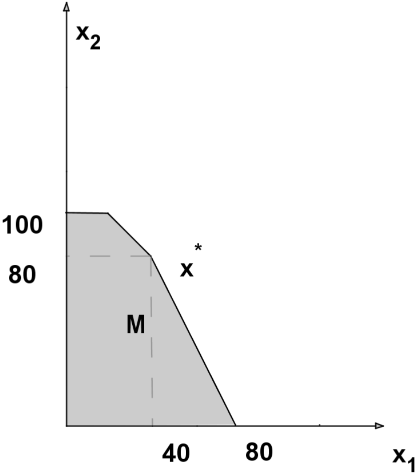
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Nejvyšší izokvanta se dotýká množiny M v bodě x^*

Grafické řešení úlohy LP

Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Bod $x^* = [40, 80]$ je optimálním řešením.

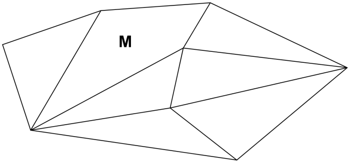
Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.

Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje.

Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.
Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.

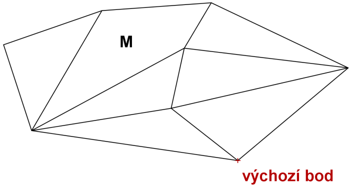


Množina přípustných řešení

Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.

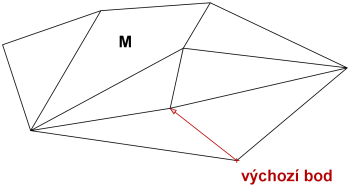
Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Výchozí základní řešení

Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.
Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.

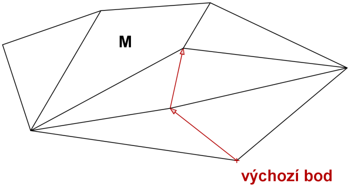


Přesuneme se do sousedního vrcholu s lepší hodnotou účelové funkce

Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.

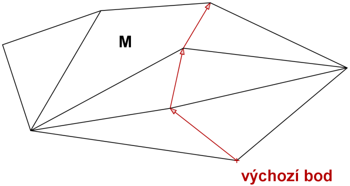
Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Přesuneme se do sousedního vrcholu s ještě lepší hodnotou účelové funkce

Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.
Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.

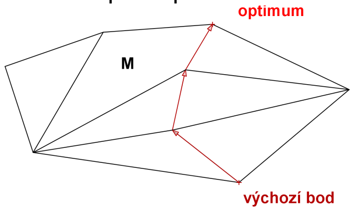


Zase se přesuneme do sousedního vrcholu s lepší hodnotou účelové funkce

Simplexová metoda

Postup hledání optima je založen na tom, že díky tvaru vrstevnic může ležet extrém pouze na kraji přípustné množiny. Přípustná množina je také díky linearitě omezení speciálního tvaru (jde o konvexní mnohostěn), čehož využívá speciální algoritmus řešení úloh LP.

Simplexová metoda je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Nelze se přesunout do žádného lepšího bodu, byl nalezen bod optima

Dualita úloh LP

Na původní úlohu lze nahlížet i jiným způsobem. Předpokládejme, že bychom suroviny nezpracovávali, ale rovnou prodali. Otázka zní, kdy se nám tento přímý prodej zdrojů vyplatí. To bude samozřejmě záviset na zisku z prodeje jednotlivých zdrojů - vyjádříme jej pomocí tzv. duálních proměnných, které označíme w_i (v naší úloze máme tři druhy kávových bobů, tedy $i = 1, 2, 3$).
Můžeme pak formulovat tzv. duální úlohu k výchozímu problému:
Jaký je minimální zisk z prodeje zdrojů, při kterém se nám nevyplatí vyrábět ani jeden výrobek?

Dualita úloh LP

Na původní úlohu lze nahlížet i jiným způsobem. Předpokládejme, že bychom suroviny nezpracovávali, ale rovnou prodali. Otázka zní, kdy se nám tento přímý prodej zdrojů vyplatí. To bude samozřejmě záviset na zisku z prodeje jednotlivých zdrojů - vyjádříme jej pomocí tzv. duálních proměnných, které označíme w_i (v naší úloze máme tři druhy kávových bobů, tedy $i = 1, 2, 3$).
Můžeme pak formulovat tzv. duální úlohu k výchozímu problému:
Jaký je minimální zisk z prodeje zdrojů, při kterém se nám nevyplatí vyrábět ani jeden výrobek? Tedy minimalizujeme zisk z prodeje zdrojů $g(\mathbf{w}) = 40w_1 + 60w_2 + 25w_3$ za omezení, že se nevyplatí vyrábět ani směs Mocca ani Standard, tedy, že platí nerovnosti $0,5w_1 + 0,5w_2 \geq 20$, $0,5w_1 + 0,25w_2 + 0,5w_3 \geq 14$.

Dualita úloh LP

Na původní úlohu lze nahlížet i jiným způsobem. Předpokládejme, že bychom suroviny nezpracovávali, ale rovnou prodali. Otázka zní, kdy se nám tento přímý prodej zdrojů vyplatí. To bude samozřejmě záviset na zisku z prodeje jednotlivých zdrojů - vyjádříme jej pomocí tzv. duálních proměnných, které označíme w_i (v naší úloze máme tři druhy kávových bobů, tedy $i = 1, 2, 3$).
Můžeme pak formulovat tzv. duální úlohu k výchozímu problému:
Jaký je minimální zisk z prodeje zdrojů, při kterém se nám nevyplatí vyrábět ani jeden výrobek? Tedy minimalizujeme zisk z prodeje zdrojů $g(\mathbf{w}) = 40w_1 + 60w_2 + 25w_3$ za omezení, že se nevyplatí vyrábět ani směs Mocca ani Standard, tedy, že platí nerovnosti $0,5w_1 + 0,5w_2 \geq 20,$ $0,5w_1 + 0,25w_2 + 0,5w_3 \geq 14.$ Při použití označení zavedeného výše, kde $\mathbf{c} = (20,\ 14)$ je vektor zisků z prodeje směsí , $\mathbf{b} = (40, 60, 25)^\top$ je vektor kapacit surovin a $\mathbf{A}$ strukturní matice, můžeme porovnat maticový zápis původní, tzv. primární úlohy a úlohy duální:

	primární úloha		duální úloha
maximalizovat	$z = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$	minimalizovat	$g(\mathbf{w}) = \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{w}$
za podm.	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$	za podm.	$\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{w} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{w} \geq 0$

Dualita úloh LP

Obecně lze pro formulaci duální úlohy k úloze LP použít následující pravidla:

Maximalizační úloha	$\leftrightarrow$	Minimalizační úloha
primární	$\leftrightarrow$	duální
duální	$\leftrightarrow$	primární
omezení typu $\leq$	$\leftrightarrow$	nezáporná proměnná
omezení typu $\geq$	$\leftrightarrow$	nekladná proměnná
omezení typu rovnice	$\leftrightarrow$	proměnná neomezená
nezáporná proměnná	$\leftrightarrow$	omezení typu $\geq$
nekladná proměnná	$\leftrightarrow$	omezení typu $\leq$
proměnná neomezená	$\leftrightarrow$	omezení typu rovnice

Poznámka : Pro manažerské rozhodování je důležité zjistit, jaký je vliv změny kapacitního omezení na hodnotu účelové funkce. To nám prozradí optimální hodnoty duálních proměnných w_i. Tyto hodnoty se nazývají stínové ceny a vyjadřují hodnotu, o kterou se změní hodnota účelové funkce, jestliže zvýšíme kapacitu i - tého zdroje b_i o jednotku

Dualita úloh LP

Vztah mezi vzájemně duálními úlohami lze vyjádřit větou o dualitě:

Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje i optimální řešení druhé úlohy a navíc optimální hodnoty účelových funkcí se sobě rovnají!

Dualita úloh LP

Vztah mezi vzájemně duálními úlohami lze vyjádřit větou o dualitě:

Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje i optimální řešení druhé úlohy a navíc optimální hodnoty účelových funkcí se sobě rovnají!

Z této věty logicky plyne, že pokud jedna ze sdružených úloh optimální řešení nemá, tak jej nemůže mít ani úloha druhá, lze ukázat, že pokud jedna úloha nemá žádné přípustné řešení, tak druhá úloha je neomezená a naopak. Dalším důsledkem je tzv. slabá věta o dualitě:

Hodnota účelové funkce maximalizační úlohy je vždy menší nebo rovna hodnotě účelové funkce minimalizační úlohy.

Dualita úloh LP

Vztah mezi vzájemně duálními úlohami lze vyjádřit větou o dualitě:

Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje i optimální řešení druhé úlohy a navíc optimální hodnoty účelových funkcí se sobě rovnají!

Z této věty logicky plyne, že pokud jedna ze sdružených úloh optimální řešení nemá, tak jej nemůže mít ani úloha druhá, lze ukázat, že pokud jedna úloha nemá žádné přípustné řešení, tak druhá úloha je neomezená a naopak. Dalším důsledkem je tzv. slabá věta o dualitě:

Hodnota účelové funkce maximalizační úlohy je vždy menší nebo rovna hodnotě účelové funkce minimalizační úlohy.

Dále platí tzv. věta o rovnováze:

Je-li k-tá proměnná v řešení primární úlohy nenulová (tedy kladná), pak je k-tá podmínka v řešení duální úlohy splněna jako rovnost. Říkáme, že je k-tá podmínka aktivní.

Úloha nelineárního programování (NLP)

Úlohu hledání extrémů funkce n proměnných $f(\mathbf{x})$ na množině M vymezené podmínkami

$g_1(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0$

$g_2(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0$

$\vdots$

$g_m(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0,$

kde alespoň jedna z funkcí $f, \; g_1, \ldots, g_n$ je nelineární, nazveme úlohou nelineárního programování (NLP).

Úloha nelineárního programování (NLP)

Úlohu hledání extrémů funkce n proměnných $f(\mathbf{x})$ na množině M vymezené podmínkami

$g_1(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0$

$g_2(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0$

$\vdots$

$g_m(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0,$

kde alespoň jedna z funkcí $f, \ g_1, \ldots, g_n$ je nelineární, nazveme úlohou nelineárního programování (NLP).

Je-li $m = 0$, tj. nejsou přítomna žádná omezení, hledáme tedy extrémy funkce f na celém $\mathbb{R}^n$ a hovoříme o volných extrémech. V případě, kdy jsou na proměnné uvalena omezení, tj. $m > 0$ nebo když je definiční obor funkce f limitován na nějakou podmnožinu $X \subset \mathbb{R}^n$, hovoříme o vázaných extrémech.

Úloha nelineárního programování (NLP)

Úlohu hledání extrémů funkce n proměnných $f(\mathbf{x})$ na množině M vymezené podmínkami

$g_1(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0$

$g_2(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0$

$\vdots$

$g_m(\mathbf{x}) \leq (resp. =, resp. \geq) 0,$

kde alespoň jedna z funkcí f, $g_1, \ldots, g_n$ je nelineární, nazveme úlohou nelineárního programování (NLP).

Je-li $m = 0$, tj. nejsou přítomna žádná omezení, hledáme tedy extrémy funkce f na celém $\mathbb{R}^n$ a hovoříme o volných extrémech. V případě, kdy jsou na proměnné uvalena omezení, tj. $m > 0$ nebo když je definiční obor funkce f limitován na nějakou podmnožinu $X \subset \mathbb{R}^n$, hovoříme o vázaných extrémech.

Poznámka: U úloh NLP nemusí existovat žádné řešení nebo naopak může existovat více extrémů, z nichž některé jsou pouze lokální. Optimum nemusí ležet pouze na hranici přípustné množiny!

Připomenutí - Lagrangeovy multiplikátory

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots m.$

Jsou - li funkce f i $g_i, \; i = 1, \dots, m$ spojitě diferencované a jsou - li gradienty omezení ∇g_i lineárně nezávislé vektory (tj. žádné omezení není nadbytečné), pak pro bod optima $\mathbf{x}^*$ existují jednoznačné hodnoty $\lambda_1, \; \dots, \lambda_m$, takové, že:

$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$

Čísla $\lambda_1, \; \dots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory a umožňují převedení optimalizační úlohy na řešení systému rovnic.

Připomenutí - Lagrangeovy multiplikátory

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \dots m.$

Jsou - li funkce f i $g_i,\ i = 1, \dots, m$ spojitě diferencované a jsou - li gradienty omezení ∇g_i lineárně nezávislé vektory (tj. žádné omezení není nadbytečné), pak pro bod optima $\mathbf{x}^*$ existují jednoznačné hodnoty $\lambda_1,\ \dots, \lambda_m$, takové, že:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Čísla $\lambda_1,\ \dots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory a umožňují převedení optimalizační úlohy na řešení systému rovnic. Jaký je formální postup? Vytvoří se tzv. Lagrangeova funkce

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x})$$

a sestaví se podmínky pro její stacionární body, tzv. podmínky 1. řádu:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0, \quad \nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

Jde o systém $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých (posledních m rovnic vyjadřuje vlastně vazební podmínky). Jestliže má tento systém řešení $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ a jsou-li f i M konvexní, pak je bod $\mathbf{x}^*$ globálním minimem funkce f na množině M.

Ekonomická interpretace

Příklad z M. W. Klein: Mathematical Methods for Economics:
Uvažujme úlohu hledání optima spotřebitele, který má 6 dolarů, které chce utratit za oběd v samoobslužné restauraci, kde se polévka i hlavní chod platí na váhu, přičemž cena za 1 unci polévky je $\$0,25$ a za 1 unci hlavního chodu je $\$0,5$. Označíme-li S a V zakoupené množství obou chodů (v uncích), pak rozpočtové omezení můžeme zapsat jako $6 = \frac{S}{4} + \frac{V}{2}$. Hledáme takovou kombinaci jídel splňující tuto podmínku, která maximalizuje užitkovou funkci $U(S, V) = \frac{ln(S)}{2} + \frac{ln(V)}{2}$.

Ekonomická interpretace

Příklad z M. W. Klein: Mathematical Methods for Economics:
Uvažujme úlohu hledání optima spotřebitele, který má 6 dolarů, které chce utratit za oběd v samoobslužné restauraci, kde se polévka i hlavní chod platí na váhu, přičemž cena za 1 unci polévky je $\$0,25$ a za 1 unci hlavního chodu je $\$0,5$. Označíme-li S a V zakoupené množství obou chodů (v uncích), pak rozpočtové omezení můžeme zapsat jako $6 = \frac{S}{4} + \frac{V}{2}$. Hledáme takovou kombinaci jídel splňující tuto podmínku, která maximalizuje užitkovou funkci $U(S, V) = \frac{ln(S)}{2} + \frac{ln(V)}{2}$.

Řešení: Zavedeme Lagrangeovu funkci
$L(S, V, \lambda) = \frac{ln(S)}{2} + \frac{ln(V)}{2} - \lambda(\frac{S}{4} + \frac{V}{2} - 6)$. Podmínky prvního řádu jsou:
$L_S(S, V, \lambda) = \frac{1}{2S} - \frac{\lambda}{4} = 0$
$L_V(S, V, \lambda) = \frac{1}{2V} - \frac{\lambda}{2} = 0$
$L_\lambda(S, V, \lambda) = \frac{S}{4} + \frac{V}{2} - 6 = 0$

Ekonomická interpretace

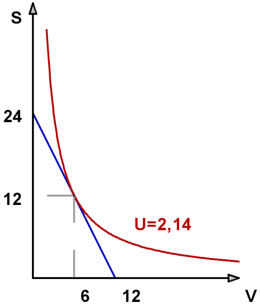
Příklad z M. W. Klein: Mathematical Methods for Economics:
Uvažujme úlohu hledání optima spotřebitele, který má 6 dolarů, které chce utratit za oběd v samoobslužné restauraci, kde se polévka i hlavní chod platí na váhu, přičemž cena za 1 unci polévky je \$0,25 a za 1 unci hlavního chodu je \$0,5. Označíme-li S a V zakoupené množství obou chodů (v uncích), pak rozpočtové omezení můžeme zapsat jako $6 = \frac{S}{4} + \frac{V}{2}$. Hledáme takovou kombinaci jídel splňující tuto podmínku, která maximalizuje užitkovou funkci $U(S, V) = \frac{ln(S)}{2} + \frac{ln(V)}{2}$.

Řešení: Zavedeme Lagrangeovu funkci
$L(S, V, \lambda) = \frac{ln(S)}{2} + \frac{ln(V)}{2} - \lambda(\frac{S}{4} + \frac{V}{2} - 6)$. Podmínky prvního řádu jsou:
$L_S(S, V, \lambda) = \frac{1}{2S} - \frac{\lambda}{4} = 0$
$L_V(S, V, \lambda) = \frac{1}{2V} - \frac{\lambda}{2} = 0$
$L_\lambda(S, V, \lambda) = \frac{S}{4} + \frac{V}{2} - 6 = 0$

Z prvních dvou rovnic lze vyjádřit, že $\lambda = \frac{2}{S} = \frac{1}{V}$, neboli $S = 2V$. Spolu s poslední podmínkou dostaneme řešení $S^* = 12,\ \ V^* = 6$ uncí, $\lambda^* = \frac{1}{6}$, což dává užitek $U(12, 6) = 2,14$.

Ekonomická interpretace

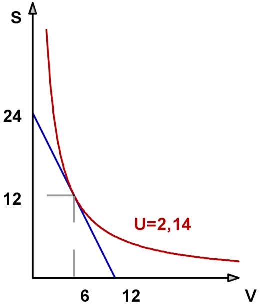
Znázorněme si uvažovanou úlohu graficky.



Sklon rozpočtové linie je dán vztahem dán poměrem cen: $\frac{dS}{dV} = -2$.

Ekonomická interpretace

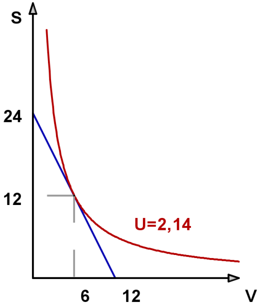
Znázorněme si uvažovanou úlohu graficky.



Sklon rozpočtové linie je dán vztahem dán poměrem cen: $\frac{dS}{dV} = -2$.
Sklon indiferenční křivky je dán poměrem mezních užitků (mezní míra substituce): $\frac{dS}{dV} = -\frac{U_V}{U_S}$.

Ekonomická interpretace

Znázorněme si uvažovanou úlohu graficky.



Sklon rozpočtové linie je dán vztahem dán poměrem cen: $\frac{dS}{dV} = -2$.
Sklon indiferenční křivky je dán poměrem mezních užitků (mezní míra substituce): $\frac{dS}{dV} = -\frac{U_V}{U_S}$.
Spočteme mezní užitky $U_S(S, V) = \frac{1}{2S}$, $U_V(S, V) = \frac{1}{2V}$, jejich podíl je $\frac{U_V}{U_S} = \frac{S}{V}$.
Protože v bodě optima (S^*, V^*) je sklon rozpočtové linie a indiferenční křivky shodný, platí: $-2 = -\frac{S^*}{V^*}$, neboli $\frac{S^*}{4} = \frac{V^*}{2}$ (rovnováha spotřebitele).

Ekonomická interpretace

Získáme-li dodatečný dolar, budeme-li tedy chtít utratit \$7, u nového optimálního řešení bude zachován poměr spotřebovaných jídel: $S^* = 14,\ V^* = 7$ a hodnota Lagrangeova multiplikátoru poklesne na $\frac{1}{7}$. Získaný užitek bude $U(14,7) = 2,29$. Přírůstek užitku je tedy $\Delta U = U(14,7) - U(12,6) = 2,29 - 2,14 = 0,15 = (\frac{1}{6,\overline{6}}) \cdot 1$. Zřejmě jeden dodatečný dolar vyvolal $(\frac{1}{6,\overline{6}})$-násobný přírůstek užitku, což je něco mezi $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{6}$. Můžeme říct, že optimální hodnota Lagrangeova multiplikátoru vyjadřuje mezní užitek peněz určených k útratě.

Ekonomická interpretace

Získáme-li dodatečný dolar, budeme-li tedy chtít utratit \$7, u nového optimálního řešení bude zachován poměr spotřebovaných jídel: $S^* = 14, \; V^* = 7$ a hodnota Lagrangeova multiplikátoru poklesne na $\frac{1}{7}$. Získaný užitek bude $U(14,7) = 2,29$. Přírůstek užitku je tedy $\Delta U = U(14,7) - U(12,6) = 2,29 - 2,14 = 0,15 = (\frac{1}{6,\overline{6}}) \cdot 1$. Zřejmě jeden dodatečný dolar vyvolal $(\frac{1}{6,\overline{6}})$-násobný přírůstek užitku, což je něco mezi $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{6}$. Můžeme říct, že optimální hodnota Lagrangeova multiplikátoru vyjadřuje mezní užitek peněz určených k útratě.

Tento vztah lze ukázat, vyjádříme-li si optimální množství jídel při rozpočtovém omezení B: $S^* = 2B, \; V^* = B$ a $\lambda^* = \frac{1}{B}$. Optimální užitek při rozpočtu B je po úpravě: $f(B) = U(2B, B) = \frac{1}{2} ln(2) + ln(B)$. Derivováním podle B získáme jeho mezní užitek $f'(B) = \frac{1}{B}$, což je rovno λ^*.

Ekonomická interpretace

Získáme-li dodatečný dolar, budeme-li tedy chtít utratit \$7, u nového optimálního řešení bude zachován poměr spotřebovaných jídel: $S^* = 14,\ V^* = 7$ a hodnota Lagrangeova multiplikátoru poklesne na $\frac{1}{7}$. Získaný užitek bude $U(14,7) = 2,29$. Přírůstek užitku je tedy $\Delta U = U(14,7) - U(12,6) = 2,29 - 2,14 = 0,15 = (\frac{1}{6,\overline{6}}) \cdot 1$. Zřejmě jeden dodatečný dolar vyvolal $(\frac{1}{6,\overline{6}})$-násobný přírůstek užitku, což je něco mezi $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{6}$. Můžeme říct, že optimální hodnota Lagrangeova multiplikátoru vyjadřuje mezní užitek peněz určených k útratě.

Tento vztah lze ukázat, vyjádříme-li si optimální množství jídel při rozpočtovém omezení B: $S^* = 2B,\ V^* = B$ a $\lambda^* = \frac{1}{B}$. Optimální užitek při rozpočtu B je po úpravě: $f(B) = U(2B, B) = \frac{1}{2}ln(2) + ln(B)$. Derivováním podle B získáme jeho mezní užitek $f'(B) = \frac{1}{B}$, což je rovno λ^*.

Podobně v úlohách optimalizace výrobního programu, budou Lagrangeovy multiplikátory u omezení pro jednotlivé vstupy vyjadřovat mezní užitek při zvýšení jejich kapacity. Tedy jsou rovny ceně, kterou je výrobce ochoten za dodatečnou jednotku vstupu zaplatit, proto se pro ně používá název stínové ceny.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum

Pro odvození podmínek 2. řádu uvažujme kvadratickou funkci $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, kterou lze též zapsat maticově jako $Q(x, y) = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Předpokládejme, že hledáme optimum této funkce na množině dané lineární rovnicí $Ax + By = 0$.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum

Pro odvození podmínek 2. řádu uvažujme kvadratickou funkci $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, kterou lze též zapsat maticově jako $Q(x, y) = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Předpokládejme, že hledáme optimum této funkce na množině dané lineární rovnicí $Ax + By = 0$.

Vyjádříme-li $y = -\frac{A}{B}x$ a dosadíme-li do Q, dostaneme $f(x) = Q(x, -\frac{A}{B}x) = ax^2 + 2bx(-\frac{A}{B}x) + c(-\frac{A}{B}x)^2 = -\frac{x^2}{B^2}[2bAB - aB^2 - cA^2]$.
Výraz uvnitř hranaté závorky lze také zapsat jako determinant matice $H = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ A & a & b \\ B & b & c \end{pmatrix}$, což je vlastně Hessova matice Lagrangeovy funkce $L(\lambda, x, y) = \lambda(Ax + By) + Q(x, y)$. Pokud je $det(H)$ záporný, je funkce $f(x)$ konvexní, což je postačující podmínka pro existenci minima ve stacionárním bodě (a je-li kladný, je $f(x)$ konkávní - podmínka pro maximum).

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum

Zobecníme-li odvození z předchozího slajdu pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ optimalizovanou na množině dané rovnicí $g(x, y) = c$, dostaneme podmínky 2. řádu: Označme $H(\lambda, x, y)$ Hessovu matici Lagrangeovy funkce $L(\lambda, x, y) = \lambda(g(x, y) - c) + f(x, y)$. Pak je-li ve stacionárním bodě determinant $det(H(\lambda, x, y))$

- kladný, je stacionární bod bodem maxima
- záporný, je stacionární bod bodem minima

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum

Zobecníme-li odvození z předchozího slajdu pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ optimalizovanou na množině dané rovnicí $g(x,y)=c$, dostaneme podmínky 2. řádu: Označme $H(\lambda,x,y)$ Hessovu matici Lagrangeovy funkce $L(\lambda,x,y)=\lambda(g(x,y)-c)+f(x,y)$. Pak je-li ve stacionárním bodě determinant $det(H(\lambda,x,y))$

- kladný, je stacionární bod bodem maxima
- záporný, je stacionární bod bodem minima

Příklad: Pro úlohu zákazníka restaurace má Lagrangeova funkce $L(\lambda,S,V)=\frac{ln(S)}{2}+\frac{ln(V)}{2}+\lambda(\frac{S}{4}+\frac{V}{2}-6)$ Hessovu matici

$H=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2S^2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2V^2} \end{pmatrix}$. Její determinant je $det(H(\lambda,S,V))=\frac{1}{8S^2}+\frac{1}{32V^2}$, což je kladné číslo pro jakékoliv $S,\ V$, takže ve stacionárním bodě nastává maximum.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum

Zobecněme podmínky 2. řádu dále pro funkci n proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$ optimalizovanou na množině dané soustavou rovnic $g_i(x_1, \dots, x_n) = c_i,\ i = 1, \dots, m$:
Označme $H(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n)$ Hessovu matici Lagrangeovy funkce $L(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n)$, pak pro její hodnotu v případném stacionárním bodě platí:

1. má - li determinant $H(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n)$ znaménko $(-1)^n$ a všech $n - m$ jejích největších hlavních minorů střídá znaménka, pak ve stacionárním bodě nastává maximum.
2. má - li všech $n - m$ největších hlavních minorů včetně determinantu $H(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n)$ znaménko $(-1)^m$, pak ve stacionárním bodě nastává minimum.
3. Je-li $n - m$ největších hlavních minorů nenulových a přitom neplatí ani jedna z výše uvedených podmínek, pak ve stacionárním bodě není extrém.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum, příklad

Uvažujme modifikaci úlohy zákazníka restaurace, kdy je možné konzumovat ještě džus v ceně 1 dolar za 12 uncí, přitom novou funkci užitku vyjádříme jako $U(S, V, J) = \frac{1}{3} ln(S) + \frac{1}{3} ln(V) + \frac{1}{3} ln(J)$ a rozpočet zůstává \$6.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum, příklad

Uvažujme modifikaci úlohy zákazníka restaurace, kdy je možné konzumovat ještě džus v ceně 1 dolar za 12 uncí, přitom novou funkci užitku vyjádříme jako $U(S, V, J) = \frac{1}{3}ln(S) + \frac{1}{3}ln(V) + \frac{1}{3}ln(J)$ a rozpočet zůstává \$6.

Lagrangeova funkce úlohy bude
$L(\lambda, S, V, J) = \frac{1}{3}ln(S) + \frac{1}{3}ln(V) + \frac{1}{3}ln(J) + \lambda(\frac{S}{4} + \frac{V}{2} + \frac{J}{12} - 6)$. Z podmínek prvního řádu pro proměnné odvodíme $S = 2V,\ J = 6V$ a po dosazení do rozpočtového omezení vyjde $S^* = 8,\ V^* = 4$ a $J^* = 24$ uncí.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum, příklad

Uvažujme modifikaci úlohy zákazníka restaurace, kdy je možné konzumovat ještě džus v ceně 1 dolar za 12 uncí, přitom novou funkci užitku vyjádříme jako $U(S,V,J) = \frac{1}{3}ln(S) + \frac{1}{3}ln(V) + \frac{1}{3}ln(J)$ a rozpočet zůstává \$6.

Lagrangeova funkce úlohy bude $L(\lambda,S,V,J) = \frac{1}{3}ln(S) + \frac{1}{3}ln(V) + \frac{1}{3}ln(J) + \lambda(\frac{S}{4} + \frac{V}{2} + \frac{J}{12} - 6)$. Z podmínek prvního řádu pro proměnné odvodíme $S = 2V, \ J = 6V$ a po dosazení do rozpočtového omezení vyjde $S^* = 8, \ V^* = 4$ a $J^* = 24$ uncí. Hessova matice Lagrangeovy funkce je: $H(\lambda,S,V,J) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3S^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3V^2} & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{3J^2} \end{pmatrix}$.

Podmínka druhého řádu pro případ $n = 3, \ m = 1$ nabývá podoby: "je-li znaménko $det(H)$ rovno $(-1)^3$ a znaménko druhého hlavního minoru $-(-1)^3$, pak ve stacionárním bodě nastává maximum" Pro naši funkci je $det(H) = -(\frac{1}{1296S^2V^2} + \frac{1}{144J^2V^2} + \frac{1}{36S^2J^2})$, což je záporné v každém bodě a přitom determinant 2.hlavního minoru je $\frac{1}{12S^2} + \frac{1}{48V^2}$, což je kladné v každém bodě, takže ve stacionárním bodě nastává maximum.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum, příklad

Uvažujme další modifikaci, kdy kromě rozpočtového omezení uvažujeme ještě podmínku na celkový objem tekutin $S + J = 24$.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum, příklad

Uvažujme další modifikaci, kdy kromě rozpočtového omezení uvažujeme ještě podmínku na celkový objem tekutin $S + J = 24$.

Lagrangeova funkce úlohy bude
$L(\lambda, \mu, S, V, J) = \frac{1}{3} ln(S) + \frac{1}{3} ln(V) + \frac{1}{3} ln(J) + \lambda(\frac{S}{4} + \frac{V}{2} + \frac{J}{12} - 6) + \mu(S + J - 24)$.
Z podmínek prvního řádu pro proměnné odvodíme $V = \frac{SJ}{3(J-S)}$ a po dosazení do soustavy omezení vyjde $S^* = 8$, $V^* = \frac{16}{3}$ a $J^* = 16$ uncí.

Lagrangeova funkce - postačující podmínky pro optimum, příklad

Uvažujme další modifikaci, kdy kromě rozpočtového omezení uvažujeme ještě podmínku na celkový objem tekutin $S + J = 24$.

Lagrangeova funkce úlohy bude
$L(\lambda, \mu, S, V, J) = \frac{1}{3} ln(S) + \frac{1}{3} ln(V) + \frac{1}{3} ln(J) + \lambda(\frac{S}{4} + \frac{V}{2} + \frac{J}{12} - 6) + \mu(S + J - 24)$.
Z podmínek prvního řádu pro proměnné odvodíme $V = \frac{SJ}{3(J-S)}$ a po dosazení do soustavy omezení vyjde $S^* = 8$, $V^* = \frac{16}{3}$ a $J^* = 16$ uncí. Hessova matice Lagrangeovy funkce je: $H(\lambda, \mu, S, V, J) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{3S^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{3V^2} & 0 \\ \frac{1}{12} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3J^2} \end{pmatrix}$.
Podmínka druhého řádu pro případ $n = 3$, $m = 2$ nabývá podoby: "je-li znaménko $det(H)$ rovno $(-1)^3$, pak ve stacionárním bodě nastává maximum a je-li jeho znaménko rovno $(-1)^2$, pak se jedná o minimum."Lze vypočítat, že pro naši funkci je $det(H) = -(\frac{1}{12S^2} + \frac{1}{12J^2} + \frac{1}{108V^2})$, což je záporné v každém bodě, takže ve stacionárním bodě nastává maximum.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - motivační příklad

Uvažujme jednoduchou optimalizační úlohu
$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 \to min$ za podmínky $x + y \leq 1.$
Můžeme problém převést na úlohu s omezením ve tvaru rovností?

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - motivační příklad

Uvažujme jednoduchou optimalizační úlohu

$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 \to min$ za podmínky $x + y \leq 1.$

Můžeme problém převést na úlohu s omezením ve tvaru rovností?

Přidáme na levou stranu omezující podmínky pomocnou proměnnou:

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - motivační příklad

Uvažujme jednoduchou optimalizační úlohu

$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 \rightarrow min$ za podmínky $x + y \leq 1.$

Můžeme problém převést na úlohu s omezením ve tvaru rovností?
Přidáme na levou stranu omezující podmínky pomocnou proměnnou:
$x + y + w^2 = 1$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci
$L(x, y, w, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 + \lambda \cdot (x + y + w^2 - 1)$

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - motivační příklad

Uvažujme jednoduchou optimalizační úlohu

$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 \to min$ za podmínky $x + y \leq 1.$

Můžeme problém převést na úlohu s omezením ve tvaru rovností?

Přidáme na levou stranu omezující podmínky pomocnou proměnnou: $x + y + w^2 = 1$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci

$L(x, y, w, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 + \lambda \cdot (x + y + w^2 - 1)$

Kromě podmínek $2x - 2 + \lambda = 0,\ 2y - 2 + \lambda = 0$ a $x + y + w^2 - 1 = 0$ dostaneme derivováním podle w ještě $2w\lambda = 0.$

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - motivační příklad

Uvažujme jednoduchou optimalizační úlohu
$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 \to min$ za podmínky $x + y \leq 1.$
Můžeme problém převést na úlohu s omezením ve tvaru rovností?
Přidáme na levou stranu omezující podmínky pomocnou proměnnou:
$x + y + w^2 = 1$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci
$L(x, y, w, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 + \lambda \cdot (x + y + w^2 - 1)$
Kromě podmínek $2x - 2 + \lambda = 0,\ 2y - 2 + \lambda = 0$ a $x + y + w^2 - 1 = 0$
dostaneme derivováním podle w ještě $2w\lambda = 0.$ Je zřejmé, že možnost $\lambda = 0$ nedává žádné řešení, protože z prvních dvou rovnic dostaneme $x = 1$, $y = 1$ a pak třetí podmínka nemá řešení pro w. Musí tedy být $w = 0$, tedy $x + y = 1$, pak sečtením prvních dvou rovnic $2(x + y) - 4 + 2\lambda = 0$, takže $\lambda = 2 - (x + y) = 1$ a $x = y = 1 - \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - motivační příklad

Uvažujme jednoduchou optimalizační úlohu
$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 \to min$ za podmínky $x + y \leq 1.$
Můžeme problém převést na úlohu s omezením ve tvaru rovností?
Přidáme na levou stranu omezující podmínky pomocnou proměnnou:
$x + y + w^2 = 1$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci
$L(x, y, w, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 + \lambda \cdot (x + y + w^2 - 1)$
Kromě podmínek $2x - 2 + \lambda = 0,\ 2y - 2 + \lambda = 0$ a $x + y + w^2 - 1 = 0$
dostaneme derivováním podle w ještě $2w\lambda = 0.$ Je zřejmé, že možnost $\lambda = 0$ nedává žádné řešení, protože z prvních dvou rovnic dostaneme $x = 1$, $y = 1$ a pak třetí podmínka nemá řešení pro w. Musí tedy být $w = 0$, tedy $x + y = 1$, pak sečtením prvních dvou rovnic $2(x + y) - 4 + 2\lambda = 0$, takže $\lambda = 2 - (x + y) = 1$ a $x = y = 1 - \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}$. Podmínka komplementarity
$2w\lambda = 0$ říká, že extrém leží buď na hranici ($w = 0$) nebo ve stacionárním bodě ($\lambda = 0$). Pokud nás omezení nepustí do stac. bodu, musí být λ nezáporná. Skutečně, i kdybychom zvětšili omezující konstantu o nějaké $\delta < 1$, dostaneme $x + y \leq 1 + \delta$. Je-li toto omezení aktivní, musí být $\lambda = 2 - (1 + \delta) = 1 - \delta$ a tedy zřejmě $\lambda \geq 0.$ Shrňme podmínky pro obecnou

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \le c_i, \; i = 1, \dots m.$

Formální postup je obdobný případu s omezujícími rovnostmi: vytvoří se opět Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a sestaví se podmínky 1. řádu:

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \; i = 1, \ldots m.$
Formální postup je obdobný případu s omezujícími rovnostmi: vytvoří se opět Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a sestaví se podmínky 1. řádu:

$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$ (stacionarita)

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i,\ i = 1, \dots m.$
Formální postup je obdobný případu s omezujícími rovnostmi: vytvoří se opět Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a sestaví se podmínky 1. řádu:

$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$ (stacionarita)

$g_i(\mathbf{x}) \leq c_i,\ i = 1, \dots m$ (primární přípustnost)

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \; i = 1, \dots m.$

Formální postup je obdobný případu s omezujícími rovnostmi: vytvoří se opět Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a sestaví se podmínky 1. řádu:

$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$ (stacionarita)

$g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \; i = 1, \dots m$ (primární přípustnost)

$\lambda_i \geq 0, \; i = 1, \dots m$ (duální přípustnost)

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \ i = 1, \dots m.$

Formální postup je obdobný případu s omezujícími rovnostmi: vytvoří se opět Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a sestaví se podmínky 1. řádu:

$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$ (stacionarita)

$g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \ i = 1, \dots m$ (primární přípustnost)

$\lambda_i \geq 0, \ i = 1, \dots m$ (duální přípustnost)

$\lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i) = 0, \ i = 1, \dots m$ (komplementarita)

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \to min$,

na množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \ i = 1, \dots m.$
Formální postup je obdobný případu s omezujícími rovnostmi: vytvoří se opět Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a sestaví se podmínky 1. řádu:

$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$ (stacionarita)

$g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \ i = 1, \dots m$ (primární přípustnost)

$\lambda_i \geq 0, \ i = 1, \dots m$ (duální přípustnost)

$\lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i) = 0, \ i = 1, \dots m$ (komplementarita)

Tyto vztahy se nazývají Kuhn-Tuckerovy podmínky úlohy. Za určitých předpokladů regularity (nezávislost gradientů omezení) se jedná o nutné podmínky pro to, aby v bodě $\mathbf{x}^*$ měla úloha lokální minimum. V tomto kontextu se též používá označení Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky, zkráceně KKT-podmínky.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Interpretace KKT podmínek vychází z ekonomického významu Lagrangeových multiplikátorů.

- Stacionarita a primární přípustnost jsou přirozené požadavky na optimalitu řešení úlohy s omezením.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Interpretace KKT podmínek vychází z ekonomického významu Lagrangeových multiplikátorů.

- Stacionarita a primární přípustnost jsou přirozené požadavky na optimalitu řešení úlohy s omezením.
- Z čeho plyne požadavek duální přípustnosti? Jestliže Lagrangeův multiplikátor λ_i reprezentuje mezní užitek při uvolnění i - tého omezení, pak nerovnost $\lambda_i \geq 0$ znamená, že optimální hodnota účelové funkce se nemůže uvolněním tohoto omezení zhoršit.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností

Interpretace KKT podmínek vychází z ekonomického významu Lagrangeových multiplikátorů.

- Stacionarita a primární přípustnost jsou přirozené požadavky na optimalitu řešení úlohy s omezením.
- Z čeho plyne požadavek duální přípustnosti? Jestliže Lagrangeův multiplikátor λ_i reprezentuje mezní užitek při uvolnění i - tého omezení, pak nerovnost $\lambda_i \geq 0$ znamená, že optimální hodnota účelové funkce se nemůže uvolněním tohoto omezení zhoršit.
- Poslední požadavek komplementarity lze rozepsat jako: $\lambda_i = 0$ nebo $g_i(\mathbf{x}) = c_i$ (případně mohou platit obě rovnosti)

  To znamená, že je-li příslušné omezení v bodě optima neaktivní (tj. není splněné jako rovnost), pak jeho multiplikátor musí být nulový, jinak by šla hodnota účelové funkce zlepšit uvolněním omezení. U aktivních omezení může být obecně i kladná hodnota multiplikátoru.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8}, \; y \geq 0$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8} \right) + \mu(-y)$

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) + \mu(-y)$
Zapišme KKT podmínky pro minimum:
$L'_x = 1 - x + \lambda x = 0$, $L'_y = 2y + 2\lambda y - \mu$ (stacionarita)
$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$ (primární přípustnost)
$\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ (duální přípustnost)
$\lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) = 0$, $\mu y = 0$ (komplementarita)

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x, y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) + \mu(-y)$

Zapišme KKT podmínky pro minimum:

$L'_x = 1 - x + \lambda x = 0,\ L'_y = 2y + 2\lambda y - \mu$ (stacionarita)

$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$ (primární přípustnost)

$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$ (duální přípustnost)

$\lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) = 0,\ \mu y = 0$ (komplementarita)

Výpočet provedeme zvlášť pro všechny kombinace (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

$\lambda = \mu = 0$, pak z podmínek stacionarity dostaneme $x = 1,\ y = 0$, účelová funkce zde má hodnotu $f(1, 0) = \frac{1}{2}$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) + \mu(-y)$

Zapišme KKT podmínky pro minimum:

$L'_x = 1 - x + \lambda x = 0,\ L'_y = 2y + 2\lambda y - \mu$ (stacionarita)

$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$ (primární přípustnost)

$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$ (duální přípustnost)

$\lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) = 0,\ \mu y = 0$ (komplementarita)

Výpočet provedeme zvlášť pro všechny kombinace (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

$\lambda = 0, \mu > 0$, pak opět stacionarita dává $x = 1$ a z podmínek komplementarity musí být $y = 0$. Dostali jsme opět bod $[1, 0]$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) + \mu(-y)$
Zapišme KKT podmínky pro minimum:
$L'_x = 1 - x + \lambda x = 0,\ L'_y = 2y + 2\lambda y - \mu$ (stacionarita)
$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$ (primární přípustnost)
$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$ (duální přípustnost)
$\lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) = 0,\ \mu y = 0$ (komplementarita)
Výpočet provedeme zvlášť pro všechny kombinace (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

$\lambda > 0, \mu = 0$, pak z podmínek stacionarity dostaneme $2y(1+\lambda) = 0$, tedy buď $y = 0$ nebo $\lambda = -1$, což nelze. Druhé souřadnice dopočítáme ze vztahu $\frac{x^2}{2} + 0^2 = \frac{9}{8}$, získáme tedy body $[-\frac{3}{2}, 0],\ [\frac{3}{2}, 0]$, hodnoty λ jsou $\frac{5}{3}$, resp. $\frac{1}{3}$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8}$, $y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) + \mu(-y)$
Zapišme KKT podmínky pro minimum:
$L'_x = 1 - x + \lambda x = 0$, $L'_y = 2y + 2\lambda y - \mu$ (stacionarita)
$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8}$, $y \geq 0$ (primární přípustnost)
$\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ (duální přípustnost)
$\lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) = 0$, $\mu y = 0$ (komplementarita)
Výpočet provedeme zvlášť pro všechny kombinace (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

$\lambda > 0, \mu > 0$ nedává žádný nový bod, protože kvůli komplementaritě je $y = 0$ a současně $\frac{x^2}{2} + y^2 = \frac{9}{8}$, což se shoduje s předchozím případem.

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Najděte minimum funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ na "půlelipse"vymezené nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$.

Řešení: druhé omezení přepíšeme do tvaru $-y \leq 0$ a vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = x - \frac{x^2}{2} + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) + \mu(-y)$

Zapišme KKT podmínky pro minimum:

$L'_x = 1 - x + \lambda x = 0,\ L'_y = 2y + 2\lambda y - \mu$ (stacionarita)

$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8},\ y \geq 0$ (primární přípustnost)

$\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$ (duální přípustnost)

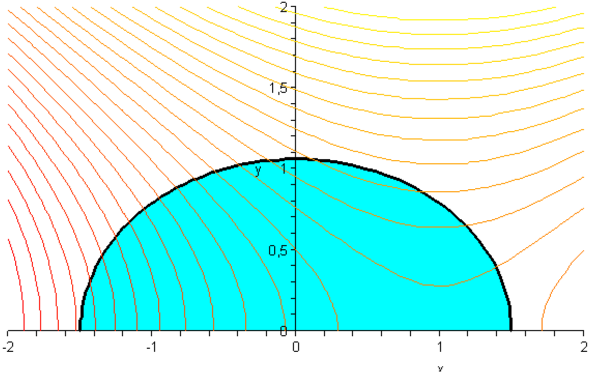
$\lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{9}{8}\right) = 0,\ \mu y = 0$ (komplementarita)

Výpočet provedeme zvlášť pro všechny kombinace (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodech $f(1,0) = \frac{1}{2},\ f(-\frac{3}{2},0) = \frac{-21}{8},\ f(\frac{3}{2},0) = \frac{3}{8}$ zjistíme, že minimum nastává v bodě $[-\frac{3}{2},0]$

Optimalizační úloha s omezením ve formě nerovností - příklad

Znázorněme si vrstevnice funkce $f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} + y^2$ a přípustnou množinu vymezenou nerovnostmi $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{9}{8}, \; y \geq 0$, minimum nastává v bodě $[-\frac{3}{2}, 0]$, maximum v bodě $[\frac{1}{2}, 1]$.



Konvexní programování

Úlohu $f(\mathbf{x}) \to min$ na přípustné množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \; i = 1, \dots m$ nazveme úlohou konvexního programování, jestliže účelová funkce $f(\mathbf{x})$ i levé strany omezení $g_i(\mathbf{x}), \; i = 1, \dots, m$ jsou konvexní funkce.

Konvexní programování

Úlohu $f(\mathbf{x}) \to min$ na přípustné množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \; i = 1, \ldots m$ nazveme úlohou konvexního programování, jestliže účelová funkce $f(\mathbf{x})$ i levé strany omezení $g_i(\mathbf{x}), \; i = 1, \ldots, m$ jsou konvexní funkce.

Věta: Pro úlohu konvexního programování za předpokladu regularity platí:

Vyhovuje-li bod $\mathbf{x}^*$ KKT podmínkám, pak je bodem minima funkce $f(\mathbf{x})$ na M.

V případě konvexního programování je tedy splnění KKT vztahů postačující podmínkou pro existenci minima.

Konvexní programování

Úlohu $f(\mathbf{x}) \to min$ na přípustné množině M vymezené soustavou m nerovnic $g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \ i = 1, \ldots m$ nazveme úlohou konvexního programování, jestliže účelová funkce $f(\mathbf{x})$ i levé strany omezení $g_i(\mathbf{x}), \ i = 1, \ldots, m$ jsou konvexní funkce.

Věta: Pro úlohu konvexního programování za předpokladu regularity platí:

Vyhovuje-li bod $\mathbf{x}^*$ KKT podmínkám, pak je bodem minima funkce $f(\mathbf{x})$ na M.

V případě konvexního programování je tedy splnění KKT vztahů postačující podmínkou pro existenci minima.

Poznámka: Uvažujeme-li v dané úloze konvexního programování při vymezení přípustné množiny M také obligátní podmínky nezápornosti $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, pak lze KKT podmínky přeformulovat následovně:

Funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá svého minima na M v bodě $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ právě tehdy když existuje vektor $\lambda^* \geq \mathbf{0}$, takový že: $L(\mathbf{x}, \lambda^*) \geq L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq L(\mathbf{x}^*, \lambda)$ pro všechny nezáporné vektory $\mathbf{x}, \lambda$.

Toto tvrzení se nazývá Kuhn-Tuckerova věta o sedlovém bodě.

Konvexní programování

Poznámka: Vlastnosti sedlového bodu: Je-li $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$ sedlovým bodem Lagrangeovy funkce na M, pak pro její gradienty zde platí:

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) .\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) .\cdot \lambda = \mathbf{0}$,

kde symbolem ".·"rozumíme násobení vektorů po složkách.

Poznámka: Vlastnosti sedlového bodu: Je-li $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$ sedlovým bodem Lagrangeovy funkce na M, pak pro její gradienty zde platí:

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot \lambda = \mathbf{0},$

kde symbolem ".·"rozumíme násobení vektorů po složkách.

Funkce $L(\mathbf{x}, \lambda)$ nabývá na M v bodě $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ svého minima vzhledem k $\mathbf{x}$ a maxima vzhledem k λ. První dvě podmínky jsou zřejmě zobecněním požadavku stacionarity ($\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$) pro případ s obligátními podmínkami $x \geq 0$.

Konvexní programování

Poznámka: Vlastnosti sedlového bodu: Je-li $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$ sedlovým bodem Lagrangeovy funkce na M, pak pro její gradienty zde platí:

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot \lambda = \mathbf{0},$

kde symbolem ".·"rozumíme násobení vektorů po složkách.

Funkce $L(\mathbf{x}, \lambda)$ nabývá na M v bodě $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ svého minima vzhledem k $\mathbf{x}$ a maxima vzhledem k λ. První dvě podmínky jsou zřejmě zobecněním požadavku stacionarity ($\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$) pro případ s obligátními podmínkami $x \geq 0$. Povšimněme si ještě, že $\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = (g_i(\mathbf{x}) - c_i)_{i=1,\ldots,m}$, poslední dva vztahy vyjadřují tedy podmínky přípustnosti a komplementarity vzhledem k omezujícím podmínkám.

Konvexní programování

Poznámka: Vlastnosti sedlového bodu: Je-li $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$ sedlovým bodem Lagrangeovy funkce na M, pak pro její gradienty zde platí:

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \geq \mathbf{0}$

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) .\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) .\cdot \lambda = \mathbf{0}$,

kde symbolem ".·"rozumíme násobení vektorů po složkách.

Funkce $L(\mathbf{x}, \lambda)$ nabývá na M v bodě $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ svého minima vzhledem k $\mathbf{x}$ a maxima vzhledem k λ. První dvě podmínky jsou zřejmě zobecněním požadavku stacionarity $(\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0})$ pro případ s obligátními podmínkami $x \geq 0$. Povšimněme si ještě, že $\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = (g_i(\mathbf{x}) - c_i)_{i=1,\dots,m}$, poslední dva vztahy vyjadřují tedy podmínky přípustnosti a komplementarity vzhledem k omezujícím podmínkám.

Poznámka: Pro maximalizační úlohy se sestaví Lagrangeova funkce ve tvaru $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$ a v podmínkách pro sedlový bod se uvažují opačné nerovnosti.

Konvexní programování - příklad

Poznámka: Lineární problém $\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to max,\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ je vlastně speciálním případem konvexního programování. Přepíšeme-li si účelovou funkci jako $-\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to min$, budou podmínky pro sedlový bod $(\mathbf{x}, \lambda) \geq \mathbf{0}$ Lagrangeovy funkce následující:

$$-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$$

$$(-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A}). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}). \cdot \lambda = \mathbf{0}$$

Konvexní programování - příklad

Poznámka: Lineární problém $\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to max,\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ je vlastně speciálním případem konvexního programování. Přepíšeme-li si účelovou funkci jako $-\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to min$, budou podmínky pro sedlový bod $(\mathbf{x}, \lambda) \geq \mathbf{0}$ Lagrangeovy funkce následující:

$$-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$$

$$(-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A}). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}). \cdot \lambda = \mathbf{0}$$

S těmito tvrzeními jsme se již setkali dříve, vyjadřují dualitu v úlohách LP. Optimální λ je řešením tzv. duální úlohy $\mathbf{b}^\top \cdot \lambda \to min,\ \mathbf{A}^\top \cdot \lambda \leq \mathbf{c},\ \lambda \geq \mathbf{0}$, protože dosazením vztahu $(-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = 0$ do Lagrangeovy funkce dostaneme tvar $L(\mathbf{x}, \lambda) = -\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + \lambda^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda^\top \cdot \mathbf{b} = -\lambda^\top \cdot \mathbf{b}$.

Konvexní programování - příklad

Poznámka: Lineární problém $\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to max$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ je vlastně speciálním případem konvexního programování. Přepíšeme-li si účelovou funkci jako $-\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} \to min$, budou podmínky pro sedlový bod $(\mathbf{x}, \lambda) \geq \mathbf{0}$ Lagrangeovy funkce následující:

$$-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$$

$$(-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A}). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}). \cdot \lambda = \mathbf{0}$$

S těmito tvrzeními jsme se již setkali dříve, vyjadřují dualitu v úlohách LP.

Optimální λ je řešením tzv. duální úlohy $\mathbf{b}^\top \cdot \lambda \to min$, $\mathbf{A}^\top \cdot \lambda \leq \mathbf{c}$, $\lambda \geq \mathbf{0}$, protože dosazením vztahu $(-\mathbf{c}^\top + \lambda^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = 0$ do Lagrangeovy funkce dostaneme tvar $L(\mathbf{x}, \lambda) = -\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + \lambda^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda^\top \cdot \mathbf{b} = -\lambda^\top \cdot \mathbf{b}$. Řešení primární i duální úlohy jsou totožná. Při velkém počtu omezení ($m >> n$) může být duální úloha mnohem jednodušší, proto se v praxi často při řešení primární úlohy používá tzv. duální algoritmus.

Kvadratické programování

Problém minimalizace funkce $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}$

na množině $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$

nazveme úlohou kvadratického programování.

Kvadratické programování

Problém minimalizace funkce $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}$

na množině $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$

nazveme úlohou kvadratického programování.

Jedná o úlohu konvexního programování? Přípustná množina M je jistě konvexní, stačí ověřit konvexitu účelové funkce. Hessova matice účelové funkce je $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$, je-li tedy tato matice pozitivně definitní, jedná se o konvexní problém.

Kvadratické programování

Problém minimalizace funkce $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}$

na množině $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$

nazveme úlohou kvadratického programování.

Jedná o úlohu konvexního programování? Přípustná množina M je jistě konvexní, stačí ověřit konvexitu účelové funkce. Hessova matice účelové funkce je $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$, je-li tedy tato matice pozitivně definitní, jedná se o konvexní problém. Zapišme podmínky pro sedlový bod Lagrangeovy funkce:

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^\top \cdot \lambda \geq \mathbf{0}$

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot x = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^\top \cdot \lambda). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot \lambda = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}). \cdot \lambda = \mathbf{0}$

Kvadratické programování

Problém minimalizace funkce $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}$

na množině $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$

nazveme úlohou kvadratického programování.

Jedná o úlohu konvexního programování? Přípustná množina M je jistě konvexní, stačí ověřit konvexitu účelové funkce. Hessova matice účelové funkce je $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$, je-li tedy tato matice pozitivně definitní, jedná se o konvexní problém. Zapišme podmínky pro sedlový bod Lagrangeovy funkce:

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^\top \cdot \lambda \geq \mathbf{0}$

$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot x = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^\top \cdot \lambda). \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$

$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}^*, \lambda^*). \cdot \lambda = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}). \cdot \lambda = \mathbf{0}$

Tato soustava se zpravidla upraví pomocí zavedení doplňkových proměnných $\mathbf{w}$, kterými se první nerovnost převede na rovnici $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^\top \cdot \lambda - w = \mathbf{0}$. Dále se úloha řeší jako lineární pomocí upravené simplexové metody, přičemž dodržení podmínky $\mathbf{w}. \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ se zajistí tak, že hlídáme, aby se do báze nedostaly proměnné x_i a w_i nikdy současně ($i = 1, \ldots n$). Na této myšlence je založena tzv. Wolfeho metoda řešení úloh kvadratického programování.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Předpokládejme, že chceme sestavit portfolio z cenných papírů, jejichž výnosy jsou náhodné veličiny, které označíme $X_1, \ldots, X_n$. Tyto náhodné veličiny můžeme charakterizovat očekávaným výnosem $E(X_1), \ldots, E(X_n)$ a také variabilitou vyjádřenou rozptyly $D(X_1), \ldots, D(X_n)$. Navíc mezi jednotlivými dvojicemi cenných papírů může existovat nějaký vztah, kdy se jejich ceny mohou vyvíjet souhlasně či naopak protichůdně - tyto závislosti jsou vyjádřeny pomocí kovariancí $C(X_i, X_j)$. Kovariance a rozptyly lze zapsat souhrnně pomocí variační matice $\mathbf{V}(\mathbf{X})$. Přístupem, založeným na těchto charakteristikách, se zabývá Markowitzův model portfolia.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Předpokládejme, že chceme sestavit portfolio z cenných papírů, jejichž výnosy jsou náhodné veličiny, které označíme $X_1, \ldots, X_n$. Tyto náhodné veličiny můžeme charakterizovat očekávaným výnosem $E(X_1), \ldots, E(X_n)$ a také variabilitou vyjádřenou rozptyly $D(X_1), \ldots, D(X_n)$. Navíc mezi jednotlivými dvojicemi cenných papírů může existovat nějaký vztah, kdy se jejich ceny mohou vyvíjet souhlasně či naopak protichůdně - tyto závislosti jsou vyjádřeny pomocí kovariancí $C(X_i, X_j)$. Kovariance a rozptyly lze zapsat souhrnně pomocí variační matice $\mathbf{V}(\mathbf{X})$. Přístupem, založeným na těchto charakteristikách, se zabývá Markowitzův model portfolia.

Výnos portfolia, ve kterém jsou jednotlivé cenné papíry zastoupeny v podílech $p_1, \ldots, p_n$ je náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^n p_i X_i$. Očekávaný výnos bude roven $E(Y) = \sum_{i=1}^n p_i E(X_i)$. Variabilitu výnosu portfolia je možné vyjádřit pomocí jeho rozptylu, $D(Y) = (p_1, \ldots, p_n) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}) \cdot (p_1, \ldots, p_n)^\top$.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Investor zpravidla požaduje co největší očekávaný výnos $E(Y)$ za co nejmenšího rizika (riziko, tedy nejistotu můžeme vyjádřit právě rozptylem $D(Y)$) Jde o úlohu vícekriteriálního programování $E(Y) \rightarrow max, D(Y) \rightarrow min$ za omezující podmínky $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Investor zpravidla požaduje co největší očekávaný výnos $E(Y)$ za co nejmenšího rizika (riziko, tedy nejistotu můžeme vyjádřit právě rozptylem $D(Y)$) Jde o úlohu vícekriteriálního programování $E(Y) \rightarrow max, D(Y) \rightarrow min$ za omezující podmínky $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Jeden z možných přístupů k řešení této vícekriteriální úlohy je stanovení minimálního požadovaného výnosu R_{min} a minimalizace rizika mezi všemi portfolii s výnosem alespoň R_{min}. Dostaneme úlohu kvadratického programování $f(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}) \cdot (p_1, \dots, p_n)^\top \rightarrow min$, za omezení $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \sum_{i=1}^{n} p_i E(X_i) \geq R_{min}$. Pro nedegenerovaná portfolia je matice $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ pozitivně definitní, takže problém je konvexní.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Investor zpravidla požaduje co největší očekávaný výnos $E(Y)$ za co nejmenšího rizika (riziko, tedy nejistotu můžeme vyjádřit právě rozptylem $D(Y)$) Jde o úlohu vícekriteriálního programování $E(Y) \to max, D(Y) \to min$ za omezující podmínky $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Jeden z možných přístupů k řešení této vícekriteriální úlohy je stanovení minimálního požadovaného výnosu R_{min} a minimalizace rizika mezi všemi portfolii s výnosem alespoň R_{min}. Dostaneme úlohu kvadratického programování $f(p_1, \ldots, p_n) = (p_1, \ldots, p_n) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}) \cdot (p_1, \ldots, p_n)^\top \to min$, za omezení $p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n} p_i E(X_i) \geq R_{min}$. Pro nedegenerovaná portfolia je matice $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ pozitivně definitní, takže problém je konvexní.

Příklad: Navrhněte strukturu portfolia z dvou cenných papírů P_1, P_2, tak aby jeho očekávaný výnos byl alespoň $0,04$ a riziko minimální. Sledováním časových řad cenového vývoje cenných papírů jsme odhadli očekávané výnosy $E(X_1) = 0,03, \ E(X_2) = 0,05$, rozptyly $D(X_1) = 3, \ D(X_2) = 4$ a kovarianci $C(X_1, X_2) = 2$.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Zapíšeme matematický model úlohy:

$f(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \to min$ za podmínky

$p_1, \; p_2 \geq 0, \; 3p_1 + 5p_2 \geq 4, \; p_1 + p_2 \leq 1$.

Poznámka: Očekávané výnosy jsme pro snadnější výpočty vynásobili 100 a poslední podmínku jsme zapsali jako nerovnici (připouštíme tedy i možnost nevyčerpání celé částky na investici!)

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Zapíšeme matematický model úlohy:

$f(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \to min$ za podmínky

$p_1,\ p_2 \geq 0,\ 3p_1 + 5p_2 \geq 4,\ p_1 + p_2 \leq 1$.

Poznámka: Očekávané výnosy jsme pro snadnější výpočty vynásobili 100 a poslední podmínku jsme zapsali jako nerovnici (připouštíme tedy i možnost nevyčerpání celé částky na investici!)

Lagrangeova funkce úlohy má tvar

$L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 3p_1^2 + 4p_1 p_2 + 4p_2^2 + \lambda(p_1 + p_2 - 1) + \mu(-3p_1 - 5p_2 + 4)$

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Zapíšeme matematický model úlohy:

$f(p_1, p_2) = (p_1, p_2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \to min$ za podmínky

$p_1,\ p_2 \geq 0,\ 3p_1 + 5p_2 \geq 4,\ p_1 + p_2 \leq 1$.

Poznámka: Očekávané výnosy jsme pro snadnější výpočty vynásobili 100 a poslední podmínku jsme zapsali jako nerovnici (připouštíme tedy i možnost nevyčerpání celé částky na investici!)

Lagrangeova funkce úlohy má tvar

$L(p_1, p_2, \lambda, \mu) = 3p_1^2 + 4p_1p_2 + 4p_2^2 + \lambda(p_1 + p_2 - 1) + \mu(-3p_1 - 5p_2 + 4)$

Kuhn-Tuckerovy podmínky pro $p_1, p_2, \lambda, \mu \geq 0$ jsou:

$L'_{p_1} = 6p_1 + 4p_2 + \lambda - 3\mu \geq 0,\ (6p_1 + 4p_2 + \lambda - 3\mu)p_1 = 0$

$L'_{p_2} = 4p_1 + 8p_2 + \lambda - 5\mu \geq 0,\ (4p_1 + 8p_2 + \lambda - 5\mu)p_2 = 0$

$L'_{\lambda} = p_1 + p_2 - 1 \leq 0,\ (p_1 + p_2 - 1)\lambda = 0$

$L'_{\mu} = -3p_1 - 5p_2 + 4 \leq 0,\ (-3p_1 - 5p_2 + 4)\mu = 0$

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Při hledání bodu vyhovujícího KT podmínkám uvažujme opět všechny možnosti (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

$\lambda > 0,\ \mu > 0$: Komplementarita pro oba multiplikátory dává $3p_1 + 5p_2 = 4$, $p_1 + p_2 = 1$, což nám dá řešení $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, po dosazení do prvních dvou rovnic dostaneme $5 + \lambda - 3\mu = 0,\ 6 + \lambda - 5\mu = 0$, tato soustava ale dává záporné λ, takže nezískáme žádné řešení.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Při hledání bodu vyhovujícího KT podmínkám uvažujme opět všechny možnosti (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

$\lambda > 0,\ \mu > 0$: Komplementarita pro oba multiplikátory dává $3p_1 + 5p_2 = 4$, $p_1 + p_2 = 1$, což nám dá řešení $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, po dosazení do prvních dvou rovnic dostaneme $5 + \lambda - 3\mu = 0,\ 6 + \lambda - 5\mu = 0$, tato soustava ale dává záporné λ, takže nezískáme žádné řešení.

$\lambda = 0,\ \mu > 0$: Z komplementarity pro μ plyne $3p_1 + 5p_2 = 4$. Zřejmě tedy $p_2 \neq 0$ a druhou podmínku lze vydělit p_2: $4p_1 + 8p_2 - 5\mu = 0$, po vyloučení možnosti $p_1 = 0$ (pokazila by se nezápornost L'_{p_1}) musí být $6p_1 + 4p_2 + \lambda - 3\mu = 0$, takže dostaneme lineární soustavu, jejímž řešením je $p_1 = 0,16$, $p_2 = 0,7$, $\mu = 1,25$ a očekávaný výnos 4 při riziku $2,5$.

Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Při hledání bodu vyhovujícího KT podmínkám uvažujme opět všechny možnosti (ne)nulovosti multiplikátorů λ a μ:

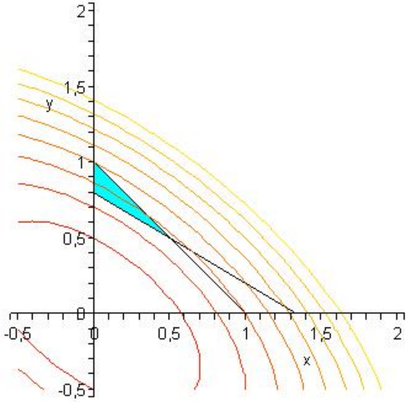
$\lambda > 0,\ \mu > 0$: Komplementarita pro oba multiplikátory dává $3p_1 + 5p_2 = 4$, $p_1 + p_2 = 1$, což nám dá řešení $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, po dosazení do prvních dvou rovnic dostaneme $5 + \lambda - 3\mu = 0,\ 6 + \lambda - 5\mu = 0$, tato soustava ale dává záporné λ, takže nezískáme žádné řešení.

$\lambda = 0,\ \mu > 0$: Z komplementarity pro μ plyne $3p_1 + 5p_2 = 4$. Zřejmě tedy $p_2 \neq 0$ a druhou podmínku lze vydělit p_2: $4p_1 + 8p_2 - 5\mu = 0$, po vyloučení možnosti $p_1 = 0$ (pokazila by se nezápornost L'_{p_1}) musí být $6p_1 + 4p_2 + \lambda - 3\mu = 0$, takže dostaneme lineární soustavu, jejímž řešením je $p_1 = 0,16$, $p_2 = 0,7$, $\mu = 1,25$ a očekávaný výnos 4 při riziku $2,5$.

$\lambda > 0,\ \mu = 0$: Z komplementarity pro λ plyne $p_1 + p_2 = 1$. Pro extrémní případ $p_1 = 0,\ p_2 = 1$ nebo naopak se pokazí nezápornost derivace L'_{p_1} nebo L'_{p_2}. Tedy $p_1,\ p_2 \neq 0$ a první dvě podmínky lze vydělit p_1 a p_2: $6p_1 + 4p_2 + \lambda = 0$, $4p_1 + 8p_2 + \lambda = 0$ a dostaneme soustavu, pro niž však vyjde $\lambda < 0$, takže nezískáme žádné řešení.

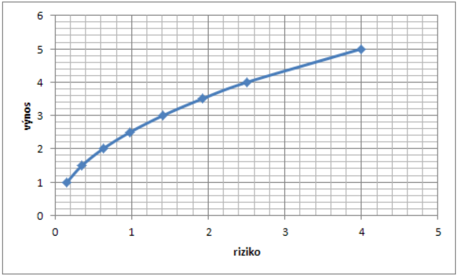
Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

$\lambda = \mu = 0$: Z prvních dvou rovnic dostaneme $(6p_1 + 4p_2)p_1 = 0, \; (4p_1 + 8p_2)p_2 = 0$, což má jediné nezáporné řešení $p_1 = p_2 = 0$, což však nevyhovuje podmínce $3p_1 + 5p_2 \geq 4$.



Kvadratické programování, příklad: optimalizace portfolia

Úlohu bychom mohli řešit i pro jiné aspirační úrovně výnosu R_{min}, například $R_{min} \in \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 5\}$. Vynesme si tyto hodnoty spolu s optimálními hodnotami účelové funkce (tj. minimálními riziky při daném výnosu) graficky v tzv. kriteriálním prostoru:



Spojnice mezi body je odhadem tzv. efektivní hranice, tvořené portfolii, jejichž výnos lze zlepšit jen za cenu zhoršení rizika a naopak. Efektivní hranici také najít pomocí optimalizace funkcí $f(Y) = c \cdot E(Y) - (1 - c) \cdot D(Y)$ na množině všech portfolií, kde konstanta c probíhá interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Příklad : Vyjádřete parciální derivace podle s a t pro funkci složenou z $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ a $x = t - s^2$ a $y = st$.

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Příklad : Vyjádřete parciální derivace podle s a t pro funkci složenou z $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ a $x = t - s^2$ a $y = st$.

Řešení: Vyjádříme

$F'_x(x, y) = 2x$, $F'_y(x, y) = 4y$, $\frac{\partial x}{\partial s} = -2s$, $\frac{\partial y}{\partial s} = t$, $\frac{\partial x}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = s$, takže aplikací pravidla dostaneme

$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x \cdot (-2s) + 4y \cdot t = 2(t - s^2)(-2s) + 4tst = -4st + 4s^3 + 4t^2 s$,

$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot 1 + 4y \cdot s = 2(t - s^2) + 4tss = 2t - 2s^2 + 4ts^2$.

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Příklad : Vyjádřete parciální derivace podle s a t pro funkci složenou z $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ a $x = t - s^2$ a $y = st$.

Řešení: Vyjádříme

$F'_x(x, y) = 2x$, $F'_y(x, y) = 4y$, $\frac{\partial x}{\partial s} = -2s$, $\frac{\partial y}{\partial s} = t$, $\frac{\partial x}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = s$, takže aplikací pravidla dostaneme

$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x \cdot (-2s) + 4y \cdot t = 2(t - s^2)(-2s) + 4tst = -4st + 4s^3 + 4t^2 s$,

$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot 1 + 4y \cdot s = 2(t - s^2) + 4tss = 2t - 2s^2 + 4ts^2$.

Zobecněme pravidlo pro funkci n proměnných $z = F(x_1, \dots, x_n)$, kde $x_1 = f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n = f_m(t_1, \dots, t_m)$:

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}, \text{ pro } j = 1, \dots, m.$$

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x, r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x, r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x, r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x, r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Příklad : Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 + 2ax + 4a^2$ pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ a zjistěte, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá změna parametru a.

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x,r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x,r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Příklad : Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 + 2ax + 4a^2$ pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ a zjistěte, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá změna parametru a.

Řešení: Podmínka pro stacionární bod je $f'(x) = -2x + 2a = 0$, jejímž řešením dostaneme $x^* = a$, což dá $f^* = f(x^*) = -a^2 + 2aa + 4a^2 = 5a^2$. Derivováním podle a dostaneme $f^{*\prime}(a) = 10a$.

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x, r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $\boxed{f^*(r) = max_x f(x, r)}$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Příklad : Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 + 2ax + 4a^2$ pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ a zjistěte, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá změna parametru a.

Řešení: Podmínka pro stacionární bod je $f'(x) = -2x + 2a = 0$, jejímž řešením dostaneme $x^* = a$, což dá $f^* = f(x^*) = -a^2 + 2aa + 4a^2 = 5a^2$. Derivováním podle a dostaneme $f^{*\prime}(a) = 10a$. K tomuto výsledku jsme mohli dojít i jiným způsobem. Označme zadanou $f(x)$ jako funkci dvou proměnných $F(x, a)$. Optimální hodnotu f^* můžeme pak vyjádřit jako složenou funkci $F(x^*, a)$. Podle pravidla o derivování složené funkce platí $f^{*\prime}(a) = F_1'(x^*, a) \cdot x^{*\prime} + F_2'(x^*, a) \cdot 1$. První člen je však díky stacionaritě funkce v bodě optima nulový, $F_1'(x^*, a) = f'(x^*) = 0$. Stačí tedy spočítat parciální derivaci $F(x, a)$ podle a: $F_2'(x, a) = (-x^2 + 2ax + 4a^2)_a' = 2x + 8a$ a dosadit sem za x optimální hodnotu $x^* = a$, takže máme $F_2'(x^*, a) = 2x^* + 8a = 2a + 8a = 10a$.

Obálková věta

Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolný optimalizační problém $max_{x \in M} f(x, r)$ (resp. $min_{x \in M} f(x, r)$), jehož bod optima x^* leží pro každé r uvnitř oblasti M:

Věta : Má-li hodnotová funkce $f^*(r)$ derivaci, platí pro ni

$f^{*\prime}(r) = [f_2'(x, r)]_{x = x^*}$. Toto tvrzení bývá označováno jako obálková věta.

Obálková věta

Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolný optimalizační problém $max_{x \in M} f(x, r)$ (resp. $min_{x \in M} f(x, r)$), jehož bod optima x^* leží pro každé r uvnitř oblasti M:

Věta : Má-li hodnotová funkce $f^*(r)$ derivaci, platí pro ni

$f^{*\prime}(r) = [f_2'(x, r)]_{x=x^*}$. Toto tvrzení bývá označováno jako obálková věta.

Poznámka : k intepretaci obálkové věty: Při změně parametru r se mění optimální hodnota f^* ze dvou důvodů, jednak přímo, protože hodnotu r dosazujeme do $f(x^*, r)$, jednak nepřímo prostřednictvím vlivu na x^*. Věta ukazuje, že tento nepřímý efekt lze ignorovat, neboť změna v x má v okolí stacionárního bodu zanedbatelný vliv na optimální hodnotu f^*.

Obálková věta

Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolný optimalizační problém $max_{x \in M} f(x, r)$ (resp. $min_{x \in M} f(x, r)$), jehož bod optima x^* leží pro každé r uvnitř oblasti M:

Věta : Má-li hodnotová funkce $f^*(r)$ derivaci, platí pro ni

$\boxed{f^{*\prime}(r) = [f_2'(x, r)]_{x=x^*}.}$ Toto tvrzení bývá označováno jako obálková věta.

Poznámka : k intepretaci obálkové věty: Při změně parametru r se mění optimální hodnota f^* ze dvou důvodů, jednak přímo, protože hodnotu r dosazujeme do $f(x^*, r)$, jednak nepřímo prostřednictvím vlivu na x^*. Věta ukazuje, že tento nepřímý efekt lze ignorovat, neboť změna v x má v okolí stacionárního bodu zanedbatelný vliv na optimální hodnotu f^*.

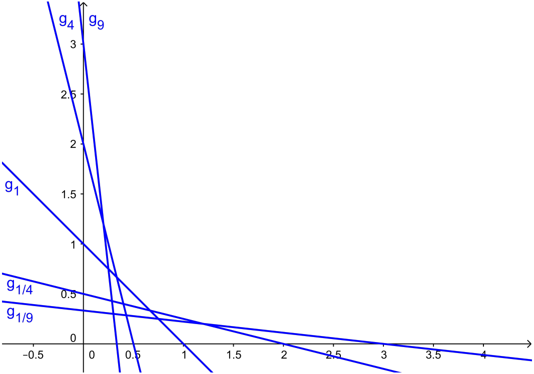
Poznámka : geometrický význam obálkové věty: Označme $g_x(r) = f(r, x)$ funkci s pevnou hodnotou argumentu x. Protože $f^*(r)$ vyjadřuje maximální hodnotu, kterou může funkce $f(x, r)$ pro dané r nabývat, je $f^*(r) \geq g_x(r)\ \forall x \in M$. Tedy graf hodnotové funkce leží nad všemi křivkami $g_x(r),\ x \in M$. Současně pro každé r existuje x^*, takové že $f^*(r) = g_{x^*}(r)$, takže se graf hodnotové funkce v každém bodě některé z těchto křivek dotýká, můžeme říct, že je "obaluje".

Obálková věta - příklad

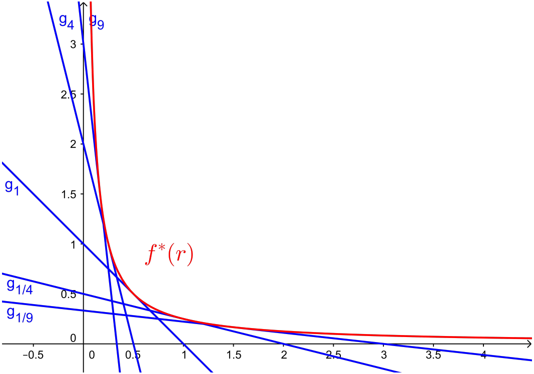
Příklad : Je dána funkce $f(x, r) = \sqrt{x} - rx$. Podle zavedeného značení $f^*(r) = max_x g_x(r)$, kde $g_x(r) = f(r, x)$. Znázorněme na obrázku několik funkcí $g_x(r)$ pro vybrané hodnoty x, například
$g_1(r) = \sqrt{1} - r,\ g_4(r) = 2 - 4r,\ g_9(r) = 3 - 9r$, atd.

Obálková věta - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x, r) = \sqrt{x} - rx$. Podle zavedeného značení $f^*(r) = max_x g_x(r)$, kde $g_x(r) = f(r, x)$. Znázorněme na obrázku několik funkcí $g_x(r)$ pro vybrané hodnoty x, například
$g_1(r) = \sqrt{1} - r,\ g_4(r) = 2 - 4r,\ g_9(r) = 3 - 9r$, atd.



Příklad : Je dána funkce $f(x,r) = \sqrt{x} - rx$. Podle zavedeného značení $f^*(r) = max_x g_x(r)$, kde $g_x(r) = f(r,x)$. Znázorněme na obrázku několik funkcí $g_x(r)$ pro vybrané hodnoty x, například
$g_1(r) = \sqrt{1} - r,\ g_4(r) = 2 - 4r,\ g_9(r) = 3 - 9r$, atd.



Nyní jsme přidali též funkci $f^*(r) = max_x g_x(r)$, jejíž graf shora "obaluje"znázorněné křivky.

Obálková věta - příklad

Příklad : Dořešme optimalizační problém z předchozího příkladu a určeme, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá "jednotková změna"parametru. Stacionární bod pro maximalizaci funkce $f(x,r) = \sqrt{x} - rx$ získáme řešením podmínky $f'_x(x,r) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - r = 0$. Odtud vyjádříme $x^* = \frac{1}{4r^2}$. Aniž bychom explicitně vyjádřili hodnotovou funkci f^*, můžeme podle obálkové věty zjistit její derivaci $f^{*\prime}(r) = f'_2(x^*, r) = [-x]_{x=x^*} = \frac{-1}{4r^2}$. (Tento výsledek lze snadno ověřit pomocí dosazení $f^*(r) = f(x^*, r) = f(\frac{1}{4r^2}, r) = \frac{1}{2r} - \frac{r}{4r^2} = \frac{1}{4r}$. Tedy hodnotová funkce má opravdu derivaci $f^{*\prime}(r) = \frac{-1}{4r^2}$).

Obálková věta pro více parametrů

Formulace obálkové věty pro případ více parametrů $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ je následující:
Věta : Nechť $f^*(\mathbf{r}) = max_x f(x, \mathbf{r})$ a $x^*(\mathbf{r})$ značí bod optima funkce $f(x, \mathbf{r})$.
Pokud existují parciální derivace hodnotové funkce, pak pro ně platí:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \left[\frac{\partial f(x,\mathbf{r})}{\partial r_j}\right]_{x=x^*(\mathbf{r})}, \; j = 1, \ldots, k.$$

Obálková věta pro více parametrů

Formulace obálkové věty pro případ více parametrů $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ je následující:

Věta : Nechť $f^*(\mathbf{r}) = max_x f(x, \mathbf{r})$ a $x^*(\mathbf{r})$ značí bod optima funkce $f(x, \mathbf{r})$. Pokud existují parciální derivace hodnotové funkce, pak pro ně platí:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \left[\frac{\partial f(x,\mathbf{r})}{\partial r_j}\right]_{x=x^*(\mathbf{r})}, \; j = 1, \ldots, k.$$

Poznámka : S pomocí této věty se dají odvodit některá významná tvrzení ekonomické teorie, jako je například Hotellingovo lemma.

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0, \; j = 1, \ldots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right]_{x = x^*(\mathbf{r})}, \; i = 1, \ldots, k.$$

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \ldots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x,\mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{x=x^*(\mathbf{r})}, \ i = 1, \ldots, k.$$

Poznámka : Aplikací na konkrétní ekonomické problémy lze dospět k významným tvrzením jako jsou Shephardovo lemma a Royova identita.

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \dots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{r})}, \ i = 1, \dots, k.$$

Poznámka : Aplikací na konkrétní ekonomické problémy lze dospět k významným tvrzením jako jsou Shephardovo lemma a Royova identita.

Poznámka : Speciální případ dostaneme pro případ, kdy se parametry nevyskytují v účelové funkci, ale pouze jako absolutní členy omezujících rovností: $max_x f(x)$ pro x splňující podmínky $g_j(x) = c_j, \ j = 1, \dots, m$. Pak obálková věta říká, že pro hodnotovou funkci $f^*(\mathbf{c})$ a Lagrangeovu funkci $L(x, \mathbf{c}) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j)$ platí

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{c})}{\partial c_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{c})} = \lambda_i, \ i = 1, \dots, m,$$

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \dots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{r})}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Poznámka : Aplikací na konkrétní ekonomické problémy lze dospět k významným tvrzením jako jsou Shephardovo lemma a Royova identita.

Poznámka : Speciální případ dostaneme pro případ, kdy se parametry nevyskytují v účelové funkci, ale pouze jako absolutní členy omezujících rovností: $max_x f(x)$ pro x splňující podmínky $g_j(x) = c_j, \ j = 1, \dots, m$. Pak obálková věta říká, že pro hodnotovou funkci $f^*(\mathbf{c})$ a Lagrangeovu funkci $L(x, \mathbf{c}) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j)$ plati

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{c})}{\partial c_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{c})} = \lambda_i, \ i = 1, \dots, m,$$

což už jsme zjistili dříve diskuzí ekonomické interpretace významu Lagrangeových multiplikátorů.

Implicitně zadané funkce

Až dosud jsme pracovali s funkcemi v explicitním vyjádření $\boxed{y = f(x_1, \ldots, x_n).}$ V ekonomických aplikacích však nejsou vždy vztahy mezi endogení veličinou a exogenními veličinami vyjádřeny v této ideální podobě, často je dostaneme v podobě rovnice (nebo soustavy rovnic) $\boxed{F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.}$

Implicitně zadané funkce

Až dosud jsme pracovali s funkcemi v explicitním vyjádření $y = f(x_1, \dots, x_n)$.
V ekonomických aplikacích však nejsou vždy vztahy mezi endogení veličinou a exogenními veličinami vyjádřeny v této ideální podobě, často je dostaneme v podobě rovnice (nebo soustavy rovnic) $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.
Pokud z této podmínky lze pro každé $(x_1, \dots, x_n)$ jednoznačně vyjádřit proměnnou y, pak řekneme že vztah definuje implicitně funkci $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Ne vždy však umíme tento předpis nalézt. Přesto by nás zajímala odpověď na otázku, jak změny jednotlivých exogenních proměnných ovlivní endogenní proměnnou y.

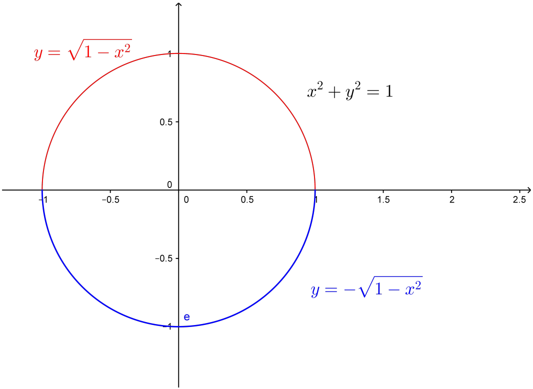
Implicitní funkce - příklad

Příklad : Obecná rovnice přímky $3x + 4y - 12 = 0$ definuje implicitně lineární funkci $y = 3 - \frac{3}{4}x$.

Implicitní funkce - příklad

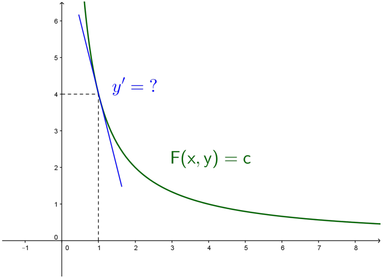
Příklad : Obecná rovnice přímky $3x + 4y - 12 = 0$ definuje implicitně lineární funkci $y = 3 - \frac{3}{4}x$.

Příklad : Obecná rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 1$ je složitějším případem implicitní funkce. Pro $x > 1$ nebo $x < -1$ neexistuje žádné y, které by podmínce vyhovovalo, pro $x \in (-1, 1)$ zase nelze vyjádřit y jednoznačně (dostaneme dvě možnosti $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$). Situace je ilustrována na obrázku.



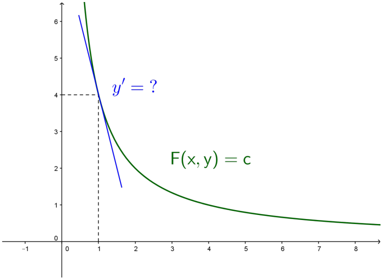
Implicitní funkce - derivace

Uvažujme nejprve jednoduchý případ funkce $y = f(x)$ definované na intervalu I podmínkou $F(x, y) = c$. Graf funkce je reprezentován vrstevnicí funkce dvou proměnných. Podaří-li se nám v bodě $x \in I$ vyjádřit derivaci $y' = f'(x)$, určíme tak sklon vrstevnice v tomto bodě.



Implicitní funkce - derivace

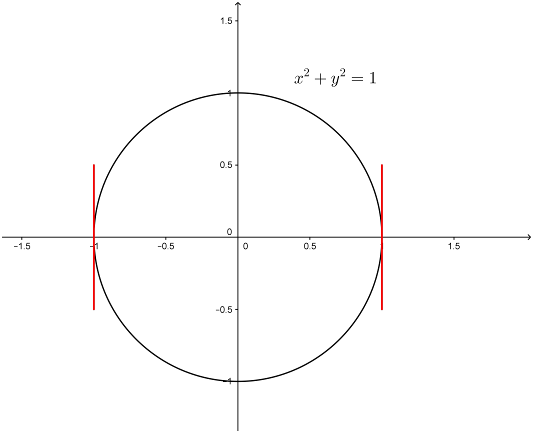
Uvažujme nejprve jednoduchý případ funkce $y = f(x)$ definované na intervalu I podmínkou $F(x, y) = c$. Graf funkce je reprezentován vrstevnicí funkce dvou proměnných. Podaří-li se nám v bodě $x \in I$ vyjádřit derivaci $y' = f'(x)$, určíme tak sklon vrstevnice v tomto bodě.



Přepišme definiční podmínku jako $F(x, f(x)) = c$ a uplatněme na ni pravidlo o derivaci složené funkce $F'_x(x, y) \cdot 1 + F'_y(x, y) \cdot y' = 0$. (Na pravé straně podmínky byla konstanta, proto je po zderivování nulová.) Ze získané rovnice můžeme vyjádřit: $y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, a to pro všechny body, ve kterých platí $F'_y(x, y) \neq 0$.

Derivace implicitní funkce - příklad

Příklad : Vrátíme-li se k předchozímu příkladu $x^2 + y^2 = 1$, kde $F(x, y) = x^2 + y^2$, a tedy $F'_x(x, y) = 2x$ a $F'_y(x, y) = 2y$, dostaneme $y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x}{2y}$, což však není definováno pro y=0. (Z obrázku je zřejmé, že y' neexistuje v bodech (1,0) a (-1,0), protože tečna ke kružnici je v těchto bodech svislá)

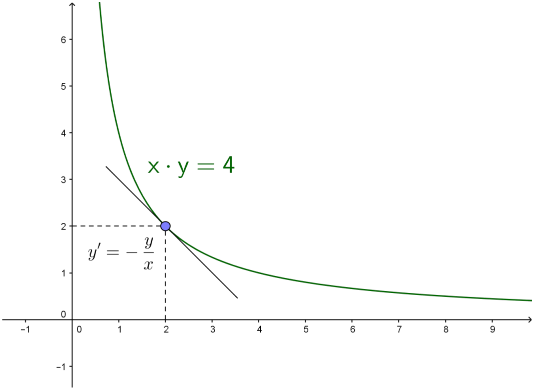


Derivace implicitní funkce - příklad

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně podmínkou $xy = 4$.

Derivace implicitní funkce - příklad

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně podmínkou $xy = 4$.
Řešení: Pro $F(x, y) = xy$ máme $F'_x(x, y) = y$, $F'_y(x, y) = x$, takže $y' = -\frac{y}{x}$.
Můžeme ověřit, že $y = \frac{4}{x}$, takže vztah $y' = -\frac{y}{x} = -\frac{4}{x^2}$ skutečně platí. Situaci máme znázorněnu na obrázku, kde je vyznačen bod $(2, 2)$, ve kterém je derivace rovna -1.



Ekonomická interpretace derivace implicitní funkce

Využití aparátu impliciních funkcí je užitečné například v teorii spotřebitele (předpokládejme, že spotřebovává pouze dva produkty , jejichž množství je x, resp. y). Je-li k dispozici užitková funkce spotřebitele $u(x, y)$, lze jeho preference vyjádřit pomocí indiferenčních křivek s analytickým vyjádřením $u(x, y) = konst$. Derivace $y' = -\frac{u'_x(x,y)}{u'_y(x,y)}$ vyjadřuje sklon indiferenční linie. Její absolutní hodnota, tj. podíl mezních užitků $-y' = \frac{MU_x}{MU_y}$ udává mezní míru substituce ve spotřebě.

Ekonomická interpretace derivace implicitní funkce

Využití aparátu impliciních funkcí je užitečné například v teorii spotřebitele (předpokládejme, že spotřebovává pouze dva produkty , jejichž množství je x, resp. y). Je-li k dispozici užitková funkce spotřebitele $u(x, y)$, lze jeho preference vyjádřit pomocí indiferenčních křivek s analytickým vyjádřením $u(x, y) = konst$. Derivace $y' = -\frac{u'_x(x,y)}{u'_y(x,y)}$ vyjadřuje sklon indiferenční linie. Její absolutní hodnota, tj. podíl mezních užitků $-y' = \frac{MU_x}{MU_y}$ udává mezní míru substituce ve spotřebě.

Příklad : Spočtěte mezní míru substituce pro funkci $u(x, y) = x^a \cdot y^b$, kde a, b jsou kladné konstanty.

Řešení: $MU_x = u'_x = ax^{a-1} \cdot y^b$, $MU_y = u'_y = bx^a \cdot y^{b-1}$, tedy

$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{ax^{a-1} \cdot y^b}{bx^a \cdot y^{b-1}} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x}$.

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ (\text{pro } F'_z \neq 0)$$

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ (\text{pro } F'_z \neq 0)$$

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně podmínkou $x - 2y - 3z + z^2 = -2$.

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ (\text{pro } F'_z \neq 0)$$

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně podmínkou $x - 2y - 3z + z^2 = -2$.
Řešení: Pro $F(x, y, z) = x - 2y - 3z + z^2$ máme
$F'_x(x, y, z) = 1,\ F'_y(x, y, z) = -2,\ F'_z(x, y, z) = -3 + 2z$, takže pro $z \neq 3/2$ máme $z'_x = -\frac{1}{2z-3},\ z'_y = \frac{2}{2z-3}$.

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x,y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x,y,z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x,y,f(x,y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\; (\text{pro } F'_z \neq 0)$$

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření parciálních derivací funkce $z = f(x,y)$ zadané implicitně podmínkou $x - 2y - 3z + z^2 = -2$.
Řešení: Pro $F(x,y,z) = x - 2y - 3z + z^2$ máme
$F'_x(x,y,z) = 1,\; F'_y(x,y,z) = -2,\; F'_z(x,y,z) = -3 + 2z$, takže pro $z \neq 3/2$ máme $z'_x = -\frac{1}{2z-3},\; z'_y = \frac{2}{2z-3}$.

Pro implicitně zadanou funkci n proměnných dostaneme v bodech, kde $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ vztah $F(x_1,\ldots,x_n,y) = c \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y},\; i = 1,\ldots n.$

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je diferenciálními rovnicemi (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je **diferenciálními rovnicemi** (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

- Je-li neznámá funkce x závislá pouze na jedné proměnné, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice,
- v opačném případě se jedná o parciální diferenciální rovnice.

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je **diferenciálními rovnicemi** (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

- Je-li neznámá funkce x závislá pouze na jedné proměnné, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice,
- v opačném případě se jedná o parciální diferenciální rovnice.

My se budeme zabývat pouze prvním typem rovnic a neznámou budeme chápat většinou jako funkci času. Proto pro derivaci funkce $x(t)$ používáme speciální značení $\boxed{\dot{x} = \frac{dx}{dt}.}$ Veškerá níže uvedená teorie je bez újmy na obecnosti aplikovatelná i pro jiné nezávislé proměnné než je čas.

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je diferenciálními rovnicemi (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

- Je-li neznámá funkce x závislá pouze na jedné proměnné, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice,
- v opačném případě se jedná o parciální diferenciální rovnice.

My se budeme zabývat pouze prvním typem rovnic a neznámou budeme chápat většinou jako funkci času. Proto pro derivaci funkce $x(t)$ používáme speciální značení $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Veškerá níže uvedená teorie je bez újmy na obecnosti aplikovatelná i pro jiné nezávislé proměnné než je čas.

Příklad : Typickým příkladem diferenciální rovnice je vztah $\dot{x} = x$, popisující přirozený růst, kdy je tempo růstu přímo úměrné velikosti populace. Používá se též pojem exponenciální růst, protože této rovnici vyhovuje funkce $x(t) = e^t$ (a všechny její násobky).

Diferenciální rovnice prvního řádu

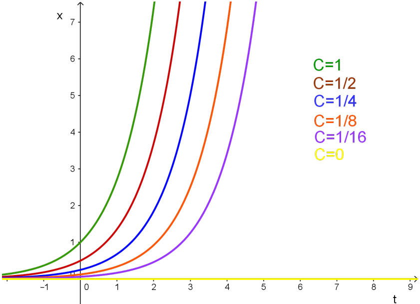
Definice : Pro danou funkci dvou proměnných $F(t, x)$ a neznámou funkci $x(t)$ nazveme zápis $\dot{x} = F(t, x)$ diferenciální rovnicí prvního řádu.

Poznámka : Řešením rovnice na intervalu I nazveme libovolnou funkci $\varphi(t)$ definovanou na tomto intervalu, která rovnici vyhovuje, tj. $\forall t \in I : \ \dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t))$. Diferenciální rovnice obvykle má nekonečně mnoho řešení, množinu všech nazveme obecným řešením, o konkrétních funkcích z této množiny hovoříme jako o partikulárním řešení. Grafy těchto funkcí mohou být znázorněny v rovině tx, říkáme jim integrální křivky.

Diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Pro danou funkci dvou proměnných $F(t,x)$ a neznámou funkci $x(t)$ nazveme zápis $\dot{x} = F(t,x)$ diferenciální rovnicí prvního řádu.

Poznámka : Řešením rovnice na intervalu I nazveme libovolnou funkci $\varphi(t)$ definovanou na tomto intervalu, která rovnici vyhovuje, tj.
$\forall t \in I: \ \dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t))$. Diferenciální rovnice obvykle má nekonečně mnoho řešení, množinu všech nazveme obecným řešením, o konkrétních funkcích z této množiny hovoříme jako o partikulárním řešení. Grafy těchto funkcí mohou být znázorněny v rovině tx, říkáme jim integrální křivky.
Na obrázku je znázorněno několik integrálních křivek pro rovnici $\dot{x} = x$.



Diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = x + t$.

1. Ukažte, že funkce $x = e^t - 1$ není řešením rovnice
2. Ukažte, že funkce $x = -t - 1$ a $x = e^t - t - 1$ jsou řešením rovnice
3. Ukažte, že pro libovolnou hodnotu konstanty C je funkce $x = Ce^t - t - 1$ řešením rovnice.

Diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = x + t$.

1. Ukažte, že funkce $x = e^t - 1$ není řešením rovnice
2. Ukažte, že funkce $x = -t - 1$ a $x = e^t - t - 1$ jsou řešením rovnice
3. Ukažte, že pro libovolnou hodnotu konstanty C je funkce $x = Ce^t - t - 1$ řešením rovnice.

Řešení:

1. Pro $x = e^t - 1$ je $L = \dot{x} = e^t$, ale $P = x + t = e^t + t - 1$, tedy pravá a levá strana se rovnají jen pro $t = 1$, takže funkce není řešením rovnice.
2. Pro $x = -t - 1$ je $L = \dot{x} = -1$ a $P = x + t = -t - 1 + t = -1$, rovnice je splněna.
   Podobně pro $x = e^t - t - 1$ je $L = \dot{x} = e^t - 1$ a
   $P = x + t = e^t - t - 1 + t = e^t - 1$, pravá a levá strana se opět rovnají
3. Pro obecné C je derivace funkce $x = Ce^t - t - 1$ rovna $L = \dot{x} = Ce^t - 1$ a $P = x + t = Ce^t - t - 1 + t = Ce^t - 1$, tedy funkce rovnici vyhovuje.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině *tx*, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.
Řešení: Zapíšeme si podmínku pro řešení $x(t) = Ce^t - t - 1$ ve tvaru $x(0) = 1$. Máme tedy $x(0) = Ce^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1$, odkud určíme $C = 2$.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.
Řešení: Zapíšeme si podmínku pro řešení $x(t) = Ce^t - t - 1$ ve tvaru $x(0) = 1$. Máme tedy $x(0) = Ce^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1$, odkud určíme $C = 2$.

Poznámka : Pokud $t = 0$ značí počáteční čas, pak podmínku $x(0) = 1$ nazýváme počáteční podmínkou. Formulace úloh s počáteční podmínkou je v ekonomii velmi častá. Například uvažujme model ekonomického růstu s diferenciální rovnicí prvního řádu pro akumulaci kapitálu. Počáteční zásoba kapitálu je známa z historických dat, což umožní najít jednoznačné řešení rovnice.

Počáteční podmínky

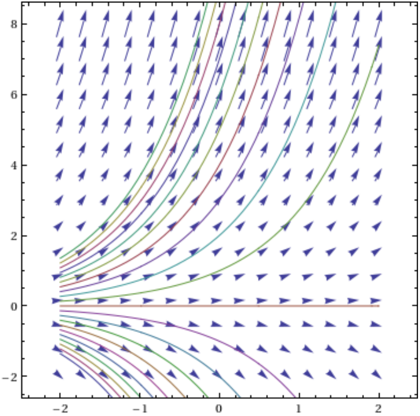
Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.
Řešení: Zapíšeme si podmínku pro řešení $x(t) = Ce^t - t - 1$ ve tvaru $x(0) = 1$. Máme tedy $x(0) = Ce^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1$, odkud určíme $C = 2$.

Poznámka : Pokud $t = 0$ značí počáteční čas, pak podmínku $x(0) = 1$ nazýváme počáteční podmínkou. Formulace úloh s počáteční podmínkou je v ekonomii velmi častá. Například uvažujme model ekonomického růstu s diferenciální rovnicí prvního řádu pro akumulaci kapitálu. Počáteční zásoba kapitálu je známa z historických dat, což umožní najít jednoznačné řešení rovnice. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem (t_0, x_0) žádná další křivka a integrální křivky se nikde neprotínají.

Směrové pole diferenciální rovnice prvního řádu

Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici $\dot{x} = F(t, x)$ chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například na pravidelné síti) bodů (t, x) vektory $(1, F(t, x))$, obdržíme směrové pole diferenciální rovnice, tj. systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.



Otázky související s diferenciálními rovnicemi

- Od počátků systematického zkoumání problematiky diferenciálních rovnic, které započali Newton a Leibnitz v 17. století, se matematikové snaží o explicitní vyjádření řešení určitých typů rovnic
- S rozvojem výpočetní techniky se vyvíjí řada užitečných numerických postupů pro přibližné řešení úloh, u nichž exaktní řešení není známo
- Často není ani nutné explicitní vyjádření a pro praktické použití stačí popis důležitých vlastností řešení (existence, jednoznačnost, citlivost, stabilita, atd.)

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Příklad : Rozhodněte, zda se jedná o rovnice se separovanými proměnnými

1. $\dot{x} = xt + 2t - x - 2$
2. $\dot{x} = t^2 + x$
3. $\dot{x} = 2x$

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Příklad : Rozhodněte, zda se jedná o rovnice se separovanými proměnnými

1. $\dot{x} = xt + 2t - x - 2$
2. $\dot{x} = t^2 + x$
3. $\dot{x} = 2x$

Řešení:

1. ANO, $\dot{x} = (x + 2)(t - 1)$
2. NE, nelze zapsat v požadovaném tvaru
3. ANO, $\dot{x} = 2x \cdot 1$

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Příklad : Rozhodněte, zda se jedná o rovnice se separovanými proměnnými

1. $\dot{x} = xt + 2t - x - 2$
2. $\dot{x} = t^2 + x$
3. $\dot{x} = 2x$

Řešení:

1. ANO, $\dot{x} = (x + 2)(t - 1)$
2. NE, nelze zapsat v požadovaném tvaru
3. ANO, $\dot{x} = 2x \cdot 1$

Poznámka : Má-li funkce $g(x)$ kořen a, pak je automaticky konstantní funkce $x(t) = a$ řešením diferenciální rovnice $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$.

Postup řešení rovnic se separovanými proměnnými

1. Zapíšeme rovnici ve tvaru $\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)}$
2. Separujeme proměnné: $\boxed{\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt}$
3. Zintegrujeme obě strany: $\boxed{\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt}$
4. Pokud je to možné, po zintegrování vyjádříme z rovnice neznámou funkci $x(t)$.
5. Do množiny všech řešení musíme zahrnout též případnou konstantní funkci $x(t) = a$, je-li a nulový bod funkce $g(x)$.

Postup řešení rovnic se separovanými proměnnými

1. Zapíšeme rovnici ve tvaru $\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$
2. Separujeme proměnné: $\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt$
3. Zintegrujeme obě strany: $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt$
4. Pokud je to možné, po zintegrování vyjádříme z rovnice neznámou funkci $x(t)$.
5. Do množiny všech řešení musíme zahrnout též případnou konstantní funkci $x(t) = a$, je-li a nulový bod funkce $g(x)$.

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ a najděte integrální křivku, která prochází bodem $(t, x) = (1, -1)$.

Postup řešení rovnic se separovanými proměnnými

1. Zapíšeme rovnici ve tvaru $\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$
2. Separujeme proměnné: $\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt$
3. Zintegrujeme obě strany: $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt$
4. Pokud je to možné, po zintegrování vyjádříme z rovnice neznámou funkci $x(t)$.
5. Do množiny všech řešení musíme zahrnout též případnou konstantní funkci $x(t) = a$, je-li a nulový bod funkce $g(x)$.

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ a najděte integrální křivku, která prochází bodem $(t, x) = (1, -1)$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že úloha má triviální řešení $x(t) = 0$. Toto řešení však neprochází bodem $(1, -1)$, takže dále postupujeme dle uvedeného návodu.

Rovnice se separovanými proměnnými - pokračování příkladu

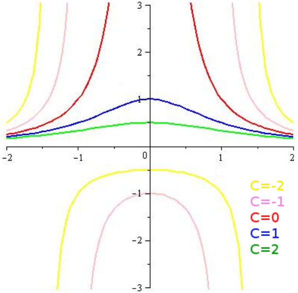
Při řešení rovnice $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ postupujeme v následujících krocích:

- Separuj: $-\frac{dx}{x^2} = 2t\,dt$
- Integruj: $-\int \frac{dx}{x^2} = \int 2t\,dt$
- Vyjádři: $\frac{1}{x} = t^2 + C$, odkud dostaneme $x = \frac{1}{t^2+C}$

Rovnice se separovanými proměnnými - pokračování příkladu

Při řešení rovnice $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ postupujeme v následujících krocích:

- Separuj: $-\frac{dx}{x^2} = 2t\,dt$
- Integruj: $-\int \frac{dx}{x^2} = \int 2t\,dt$
- Vyjádři: $\frac{1}{x} = t^2 + C$, odkud dostaneme $x = \frac{1}{t^2+C}$



Na obrázku je znázorněno několik integrálních křivek, bodem $(1, -1)$ prochází křivka splňující $-1 = \frac{1}{1^2+C}$, tedy křivka pro $C = -2$.

Rovnice se separovanými proměnnými - příklad

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$.

Rovnice se separovanými proměnnými - příklad

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že úloha nemá žádné triviální řešení, $g(x) = \frac{1}{x^6+1}$ nemá žádné nulové body. Postupujeme dle návodu:

- Separuj: $(x^6 + 1)\ dx = t^3\ dt$
- Integruj: $\int (x^6 + 1)\ dx = \int t^3\ dt$
- Vyjádři: $\frac{x^7}{7} + x = \frac{t^4}{4} + C$

Rovnice se separovanými proměnnými - příklad

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že úloha nemá žádné triviální řešení, $g(x) = \frac{1}{x^6+1}$ nemá žádné nulové body. Postupujeme dle návodu:

- Separuj: $(x^6 + 1)\ dx = t^3\ dt$
- Integruj: $\int (x^6 + 1)\ dx = \int t^3\ dt$
- Vyjádři: $\frac{x^7}{7} + x = \frac{t^4}{4} + C$

V této úloze se nám nepodařlo nalézt explicitní vyjádření funkce x, avšak alespoň jsme nalezli pro tuto funkci rovnici, ve které se nevyskytuje její derivace.

Rovnice se separovanými proměnnými - aplikace

Uvedený postup můžeme aplikovat v úlohách o složeném úrokování ve spojitém čase : Označme $w = w(t) > 0$ hodnotu na investičním účtu v čase t, kde úroková míra spojitého úročení je rovna $r = r(t)$. Potom hodnotu w určíme pomocí řešení diferenciální rovnice $\dot{w} = r(t) \cdot w$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Oddělením proměnných a integrováním získáme $\int \frac{dw}{w} = \int r(t)\,dt$. Odtud $\ln w = R(t) + C_1$, kde $R(t) = \int r(t)\,dt$. Řešení můžeme vyjádřit ve tvaru $w = e^{R(t)+C_1} = Ce^{R(t)}$, při označení $C = e^{C_1}$.

Rovnice se separovanými proměnnými - aplikace

Uvedený postup můžeme aplikovat v úlohách o složeném úrokování ve spojitém čase : Označme $w = w(t) > 0$ hodnotu na investičním účtu v čase t, kde úroková míra spojitého úročení je rovna $r = r(t)$. Potom hodnotu w určíme pomocí řešení diferenciální rovnice $\dot{w} = r(t) \cdot w$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Oddělením proměnných a integrováním získáme $\int \frac{dw}{w} = \int r(t)\, dt$. Odtud $\ln w = R(t) + C_1$, kde $R(t) = \int r(t)\, dt$. Řešení můžeme vyjádřit ve tvaru $w = e^{R(t)+C_1} = Ce^{R(t)}$, při označení $C = e^{C_1}$.

Konkrétní řešení pro počáteční hodnotu $w(0)$ je dáno podmínkou $w(0) = Ce^{R(0)}$, odkud vyjádříme $C = w(0)e^{-R(0)}$. Úloha s počáteční podmínkou má tedy jednoznačné řešení $w(t) = w(0)e^{R(t)-R(0)}$, což může být též zapsáno jako $w(t) = w(0)e^{\int_0^t r(s)\, ds}$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme rovnici tvaru $\dot{x} + a(t)x = b(t),$ kde $a(t),\ b(t)$ jsou spojité funkce proměnné t definované na jistém intervalu a $x(t)$ neznámá funkce.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme rovnici tvaru $\dot{x} + a(t)x = b(t),$ kde $a(t),\ b(t)$ jsou spojité funkce proměnné t definované na jistém intervalu a $x(t)$ neznámá funkce.

Příklad : Rovnice $\dot{x} + x = t$ je evidentně uvedeného typu. U rovnice $(t^2+1)\dot{x} + e^t x = t\ln t$ už to tak zřejmé není, ale po vydělení obou stran výrazem t^2+1 již dostaneme požadovaný tvar $\dot{x} + \frac{e^t}{(t^2+1)}x = \frac{t\ln t}{(t^2+1)}$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme rovnici tvaru $\dot{x} + a(t)x = b(t),$ kde $a(t),\ b(t)$ jsou spojité funkce proměnné t definované na jistém intervalu a $x(t)$ neznámá funkce.

Příklad : Rovnice $\dot{x} + x = t$ je evidentně uvedeného typu. U rovnice $(t^2+1)\dot{x} + e^t x = t \ln t$ už to tak zřejmé není, ale po vydělení obou stran výrazem t^2+1 již dostaneme požadovaný tvar $\dot{x} + \frac{e^t}{(t^2+1)}x = \frac{t\ln t}{(t^2+1)}$.

Nejjednodušším případem lineární rovnice 1. řádu je rovnice $\dot{x} + ax = b,$ kde $a,\ b$ jsou konstanty, přičemž $a \neq 0$. Tuto rovnici lze vyřešit pomocí umělého kroku, vynásobení obou stran rovnice výrazem e^{at}. Potom dostaneme $\dot{x}e^{at} + axe^{at} = be^{at},$ kde levá strana odpovídá derivaci součinu $x \cdot e^{at}$. Po zintegrování tedy máme $x \cdot e^{at} = \int be^{at}dt = \frac{b}{a}e^{at} + C$. Vydělíme-li vztah výrazem e^{at}, dostaneme řešení $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$

Poznámka : Pro $C = 0$ dostaneme konstantní řešení $x = \frac{b}{a}$, které nazýváme rovnovážným stavem rovnice. V případě $a > 0$ konverguje každé řešení pro $t \to \infty$ k rovnovážnému stavu, říkáme, že je rovnice stabilní.

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.
Řešení: Dosadíme do odvozeného vztahu $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$ hodnoty $a = 2,\ b = 8$. Dostaneme $x = \frac{8}{2} + Ce^{-2t}$. Rovnovážný stav je $x = 4$ a rovnice je stabilní, protože $a = 2 > 0$. Tedy $x \to 4$ pro $t \to \infty$.

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.
Řešení: Dosadíme do odvozeného vztahu $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$ hodnoty $a = 2,\ b = 8$. Dostaneme $x = \frac{8}{2} + Ce^{-2t}$. Rovnovážný stav je $x = 4$ a rovnice je stabilní, protože $a = 2 > 0$. Tedy $x \to 4$ pro $t \to \infty$.

Popsaný postup může být aplikován i na rovnice s variabilní pravou stranou: $\dot{x} + ax = b(t)$. Pomocí umělé úpravy opět dostaneme $\frac{d}{dt}(x \cdot e^{at}) = b(t)e^{at}$, po zintegrování tedy $x \cdot e^{at} = \int b(t)e^{at}\, dt + C$, odkud

$$x = e^{-at} \int b(t)e^{at}\, dt + Ce^{-at}.$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.
Řešení: Dosadíme do odvozeného vztahu $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$ hodnoty $a = 2,\ b = 8$. Dostaneme $x = \frac{8}{2} + Ce^{-2t}$. Rovnovážný stav je $x = 4$ a rovnice je stabilní, protože $a = 2 > 0$. Tedy $x \to 4$ pro $t \to \infty$.

Popsaný postup může být aplikován i na rovnice s variabilní pravou stranou: $\dot{x} + ax = b(t)$. Pomocí umělé úpravy opět dostaneme $\frac{d}{dt}(x \cdot e^{at}) = b(t)e^{at}$, po zintegrování tedy $x \cdot e^{at} = \int b(t)e^{at}\, dt + C$, odkud

$$x = e^{-at} \int b(t)e^{at}\, dt + Ce^{-at}.$$

Pro obecný případ, kdy jsou oba koeficienty $a,\ b$ nekonstantní uvedeme řešení již bez postupu odvození.
Věta : Rovnice $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, má obecné řešení tvaru

$$x = e^{-\int a(t)\, dt} \left(\int b(t)e^{\int a(t)\, dt}\, dt + C \right).$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka : V případě rovnice s nulovou pravou stranou $\dot{x} + a(t)x = 0$ nazýváme rovnici homogenní. Vzorec pro řešení pak nabývá zjednodušené podoby $x = e^{-\int a(t)\, dt} \left(\int 0 \cdot e^{\int a(t)\, dt}\, dt + C \right) = Ce^{-\int a(t)\, dt}$. K řešení bychom se mohli dostat též pomocí separace proměnných, viz následující příklad.

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka : V případě rovnice s nulovou pravou stranou $\dot{x} + a(t)x = 0$ nazýváme rovnici homogenní. Vzorec pro řešení pak nabývá zjednodušené podoby $x = e^{-\int a(t)\ dt}\left(\int 0 \cdot e^{\int a(t)\ dt}\ dt + C\right) = Ce^{-\int a(t)\ dt}$. K řešení bychom se mohli dostat též pomocí separace proměnných, viz následující příklad.

Příklad : Vyřešte diferenciální rovnici $\dot{x} + 3t^2x = 0$.

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka : V případě rovnice s nulovou pravou stranou $\dot{x} + a(t)x = 0$ nazýváme rovnici homogenní. Vzorec pro řešení pak nabývá zjednodušené podoby $x = e^{-\int a(t)\, dt}\left(\int 0 \cdot e^{\int a(t)\, dt}\, dt + C\right) = Ce^{-\int a(t)\, dt}$. K řešení bychom se mohli dostat též pomocí separace proměnných, viz následující příklad.

Příklad : Vyřešte diferenciální rovnici $\dot{x} + 3t^2 x = 0$.
Řešení: Separací proměnných obdržíme $\frac{dx}{dt} = -3t^2$, odtud $\ln x = -t^3 + c$
Tedy obecné řešení je $x(t) = Ce^{-t^3}$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2tx = 4t$ a nalezněte integrální křivku jdoucí bodem $(t, x) = (0, -2)$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

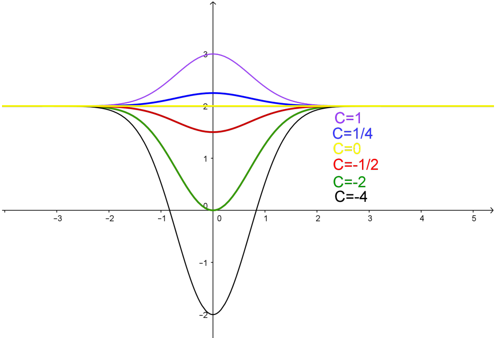
Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2tx = 4t$ a nalezněte integrální křivku jdoucí bodem $(t, x) = (0, -2)$.

Řešení: Dosadíme do vzorce $x = e^{-\int a(t)\,dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)\,dt}\,dt + C\right)$ funkce $a(t) = 2t$ a $b(t) = 4t$. Potom $\int a(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2$. Dosazením tedy získáme $x = e^{-t^2}\left(\int 4te^{t^2}\,dt + C\right) = Ce^{-t^2} + e^{-t^2}2e^{t^2} = Ce^{-t^2} + 2$.

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2tx = 4t$ a nalezněte integrální křivku jdoucí bodem $(t, x) = (0, -2)$.

Řešení: Dosadíme do vzorce $x = e^{-\int a(t)\,dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)\,dt}\,dt + C\right)$ funkce $a(t) = 2t$ a $b(t) = 4t$. Potom $\int a(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2$. Dosazením tedy získáme $x = e^{-t^2}\left(\int 4te^{t^2}\,dt + C\right) = Ce^{-t^2} + e^{-t^2}2e^{t^2} = Ce^{-t^2} + 2$.

Na obrázku je znázorněno několik integrálních křivek, počáteční podmínce $(t, x) = (0, -2)$ vyhovuje ta, jejíž konstanta splňuje $-2 = Ce^{-0^2} + 2$, tj. pro $C = -4$.



Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t, x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx$.
Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t, x)$.

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx.$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dx.$
Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Příklad : Diferenciální rovnice $x + t\dot{x} = 0$ neboli $xdt + tdx = 0$ je exaktní, protože vyhovuje definiční podmínce pro $F(t,x) = x \cdot t$.

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dx.$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Příklad : Diferenciální rovnice $x + t\dot{x} = 0$ neboli $xdt + tdx = 0$ je exaktní, protože vyhovuje definiční podmínce pro $F(t,x) = x \cdot t$.

Věta : Jsou-li funkce $P(t,x)$, $Q(t,x)$ diferencovatelné na oblasti Ω, pak je rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$. Je-li $F(t,x)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar $F(t,x) = C.$

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx.$
Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Příklad : Diferenciální rovnice $x + t\dot{x} = 0$ neboli $xdt + tdx = 0$ je exaktní, protože vyhovuje definiční podmínce pro $F(t,x) = x \cdot t$.

Věta : Jsou-li funkce $P(t,x)$, $Q(t,x)$ diferencovatelné na oblasti Ω, pak je rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$. Je-li $F(t,x)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar $F(t,x) = C.$

Poznámka : Tvrzení vyplývá z Schwarzovy věty o zaměnitelnosti smíšených derivací.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací: $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta", která může ovšem záviset na druhé proměnné.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací: $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta”, která může ovšem záviset na druhé proměnné. Tuto veličinu určíme z podmínky $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy

$$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$$

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací:
$F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x).$ Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta”, která může ovšem záviset na druhé proměnné.Tuto veličinu určíme z podmínky
$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy
$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$

Poznámka : Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací $F(t,x) = \int Q(t,x)dx + L(x) = V(t,x) + L(x)$ a pokračovat určením funkce $L(x)$.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací:

$$F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x).$$

Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta”, která může ovšem záviset na druhé proměnné.Tuto veličinu určíme z podmínky $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy

$$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$$

Poznámka : Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací $F(t,x) = \int Q(t,x)dx + L(x) = V(t,x) + L(x)$ a pokračovat určením funkce $L(x)$.

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $tdt + xdx = 0$. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a aplikujte na ni popsaný postup řešení.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací: $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta", která může ovšem záviset na druhé proměnné.Tuto veličinu určíme z podmínky $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy $K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$

Poznámka : Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací $F(t,x) = \int Q(t,x)dx + L(x) = V(t,x) + L(x)$ a pokračovat určením funkce $L(x)$.

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $tdt + xdx = 0$. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a aplikujte na ni popsaný postup řešení.

Řešení: Zkontrolujeme podmínku $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$ (ověření exaktnosti je nutné u každé rovnice, o které domníváme, že je exaktní). Podmínka je splněna, v rovnici $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial t}$ jsou pravá i levá strana nulové.

Exaktní diferenciální rovnice - příklad

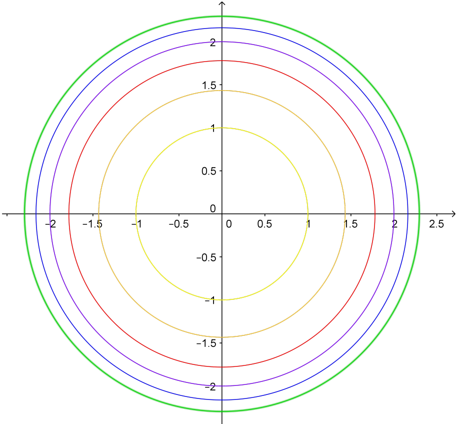
Po ověření exaktnosti rovnice $tdt + xdx = 0$ pokračujeme v řešení dle návodu. Spočteme $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = \int tdt + K(x) = \frac{t^2}{2} + K(x)$.

Exaktní diferenciální rovnice - příklad

Po ověření exaktnosti rovnice $tdt + xdx = 0$ pokračujeme v řešení dle návodu.
Spočteme $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = \int tdt + K(x) = \frac{t^2}{2} + K(x)$.
Dále určíme $K(x)$ z podmínky
$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx = \int (x - \frac{\partial t^2/2}{\partial x})dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

Exaktní diferenciální rovnice - příklad

Po ověření exaktnosti rovnice $tdt + xdx = 0$ pokračujeme v řešení dle návodu.
Spočteme $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = \int tdt + K(x) = \frac{t^2}{2} + K(x)$.
Dále určíme $K(x)$ z podmínky
$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx = \int (x - \frac{\partial t^2/2}{\partial x})dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.
Celkem tedy máme $F(t,x) = \frac{t^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$. Vybrané integrální křivky můžeme znázornit:



Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Příklad : Rovnice

- $\dot{x} = (x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$,
- $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$

jsou autonomní.

Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Příklad : Rovnice

- $\dot{x} = (x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$,
- $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$

jsou autonomní.

Poznámka : Jednou z nejdůležitějších vlastností rovnice je to, zda má nějaký rovnovážný stav. V řadě ekonomických aplikací je dobré také vědět, zda je tato rovnováha stabilní, což často můžeme rozhodnout i bez znalosti explicitního řešení.

Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Příklad : Rovnice

- $\dot{x} = (x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$,
- $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$

jsou autonomní.

Poznámka : Jednou z nejdůležitějších vlastností rovnice je to, zda má nějaký rovnovážný stav. V řadě ekonomických aplikací je dobré také vědět, zda je tato rovnováha stabilní, což často můžeme rozhodnout i bez znalosti explicitního řešení.

Definice : Obecně řekneme, že bod a reprezentuje rovnovážný stav autonomní rovnice, je-li $F(a) = 0$. V tomto případě je pak konstantní funkce $x(t) = a$ řešením rovnice. Je-li $x(t_0) = a$ pro nějaké $t_0 \Rightarrow x(t) = a$ pro všechna t.

Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.

Autonomní diferenciální rovnice

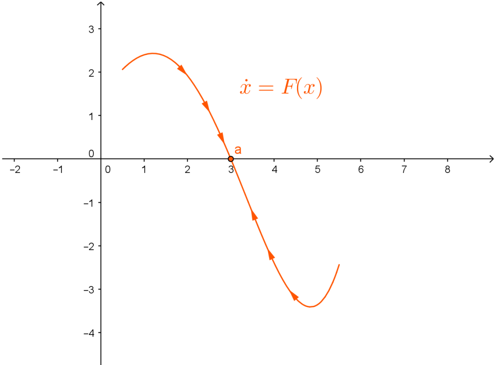
K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.
Co o těchto bodech můžeme říct? Leží-li nad vodorovnou osou, pak je $F(x(t)) > 0$, tedy $\dot{x}(t) > 0$, což znamená, že x je rostoucí funkcí t (to odpovídá pohybu po křivce zleva doprava).

Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.
Co o těchto bodech můžeme říct? Leží-li nad vodorovnou osou, pak je $F(x(t)) > 0$, tedy $\dot{x}(t) > 0$, což znamená, že x je rostoucí funkcí t (to odpovídá pohybu po křivce zleva doprava). Naopak body pod vodorovnou osou odpovídají záporné derivaci $\dot{x}(t) < 0$, takže se s rostoucím t pohybují zprava doleva. Na obrázku situaci demonstrují šipky na křivce.

Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.
Co o těchto bodech můžeme říct? Leží-li nad vodorovnou osou, pak je $F(x(t)) > 0$, tedy $\dot{x}(t) > 0$, což znamená, že x je rostoucí funkcí t (to odpovídá pohybu po křivce zleva doprava). Naopak body pod vodorovnou osou odpovídají záporné derivaci $\dot{x}(t) < 0$, takže se s rostoucím t pohybují zprava doleva. Na obrázku situaci demonstrují šipky na křivce.

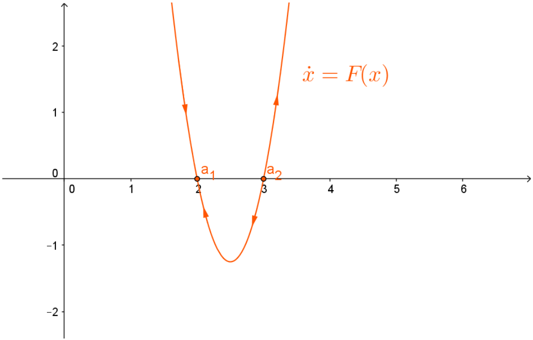


Autonomní diferenciální rovnice

Bod a z předchozího příkladu byl rovnovážným bodem, který je globálně asymptoticky stabilní, protože je-li $x(t)$ řešením úlohy $\dot{x} = F(x)$ splňujícím $x(t_0) = x_0$, pak $x(t)$ bude konvergovat k a pro libovolné (t_0, x_0).

Autonomní diferenciální rovnice

Bod a z předchozího příkladu byl rovnovážným bodem, který je globálně asymptoticky stabilní, protože je-li $x(t)$ řešením úlohy $\dot{x} = F(x)$ splňujícím $x(t_0) = x_0$, pak $x(t)$ bude konvergovat k a pro libovolné (t_0, x_0).
Oproti tomu na následujícím obrázku vidíme dva rovnovážné stavy $a_1, \ a_2$.
Mezi těmito body je podstatný rozdíl. Nastartujeme-li řešení v bodě blízkém a_1, pak $x(t)$ se bude s rostoucím t blížit k bodu a_1, ale při nastartování v okolí a_2 se řešení od tohoto bodu bude vzdalovat. Řekneme, že a_1 je lokálně asypmtoticky stabilní, kdežto a_2 je nestabilní.



Autonomní diferenciální rovnice

Věta : Uvažujme autonomní rovnici $\dot{x} = F(x)$ a bod a. Je-li

- $F(a) = 0$ a $F'(a) < 0$ $\Rightarrow$ a je lokálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice
- $F(a) = 0$ a $F'(a) > 0$ $\Rightarrow$ a je nestabilní rovnovážný bod rovnice

Autonomní diferenciální rovnice

Věta : Uvažujme autonomní rovnici $\dot{x} = F(x)$ a bod a. Je-li

- $F(a) = 0$ a $F'(a) < 0$ $\Rightarrow$ a je lokálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice
- $F(a) = 0$ a $F'(a) > 0$ $\Rightarrow$ a je nestabilní rovnovážný bod rovnice

Poznámka : Všimněme si, že věta nic neříká o případu $F(a) = 0$ a $F'(a) = 0$. Pak o typu bodu nelze tímto způsobem rozhodnout.

Příklad : Rovnice $\dot{x} + ax = b$, $(a \neq 0)$ je speciálním případem autonomní rovnice pro $F(x) = b - ax$. Má jediný rovnovážný bod, a to $x = \frac{b}{a}$, přičemž $F'(x) = -a$. Tedy podle uvedené věty je rovnovážný bod lokálně asymptoticky stabilní pro $a > 0$ a nestabilní pro $a < 0$.

Mechanizmus přizpůsobení ceny I

Příklad : Označme $D(P) = a - bP$ a $S(P) = \alpha + \beta P$ poptávku a nabídku po určitém produktu při ceně P ($a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ jsou kladné konstanty). Uvažujme P jako funkci času, přičemž její derivace je přímo úměrná převisu poptávky, tj. $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$ pro kladnou konstantu λ.

Mechanizmus přizpůsobení ceny I

Příklad : Označme $D(P) = a - bP$ a $S(P) = \alpha + \beta P$ poptávku a nabídku po určitém produktu při ceně P (a, b, α, β jsou kladné konstanty). Uvažujme P jako funkci času, přičemž její derivace je přímo úměrná převisu poptávky, tj. $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$ pro kladnou konstantu λ.
Dosazením předpisů pro $D(P)$ a $S(P)$ dostaneme diferenciální rovnici
$\dot{P} = \lambda[a - bP - \alpha - \beta P]$.
Řešením této autonomní rovnice je jak víme
$P = Ce^{-\lambda(b+\beta)} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Mechanizmus přizpůsobení ceny I

Příklad : Označme $D(P) = a - bP$ a $S(P) = \alpha + \beta P$ poptávku a nabídku po určitém produktu při ceně P ($a, \ b, \ \alpha, \ \beta$ jsou kladné konstanty). Uvažujme P jako funkci času, přičemž její derivace je přímo úměrná převisu poptávky, tj. $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$ pro kladnou konstantu λ.
Dosazením předpisů pro $D(P)$ a $S(P)$ dostaneme diferenciální rovnici
$\dot{P} = \lambda[a - bP - \alpha - \beta P]$.
Řešením této autonomní rovnice je jak víme
$P = Ce^{-\lambda(b+\beta)} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.
Protože dle předpokladů je výraz $\lambda(b + \beta)$ kladný, je rovnice stabilní a řešení konverguje s rostoucím časem k rovnovážné ceně $P^e = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$, pro kterou $S(P^e) = D(P^e)$.

Mechanizmus přizpůsobení ceny II

Příklad : Uvažujme zobecnění problému. Stejně jako v předchozím příkladu předpokládejme, že cena se mění podle převisu poptávky, ale ne nutně lineárně, tj. $\dot{P} = F(P) = H(D(P) - S(P))$, kde H je rostoucí funkce splňující podmínku $H(0) = 0$, (tj. $H' > 0$).

Mechanizmus přizpůsobení ceny II

Příklad : Uvažujme zobecnění problému. Stejně jako v předchozím příkladu předpokládejme, že cena se mění podle převisu poptávky, ale ne nutně lineárně, tj. $\dot{P} = F(P) = H(D(P) - S(P))$, kde H je rostoucí funkce splňující podmínku $H(0) = 0$, (tj. $H' > 0$).
Při převisu poptávky je $D(P) - S(P) > 0$, takže $\dot{P} > 0$ a cena tedy stoupá. Naopak cena klesá při $D(P) - S(P) < 0$. Označme P^e rovnovážnou cenu, při které $\dot{P} = F(P^e) = 0.$ Podle tvrzení o rovnováze autonomní rovnice je tato rovnováha stabilní při $F'(P^e) < 0$. Tato podmínka je většinou splněna, neboť $F'(P^e) = H'(D(P^e) - S(P^e)) \cdot (D'(P^e) - S'(P^e))$, kde první součinitel je dle předpokladu o monotónnosti H kladný a druhý výraz naopak záporný (u běžných produktů je $D' < 0$ a $S' > 0$, takže $D' - S' < 0$).

Systémy diferenciálních rovnic

Doposud jsme v diferenciálních rovnicích uvažovali jen jednu neznámou funkci. Řada dynamických ekonomických modelů zejména z oblasti makroekonomie však zahrnuje více neznámých funkcí, které společně splňují několik rovnic. Uvažujme případ dvou stavových veličin $x(t), y(t)$, které charakterizují ekonomický systém v čase t.

Definice : Soustavou diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, x, y).$$

(předpokládejme dále, že všechny funkce $f, \; g, \; f'_x, \; f'_y, \; g'_x, \; g'_y$ jsou spojité)

Systémy diferenciálních rovnic

Doposud jsme v diferenciálních rovnicích uvažovali jen jednu neznámou funkci. Řada dynamických ekonomických modelů zejména z oblasti makroekonomie však zahrnuje více neznámých funkcí, které společně splňují několik rovnic. Uvažujme případ dvou stavových veličin $x(t), y(t)$, které charakterizují ekonomický systém v čase t.

Definice : Soustavou diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, x, y).$$

(předpokládejme dále, že všechny funkce $f,\ g,\ f'_x,\ f'_y,\ g'_x,\ g'_y$ jsou spojité)

Řešením systému diferenciálních rovnic rozumíme dvojici funkcí (x(t), y(t)), které jsou definovány na nějakém intervalu I a vyhovují oběma rovnicím. Často je stav systému znám v nějakém okamžiku $t_0 \in I$ a budoucí vývoj systému může být pak jednoznačně charakterizován soustavou rovnic a počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0.$ Obecné řešení zpravidla závisí na dvou volitelných konstantách A, B, takže řešení lze zapsat jako $x = \varphi_1(t, A, B),\ y = \varphi_2(t, A, B)$; díky počáteční podmínce umíme tyto konstanty jednoznačně určit.

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Při řešení postupujeme podle následujících kroků:

1. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $\dot{y} = g(t, y)$, získáme tak $y(t)$
2. Dosadíme toto řešení do rovnice $\dot{x} = f(t, x, y)$, získáme tak novou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, z níž určíme $x(t)$.

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Při řešení postupujeme podle následujících kroků:

1. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $\dot{y} = g(t, y)$, získáme tak $y(t)$
2. Dosadíme toto řešení do rovnice $\dot{x} = f(t, x, y)$, získáme tak novou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, z níž určíme $x(t)$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy $\dot{x} = txy$, $\dot{y} = 2ty$

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Při řešení postupujeme podle následujících kroků:

1. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $\dot{y} = g(t, y)$, získáme tak $y(t)$
2. Dosadíme toto řešení do rovnice $\dot{x} = f(t, x, y)$, získáme tak novou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, z níž určíme $x(t)$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy $\dot{x} = txy$, $\dot{y} = 2ty$

Řešení: Nejprve separací proměnných určíme z druhé rovnice $y = Be^{t^2}$. Potom dosadíme do první rovnice, kde dostaneme $\dot{x} = Bxte^{t^2}$. Opět separací proměnných $\int \frac{dx}{x} = \int Bte^{t^2} dt$, tedy $x = Ae^{\frac{Be^{t^2}}{2}}$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$\dot{x} = f(x, y),$

$\dot{y} = g(x, y).$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$\dot{x} = f(x, y)$,

$\dot{y} = g(x, y)$.

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy
$\dot{x} = y, \dot{y} = y^2/x, \ x > 0, \ y > 0$
a nalezněte partikulární řešení s počáteční podmínkou $x(1) = 1, \ y(1) = 2$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y).$$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy
$\dot{x} = y, \dot{y} = y^2/x, \; x > 0, \; y > 0$
a nalezněte partikulární řešení s počáteční podmínkou $x(1) = 1, \; y(1) = 2$.

Řešení: Vyjádříme $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x}$, jejímž obecným řešením je $y = Ax$. Potom $\dot{x} = y = Ax$, což dá obecné řešení $x = Be^{At}$. Dosazením získáme $y = ABe^{At}$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$\dot{x} = f(x, y),$

$\dot{y} = g(x, y).$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy
$\dot{x} = y, \dot{y} = y^2/x, \ x > 0, \ y > 0$
a nalezněte partikulární řešení s počáteční podmínkou $x(1) = 1, \ y(1) = 2$.

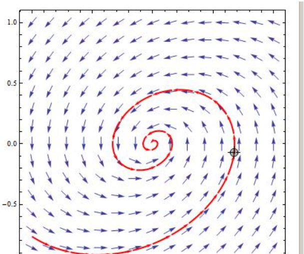
Řešení: Vyjádříme $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x}$, jejímž obecným řešením je $y = Ax$. Potom $\dot{x} = y = Ax$, což dá obecné řešení $x = Be^{At}$. Dosazením získáme $y = ABe^{At}$. Z počáteční podmínky máme $1 = Be^A$ a $2 = ABe^A$, takže vypočteme $A = 2, \ B = e^{-2}$. Tomu odpovídá řešení $x = e^{2t-2}, \ y = 2e^{2t-2}$.

Grafická analýza autonomního systému diferenciálních rovnic

Řešení autonomního systému $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kde f, g jsou spojité funkce, můžeme znázornit jako křivku v rovině xy složenou z bodů $[x(t), y(t)]$ pro t z nějakého časového intervalu, $t \in I$. Říkáme, že znázorňujeme trajektorii ve fázovém prostoru. Tempo změny veličin x a y můžeme vyjádřit pomocí vektoru $(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y))$. Tento vektor je tečný k trajektorii procházející daným bodem (x, y).

Grafická analýza autonomního systému diferenciálních rovnic

Řešení autonomního systému $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kde f, g jsou spojité funkce, můžeme znázornit jako křivku v rovině xy složenou z bodů $[x(t), y(t)]$ pro t z nějakého časového intervalu, $t \in I$. Říkáme, že znázorňujeme trajektorii ve fázovém prostoru. Tempo změny veličin x a y můžeme vyjádřit pomocí vektoru $(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y))$. Tento vektor je tečný k trajektorii procházející daným bodem (x, y).Chceme-li vyjádřit dynamiku systému, můžeme tento vektor znázornit v bodech nějaké pravidelné sítě. (obvykle se délky vektorů proporcionálně upraví, aby se neprotínaly). Tato množina vektorů tvoří vektorové pole, na jehož základě lze konstruovat jednotlivé trajektorie. Říkáme, že vytváříme fázový portrét systému.



Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

V případě $b_1, \ b_2 = 0$ budeme takový systém nazývat homogenní. Takový systém lze zapsat maticově jako $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$ a řešit pomocí vlastních čísel a vektorů matice A. Je-li λ vlastní číslo a $v = (v_1, v_2)^\top$ jemu příslušný vlastní vektor, pak $(x, y)^\top = (v_1 e^{\lambda t}, v_2 e^{\lambda t})^\top$ je řešením homogenního systému s maticí A.

Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

V případě $b_1, \ b_2 = 0$ budeme takový systém nazývat homogenní. Takový systém lze zapsat maticově jako $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$ a řešit pomocí vlastních čísel a vektorů matice A. Je-li λ vlastní číslo a $v = (v_1, v_2)^\top$ jemu příslušný vlastní vektor, pak $(x, y)^\top = (v_1 e^{\lambda t}, v_2 e^{\lambda t})^\top$ je řešením homogenního systému s maticí A.

Skutečně, můžeme udělat zkoušku a dosadit do systému $(\dot{x}, \dot{y})^\top = (\lambda v_1 e^{\lambda t}, \lambda v_2 e^{\lambda t})^\top$. Po vydělení pravé i levé strany rovnice výrazem $e^{\lambda t}$ nám zůstane jen $\lambda(v_1, v_2)^\top = A \cdot (v_1, v_2)^\top$, což evidentně platí z definice vlastních čísel a vektorů.

Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

V případě $b_1,\ b_2 = 0$ budeme takový systém nazývat homogenní. Takový systém lze zapsat maticově jako $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$ a řešit pomocí vlastních čísel a vektorů matice A. Je-li λ vlastní číslo a $v = (v_1, v_2)^\top$ jemu příslušný vlastní vektor, pak $(x, y)^\top = (v_1 e^{\lambda t}, v_2 e^{\lambda t})^\top$ je řešením homogenního systému s maticí A.

Skutečně, můžeme udělat zkoušku a dosadit do systému $(\dot{x}, \dot{y})^\top = (\lambda v_1 e^{\lambda t}, \lambda v_2 e^{\lambda t})^\top$. Po vydělení pravé i levé strany rovnice výrazem $e^{\lambda t}$ nám zůstane jen $\lambda(v_1, v_2)^\top = A \cdot (v_1, v_2)^\top$, což evidentně platí z definice vlastních čísel a vektorů.

V případě, kdy má matice A dvě různá reálná vlastní čísla $\lambda_1,\ \lambda_2$ (s vlastními vektory $u,\ v$) pak výše uvedený vzorec platí pro obě dvě, obecné řešení systému má pak tvar $(x, y)^\top = Ke^{\lambda_1 t}(u_1, u_2)^\top + Le^{\lambda_2 t}(v_1, v_2)^\top$

Homogenní lineární systém - příklad

Řešte soustavu $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Homogenní lineární systém - příklad

Řešte soustavu $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Charakteristický polynom matice je
$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Odtud máme
$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ s odpovídajícími vektory $u = (-2, 1)^\top$ a $v = (1, 1)^\top$. Obecné řešení lineárního diferenciálního systému je tedy
$(x, y)^\top = Ke^{-t}(-2, 1)^\top + Le^{2t}(1, 1)^\top$.

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1, \ b_2 \neq 0$

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1, \; b_2 \neq 0$ Tato soustava může být převedena na homogenní zavedením nových proměnných. Ukažme si postup na příkladu:

Příklad : Najděte řešení systému

$\dot{x} = 2y + 6,$

$\dot{y} = x + y - 3.$

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1,\ b_2 \neq 0$ Tato soustava může být převedena na homogenní zavedením nových proměnných. Ukažme si postup na příkladu:

Příklad : Najděte řešení systému

$\dot{x} = 2y + 6,$

$\dot{y} = x + y - 3.$

Řešení: Povšimněme si, že rovnovážným bodem (kde $\dot{x} = \dot{y} = 0$) je bod $(6, -3)$. Zavedeme proměnné $z = x - 6,\ w = y + 3$, které vyjadřují odchylku jednotlivých proměnných od rovnovážných hodnot. Pak $\dot{z} = \dot{x},\ \dot{w} = \dot{y}$.

Systém tedy můžeme přepsat jako

$\dot{z} = 2(w - 3) + 6 = 2w,$

$\dot{w} = (z + 6) + (w - 3) - 3 = z + w.$

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1, \ b_2 \neq 0$ Tato soustava může být převedena na homogenní zavedením nových proměnných. Ukažme si postup na příkladu:

Příklad : Najděte řešení systému

$\dot{x} = 2y + 6,$

$\dot{y} = x + y - 3.$

Řešení: Povšimněme si, že rovnovážným bodem (kde $\dot{x} = \dot{y} = 0$) je bod $(6, -3)$. Zavedeme proměnné $z = x - 6, \ w = y + 3$, které vyjadřují odchylku jednotlivých proměnných od rovnovážných hodnot. Pak $\dot{z} = \dot{x}, \ \dot{w} = \dot{y}$.

Systém tedy můžeme přepsat jako

$\dot{z} = 2(w - 3) + 6 = 2w,$

$\dot{w} = (z + 6) + (w - 3) - 3 = z + w.$

Řešení tohoto homogenního systému známe z předchozího příkladu, $z = -2Ke^{-t} + Le^{2t}, \ w = Ke^{-t} + Le^{2t}$. Původné neznámé dopočítáme zpětnou substitucí, $x = z + 6 = -2Ke^{-t} + Le^{2t} + 6, \ y = w - 3 = Ke^{-t} + Le^{2t} - 3$.

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

neboli

$$a_{11}x + a_{12}y = -b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = -b_2.$$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

neboli

$$a_{11}x + a_{12}y = -b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = -b_2.$$

Pomocí Cramerova pravidla můžeme v případě $|A| \neq 0$ řešení tohoto systému vyjádřit přímo jako

$$x^* = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{|A|}, \; y^* = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{|A|},$$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

neboli

$$a_{11}x + a_{12}y = -b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = -b_2.$$

Pomocí Cramerova pravidla můžeme v případě $|A| \neq 0$ řešení tohoto systému vyjádřit přímo jako

$$x^* = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{|A|}, \; y^* = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{|A|},$$

Potom konstantní funkce $x(t) = x^*, y(t) = y^*$ tvoří řešení systému (na levé straně dostaneme derivace konstantní funkce, tj. $\dot{x} = \dot{y} = 0$ a pravé strany jsou evidentně nulové). Dostane-li se tedy systém do stavu (x^*, y^*) v nějakém čase t_0, už zde zůstane pro všechna $t > t_0$.

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$

$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$
$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$

Poznámka : Výrazu $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$ se říká stopa matice A.

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$$

Poznámka : Výrazu $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$ se říká stopa matice A.

Poznámka : V případě, že má matice A reálná vlastní čísla $\lambda_1, \ \lambda_2$, je podmínka věty splněna, jsou-li obě vlastní čísla záporná, $\lambda_1, \ \lambda_2 < 0.$

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$

$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$

Poznámka : Výrazu $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$ se říká stopa matice A.

Poznámka : V případě, že má matice A reálná vlastní čísla $\lambda_1,\ \lambda_2$, je podmínka věty splněna, jsou-li obě vlastní čísla záporná, $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0.$

Příklad : Již dříve jsme zjistili, že systém z předchozího příkladu $\dot{x} = 2y + 6$, $\dot{y} = x + y - 3$ má rovnovážný bod $(6, -3)$. Tento bod však není globálně asymptoticky stabilní, protože $\lambda_2 = 2 > 0$. Řešení $x = z + 6 = -2Ke^{-t} + Le^{2t} + 6,\ y = w - 3 = Ke^{-t} + Le^{2t} - 3$ nekonverguje k rovnovážnému bodu.

Závěrečné poznámky k diferenciálním rovnicím

Poznámka : Pokud v rovnicích vystupují i vyšší derivace, např. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, hovoříme o diferenciálních rovnicích vyššího řádu. Jejich problematika (stejně jako další typy a metody řešení diferenciálních rovnic) překračuje rámec kurzu. Vždy je dobré umět alespoň rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Závěrečné poznámky k diferenciálním rovnicím

Poznámka : Pokud v rovnicích vystupují i vyšší derivace, např. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, hovoříme o diferenciálních rovnicích vyššího řádu. Jejich problematika (stejně jako další typy a metody řešení diferenciálních rovnic) překračuje rámec kurzu. Vždy je dobré umět alespoň rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Věta : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = F(t, x)$. Je-li její pravá strana $F(t, x)$ i její derivace $F'_x(t, x)$ spojitá v nějaké otevřené množině A, pak pro libovolný bod $(t_0, x_0) \in A$ existuje právě jedno "lokální"řešení rovnice, které prochází bodem (t_0, x_0).

Závěrečné poznámky k diferenciálním rovnicím

Poznámka : Pokud v rovnicích vystupují i vyšší derivace, např. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, hovoříme o diferenciálních rovnicích vyššího řádu. Jejich problematika (stejně jako další typy a metody řešení diferenciálních rovnic) překračuje rámec kurzu. Vždy je dobré umět alespoň rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Věta : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = F(t, x)$. Je-li její pravá strana $F(t, x)$ i její derivace $F'_x(t, x)$ spojitá v nějaké otevřené množině A, pak pro libovolný bod $(t_0, x_0) \in A$ existuje právě jedno "lokální"řešení rovnice, které prochází bodem (t_0, x_0).

Poznámka : Funkce $x(t)$ je lokálním řešením ve smyslu předchozí věty, existuje-li nějaký interval (a, b) okolo bodu t_0, takový že pro $t \in (a, b)$ je $(t, x(t)) \in A$ a navíc je na tomto intervalu splněna diferenciální rovnice i s počáteční podmínkou.

Diferenční rovnice - úvod

Řada veličin, které ekonomové zkoumají (například příjmy, spotřeba, úspory, atd.), jsou zaznamenávany v daných časových intervalech (např. denní, týdenní, čtvrtletní či roční záznamy). Rovnice, které vyjadřují vztah mezi hodnotami veličiny v různých časových okamžicích, se nazývají diferenční rovnice. Jsou obdobou diferenciálních rovnic, rozdíl je v chápání času jako diskrétní (ne spojité) veličiny.

Diferenční rovnice - úvod

Řada veličin, které ekonomové zkoumají (například příjmy, spotřeba, úspory, atd.), jsou zaznamenávany v daných časových intervalech (např. denní, týdenní, čtvrtletní či roční záznamy). Rovnice, které vyjadřují vztah mezi hodnotami veličiny v různých časových okamžicích, se nazývají diferenční rovnice. Jsou obdobou diferenciálních rovnic, rozdíl je v chápání času jako diskrétní (ne spojité) veličiny.

Definice : Označme $t = 0, 1, 2, \ldots$ diskrétní časové okamžiky. ($t = 0$ se obvykle nazývá počáteční okamžik. Diferenční rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

Diferenční rovnice - úvod

Řada veličin, které ekonomové zkoumají (například příjmy, spotřeba, úspory, atd.), jsou zaznamenávany v daných časových intervalech (např. denní, týdenní, čtvrtletní či roční záznamy). Rovnice, které vyjadřují vztah mezi hodnotami veličiny v různých časových okamžicích, se nazývají diferenční rovnice. Jsou obdobou diferenciálních rovnic, rozdíl je v chápání času jako diskrétní (ne spojité) veličiny.

Definice : Označme $t = 0, 1, 2, \ldots$ diskrétní časové okamžiky. ($t = 0$ se obvykle nazývá počáteční okamžik. Diferenční rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

Vhodnějším označením by mělo být spíše rekurentní rovnice, protože pojmenování diferenční rovnice je odvozeno od pojmu diference $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$. Nicméně snadnou úpravou lze výše uvedený tvar rovnice převést na $\Delta x_t = f(t, x_t) - x_t, \; t = 0, 1, 2, \ldots$.

Řešení diferenční rovnice

Jestliže je dána počáteční hodnota x_0, můžeme řešení diferenční rovnice získat postupným dosazováním:

$x_1 = f(0, x_0)$,
$x_2 = f(1, f(0, x_0))$
$x_3 = f(2, f(1, f(0, x_0)))$, atd.

Takto se můžeme postupně dostat k libovolnému t.

Řešení diferenční rovnice

Jestliže je dána počáteční hodnota x_0, můžeme řešení diferenční rovnice získat postupným dosazováním:

$$x_1 = f(0, x_0),$$
$$x_2 = f(1, f(0, x_0))$$
$$x_3 = f(2, f(1, f(0, x_0))), \text{ atd.}$$

Takto se můžeme postupně dostat k libovolnému t.Řešení získané postupným dosazováním obvykle nepopisuje dostatečně chování rovnice (ekonomy zajímá též kvalitativní analýza, např. jak se veličina chová pro velká t, závislost řešení na parametrech, apod.) Navíc jde o výpočetně náročný postup.

Řešení diferenční rovnice

Jestliže je dána počáteční hodnota x_0, můžeme řešení diferenční rovnice získat postupným dosazováním:

$x_1 = f(0, x_0)$,
$x_2 = f(1, f(0, x_0))$
$x_3 = f(2, f(1, f(0, x_0)))$, atd.

Takto se můžeme postupně dostat k libovolnému t.Řešení získané postupným dosazováním obvykle nepopisuje dostatečně chování rovnice (ekonomy zajímá též kvalitativní analýza, např. jak se veličina chová pro velká t, závislost řešení na parametrech, apod.) Navíc jde o výpočetně náročný postup.

Někdy je možné odvodit pro x_t jednoduchý předpis. Obecným řešením rovnice nazveme funkci tvaru $x_t = g(t, A)$, pokud je rovnice splněna pro jakoukoliv hodnotu konstanty A. Obvykle pro každou počáteční hodnotu x_0 existuje právě jedno A, pro něž $g(0, A) = x_0$.

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.
Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0,\ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0\ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.

Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0, \ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0 \ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Uvažujme zobecnění předchozího příkladu v podobě nehomogenní rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b, \ t = 0, 1, 2, \ldots$.
Přímou substitucí opět dostaneme
$x_t = a^t \cdot x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b, \ t = 0, 1, 2, \ldots$

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.
Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0,\ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0\ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Uvažujme zobecnění předchozího příkladu v podobě nehomogenní rovnice
$x_{t+1} = a \cdot x_t + b,\ t = 0, 1, 2, \ldots$.
Přímou substitucí opět dostaneme
$x_t = a^t \cdot x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b,\ t = 0, 1, 2, \ldots$
Podle vzorce pro součet geometrické řady je
$(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1) = \frac{(1-a^t)}{(1-a)}, a \neq 1$. Tedy dostaneme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_t = a^t \cdot \left(x_0 - \frac{b}{(1-a)}\right) + \frac{b}{(1-a)},\ t = 0, 1, 2, \ldots,\ a \neq 1$$

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.
Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0,\ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0\ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Uvažujme zobecnění předchozího příkladu v podobě nehomogenní rovnice
$x_{t+1} = a \cdot x_t + b,\ t = 0, 1, 2, \ldots$.
Přímou substitucí opět dostaneme
$x_t = a^t \cdot x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b,\ t = 0, 1, 2, \ldots$
Podle vzorce pro součet geometrické řady je
$(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1) = \frac{(1-a^t)}{(1-a)}$, $a \neq 1$. Tedy dostaneme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_t = a^t \cdot \left(x_0 - \frac{b}{(1-a)}\right) + \frac{b}{(1-a)},\ t = 0, 1, 2, \ldots,\ a \neq 1$$

Poznámka : Pro $a = 1$ je $a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1 = t$, tedy dostaneme řešení $x_t = x_0 + t \cdot b$.

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $x^* = \frac{b}{(1-a)}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $x^* = \frac{b}{(1-a)}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Věta : Pro a splňující $|a| < 1$ platí $a^t \to 0$, tedy $x_t \to x^* = \frac{b}{(1-a)}$ pro $t \to \infty$. Rovnice je globálně asymptoticky stabilní.

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $x^* = \frac{b}{(1-a)}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Věta : Pro a splňující $|a| < 1$ platí $a^t \to 0$, tedy $x_t \to x^* = \frac{b}{(1-a)}$ pro $t \to \infty$. Rovnice je globálně asymptoticky stabilní.

Příklad : Vyjádřete řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = \frac{x_t}{2} + 3$, určete její rovnovážný bod a rozhodněte, zda je stabilní

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $x^* = \frac{b}{(1-a)}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Věta : Pro a splňující $|a| < 1$ platí $a^t \to 0$, tedy $x_t \to x^* = \frac{b}{(1-a)}$ pro $t \to \infty$. Rovnice je globálně asymptoticky stabilní.

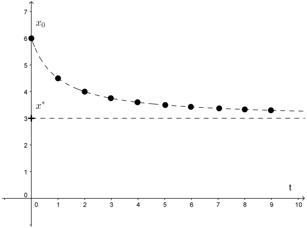
Příklad : Vyjádřete řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = \frac{x_t}{2} + 3$, určete její rovnovážný bod a rozhodněte, zda je stabilní

Řešení: Podle formule použité pro hodnoty koeficientů $a = \frac{1}{2},\ b = 3$ dostaneme $x^* = \frac{3}{(1-1/2)} = 6$. Řešením rovnice je $x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t (x - 6) + 6$. Rovnováha je stabilní, protože $|a| = |\frac{1}{2}| < 1$.

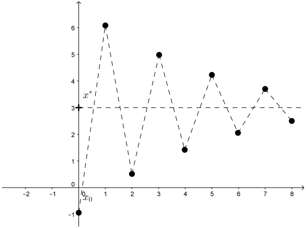
Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Na následujícím obrázku jsou znázorněny dva případy stability, a to monotónní konvergence k ekvilibriu (a) a tlumené oscilace (b) a dva případy nestability (c,d)

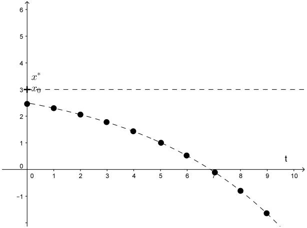
a) $x_0 > x^* = \frac{b}{1-a},\ 0 < a < 1$



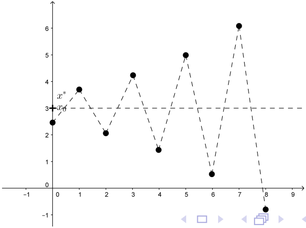
b) $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a},\ -1 < a < 0$



c) $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a},\ 1 < a$



d) $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a},\ a < -1$



Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy $D_t = a - bp_t, \; S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy $D_t = a - bp_t, \; S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.
Vyjádřeme podmínku pro ekvilibrium: $S_t = D_t$, tj. $a - bp_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$
Osamostatníme p_t: $p_t = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{\beta}{b} p_{t-1}$

Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy $D_t = a - bp_t, \; S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Vyjádřeme podmínku pro ekvilibrium: $S_t = D_t$, tj. $a - bp_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$

Osamostatníme p_t: $p_t = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{\beta}{b} p_{t-1}$

Zjednodušíme pomocí nových parametrů: $p_t = A - Bp_{t-1}$

Řešení dostaneme ve tvaru $p_t = C(-B)^t + \frac{A}{1+B}$

Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy

$D_t = a - bp_t, \; S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Vyjádřeme podmínku pro ekvilibrium: $S_t = D_t$, tj. $a - bp_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$

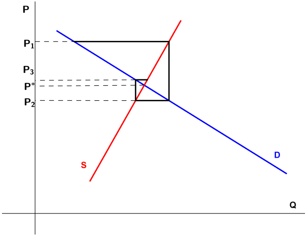
Osamostatníme p_t: $p_t = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{\beta}{b} p_{t-1}$

Zjednodušíme pomocí nových parametrů: $p_t = A - Bp_{t-1}$

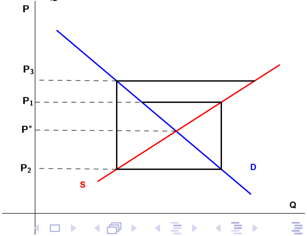
Řešení dostaneme ve tvaru $p_t = C(-B)^t + \frac{A}{1+B}$

Pro $0 < B = \frac{\beta}{b} < 1$ pak p_t konverguje k rovnovážné ceně $P^* = \frac{A}{1+B} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$.

a) $\frac{\beta}{b} < 1 \Rightarrow$ cena konverguje k ekvilibriu P^*



b) $\frac{\beta}{b} > 1 \Rightarrow$ divergence



Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici druhého řádu můžeme zapsat jako $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$. Pro pevné hodnoty x_0 a x_1 lze spočítat $x_2 = f(0, x_0, x_1)$, $x_3 = f(1, x_1, x_2)$, atd. Takto můžeme jednoznačně určit hodnotu x_t pro každé t. Vidíme, že úloha má obecně nekonečně moho řešení, pokud nezadáme konkrétní hodnoty pro první dvě období. Obecným řešením rozumíme funkci tvaru $x_t = g(t, A, B)$, přičemž volbou vhodných hodnot A a B dostaneme libovolné řešení.

Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici druhého řádu můžeme zapsat jako $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$. Pro pevné hodnoty x_0 a x_1 lze spočítat $x_2 = f(0, x_0, x_1)$, $x_3 = f(1, x_1, x_2)$, atd. Takto můžeme jednoznačně určit hodnotu x_t pro každé t. Vidíme, že úloha má obecně nekonečně moho řešení, pokud nezadáme konkrétní hodnoty pro první dvě období. Obecným řešením rozumíme funkci tvaru $x_t = g(t, A, B)$, přičemž volbou vhodných hodnot A a B dostaneme libovolné řešení.

Definice : Je-li funkce f lineární, tj. lze-li rovnice zapsat ve tvaru $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t$, (kde $b_t \neq 0$), hovoříme o lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Nahradíme-li pravou stranu nulou, dostaneme přidruženou homogenní rovnici $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0$.

Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici druhého řádu můžeme zapsat jako $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$. Pro pevné hodnoty x_0 a x_1 lze spočítat $x_2 = f(0, x_0, x_1)$, $x_3 = f(1, x_1, x_2)$, atd. Takto můžeme jednoznačně určit hodnotu x_t pro každé t. Vidíme, že úloha má obecně nekonečně moho řešení, pokud nezadáme konkrétní hodnoty pro první dvě období. Obecným řešením rozumíme funkci tvaru $x_t = g(t, A, B)$, přičemž volbou vhodných hodnot A a B dostaneme libovolné řešení.

Definice : Je-li funkce f lineární, tj. lze-li rovnice zapsat ve tvaru $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t$, (kde $b_t \neq 0$), hovoříme o lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Nahradíme-li pravou stranu nulou, dostaneme přidruženou homogenní rovnici $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0$.

Věta : Obecným řešením homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu je $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$, kde $u_t^{(1)}$, $u_t^{(2)}$ jsou dvě nezávislá řešení a A, B libovolné konstanty. Obecným řešením nehomogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu je $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenční rovnici $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,$ kde koeficienty a, b nezávisí na čase a $b \neq 0$. Na základě předchozí zkušenosti můžeme odhadnout, že řešení můžeme očekávat ve tvaru $x_t = m^t$, kdy $x_{t+1} = m^{t+1}$, $x_{t+2} = m^{t+2}$, takže rovnice je splněna pokud $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Pro $m \neq 0$ můžeme pravou i levou stranu vydělit výrazem m^t.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenční rovnici $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,$ kde koeficienty a, b nezávisí na čase a $b \neq 0$. Na základě předchozí zkušenosti můžeme odhadnout, že řešení můžeme očekávat ve tvaru $x_t = m^t$, kdy $x_{t+1} = m^{t+1}$, $x_{t+2} = m^{t+2}$, takže rovnice je splněna pokud $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Pro $m \neq 0$ můžeme pravou i levou stranu vydělit výrazem m^t.

Dostaneme tzv. charakteristickou rovnici $(m^2 + am + b) = 0$ (levá strana se nazývá charakteristickým polynomem rovnice). Kořeny můžeme vyjádřit jako $m_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenční rovnici $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,$ kde koeficienty a, b nezávisí na čase a $b \neq 0$. Na základě předchozí zkušenosti můžeme odhadnout, že řešení můžeme očekávat ve tvaru $x_t = m^t$, kdy $x_{t+1} = m^{t+1}$, $x_{t+2} = m^{t+2}$, takže rovnice je splněna pokud $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Pro $m \neq 0$ můžeme pravou i levou stranu vydělit výrazem m^t.

Dostaneme tzv. charakteristickou rovnici $(m^2 + am + b) = 0$ (levá strana se nazývá charakteristickým polynomem rovnice). Kořeny můžeme vyjádřit jako $m_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$.Shrňme výsledky do přehledné věty:

Věta : Obecné řešení diferenční rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0$, $(b \neq 0)$ můžeme vyjádřit v závislosti na řešení charakteristické rovnice

1. Pro $a^2 - 4b > 0$ (dva různé reálné kořeny) ve tvaru $x_t = Am_1^t + Bm_2^t$, kde $m_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$
2. Pro $a^2 - 4b = 0$ (jeden dvojitý reálný kořen) ve tvaru $x_t = (A + Bt)m^t$, kde $m = -\frac{1}{2}a$
3. Pro $a^2 - 4b < 0$ (žádný reálný kořen) ve tvaru $x_t = r^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$, kde $r = \sqrt{b}$, $\cos(\theta) = -\frac{a}{2\sqrt{b}}$

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty, příklad

Příklad : Najděte obecné řešení diferenčních rovnic

1. $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0.$
2. $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0.$
3. $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0.$

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty, příklad

Příklad : Najděte obecné řešení diferenčních rovnic

1. $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0.$
2. $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0.$
3. $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0.$

Řešení:

1. Charakteristická rovnice je $m^2 - 5m + 6 = 0$, její kořeny jsou $m_1 = 2$ a $m_2 = 3$, takže obecné řešení je $x_t = A2^t + B3^t$.
2. Charakteristická rovnice je $m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2 = 0$, jejím kořenem je $m = 3$, takže obecné řešení je $x_t = (A + Bt)3^t$.
3. Charakteristická rovnice je $m^2 - m + 1 = 0$ jejíž diskriminant je záporný, takže spočteme $r = \sqrt{b} = 1, \ \cos\theta = \frac{1}{2}$ a dostaneme obecné řešení $x_t = A\cos\frac{\pi}{3}t + B\sin\frac{\pi}{3}t$.

Poznámka : V případě záporného diskriminantu řešení osciluje. Číslu r se říká faktor růstu. Je-li $|r| < 1$, pak $r^t \to 0$ pro $t \to \infty$ a oscilace jsou tlumené.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$, $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.
Hledáme konstantní řešení $x_t = C$. Potom také $x_{t+1} = C$, $x_{t+2} = C$, takže dosazením získáme $C + aC + bC = c$. Odtud $C = \frac{c}{1+a+b}$, pokud $1 + a + b \neq 0$.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.
Hledáme konstantní řešení $x_t = C$. Potom také $x_{t+1} = C,\ x_{t+2} = C$, takže dosazením získáme $C + aC + bC = c$. Odtud $C = \frac{c}{1+a+b}$, pokud $1 + a + b \neq 0$.
Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.
Hledáme konstantní řešení $x_t = C$. Potom také $x_{t+1} = C,\ x_{t+2} = C$, takže dosazením získáme $C + aC + bC = c$. Odtud $C = \frac{c}{1+a+b}$, pokud $1 + a + b \neq 0$.
Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.
Řešení: Nejprve vyjádříme řešení homogenní rovnice pomocí kořenů charakteristického polynomu $3m^2 - 2 = 0$. Dostaneme $m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. K řešení zhomogenizované úlohy $A\sqrt{\frac{2}{3}}^t + B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t$ musíme ještě přičíst konstantní řešení pro $C = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 4$. Tedy celkem $x_t = A\sqrt{\frac{2}{3}}^t + B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t + 4$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Poznámka : Podmínka věty je splněna pokud $|a| < 1 + b$ a $b < 1$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Poznámka : Podmínka věty je splněna pokud $|a| < 1 + b$ a $b < 1$.

Příklad : Rozhodněte o stabilitě diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Poznámka : Podmínka věty je splněna pokud $|a| < 1 + b$ a $b < 1$.

Příklad : Rozhodněte o stabilitě diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.

Řešení: Kořeny splňují podmínku $|m_{1,2}| = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, tedy rovnice je globálně asymptoticky stabilní. Evidentně první dva členy řešení

$x_t = A\sqrt{\frac{2}{3}}^t + B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t + 4$ konvergují k nule pro $t \to \infty$, tedy $x_t \to x^* = 4$.

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$$\boxed{x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),}$$

$$\boxed{y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),} \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2),\ y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2), y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Příklad : Najděte řešení systému $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{3}y_t,\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{2}{3}y_t,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),\quad t = 0, 1, 2, \ldots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2),\ y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Příklad : Najděte řešení systému $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{3}y_t,\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{2}{3}y_t,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Řešení: Z první rovnice vyjádříme $y_t = 3x_{t+1} - \frac{3}{2}x_t$, což můžeme dosadit do druhé rovnice a získat tak $y_{t+1} = 2x_{t+1} - \frac{1}{2}x_t$. Posunutím času (nahradíme t časem $t+1$) v první rovnici pak $x_{t+2} = \frac{1}{2}x_{t+1} + \frac{1}{3}y_{t+1}$, takže substitucí za y_{t+1} dostaneme diferenční rovnici druhého řádu $x_{t+2} - \frac{7}{6}x_{t+1} + \frac{1}{6}x_t = 0.$

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),\quad t = 0, 1, 2, \dots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2),\ y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Příklad : Najděte řešení systému $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{3}y_t,\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{2}{3}y_t,$ $t = 0, 1, 2, \dots$.

Řešení: Z první rovnice vyjádříme $y_t = 3x_{t+1} - \frac{3}{2}x_t$, což můžeme dosadit do druhé rovnice a získat tak $y_{t+1} = 2x_{t+1} - \frac{1}{2}x_t$. Posunutím času (nahradíme t časem $t+1$) v první rovnici pak $x_{t+2} = \frac{1}{2}x_{t+1} + \frac{1}{3}y_{t+1}$, takže substitucí za y_{t+1} dostaneme diferenční rovnici druhého řádu $x_{t+2} - \frac{7}{6}x_{t+1} + \frac{1}{6}x_t = 0.$ Řešením charakteristické rovnice $m^2 - \frac{7}{6}m + \frac{1}{6} = 0$ dostaneme kořeny $m_1 = 1,\ m_2 = \frac{1}{6}$, které dávají $x_t = A + B\left(\frac{1}{6}\right)^t$. Dodatečně dosadíme do

$$y_t = 3x_{t+1} - \frac{3}{2}x_t = 3A + 3B\left(\frac{1}{6}\right)^{t+1} - \frac{3}{2}A - \frac{3}{2}B\left(\frac{1}{6}\right)^t = \frac{3}{2}A - B\left(\frac{1}{6}\right)^t.$$

Maticový zápis lineárního systému diferenčních rovnic

V případě lineárního systému

$x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1,$

$y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

můžeme označit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a systém přepsat jako

$(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b,$ $t = 0, 1, 2, \ldots.$

Maticový zápis lineárního systému diferenčních rovnic

V případě lineárního systému

$x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1,$

$y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

můžeme označit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a systém přepsat jako

$(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$.Obdobně jako u jednodimenzionálního případu můžeme z výchozího $(x_0, y_0)^\top$ dostat postupným dosazováním $(x_1, y_1)^\top = A \cdot (x_0, y_0)^\top + b$, $(x_2, y_2)^\top = A \cdot (x_1, y_1)^\top + b = A^2 \cdot (x_0, y_0)^\top + A \cdot b + b$, atd. Pro obecný čas pak máme $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I + A + A^2 + \ldots A^{t-1}) \cdot b.$

Maticový zápis lineárního systému diferenčních rovnic

V případě lineárního systému

$x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1,$

$y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

můžeme označit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a systém přepsat jako

$(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$.Obdobně jako u jednodimenzionálního případu můžeme z výchozího $(x_0, y_0)^\top$ dostat postupným dosazováním $(x_1, y_1)^\top = A \cdot (x_0, y_0)^\top + b$, $(x_2, y_2)^\top = A \cdot (x_1, y_1)^\top + b = A^2 \cdot (x_0, y_0)^\top + A \cdot b + b$, atd. Pro obecný čas pak máme $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I + A + A^2 + \ldots A^{t-1}) \cdot b.$

Pravá strana může být ještě zjednodušena pomocí rovnosti $(I + A + A^2 + \ldots A^{t-1})(I - A) = I - A^t$. Pro případ, kdy je matice $I - A$ regulární, tj. $|I - A| \neq 0$, máme tedy $(I + A + A^2 + \ldots A^{t-1}) = (I - A^t) \cdot (I - A)^{-1}$. Celkové řešení pak lze vyjádřit ve tvaru $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I - A^t) \cdot (I - A)^{-1} \cdot b$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:
Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:

Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Poznámka : V části věnované maticím jsme s využitím diagonalizace matice pomocí vlastních čísel vyjádřili její mocninu jako $A^t = P \cdot D^t \cdot P^{-1}$, kde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ a tudíž $D^t = diag(\lambda_1^t, \lambda_2^t)$. Prvky této matice se evidentně blíží k nule, je-li $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:
Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $\boxed{|\lambda_{1,2} < 1|}$.

Poznámka : V části věnované maticím jsme s využitím diagonalizace matice pomocí vlastních čísel vyjádřili její mocninu jako $A^t = P \cdot D^t \cdot P^{-1}$, kde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ a tudíž $D^t = diag(\lambda_1^t, \lambda_2^t)$. Prvky této matice se evidentně blíží k nule, je-li $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Věta : Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, pak je matice $(I - A)$ regulární a každé řešení rovnice konverguje k rovnovážnému stavu $\boxed{(x_t^*, y_t^*)^\top = (I - A)^{-1} \cdot b}$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:
Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Poznámka : V části věnované maticím jsme s využitím diagonalizace matice pomocí vlastních čísel vyjádřili její mocninu jako $A^t = P \cdot D^t \cdot P^{-1}$, kde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ a tudíž $D^t = diag(\lambda_1^t, \lambda_2^t)$. Prvky této matice se evidentně blíží k nule, je-li $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Věta : Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, pak je matice $(I - A)$ regulární a každé řešení rovnice konverguje k rovnovážnému stavu $(x_t^*, y_t^*)^\top = (I - A)^{-1} \cdot b$.

Tvrzení dostaneme, nahradíme-li ve výrazu pro řešení $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I - A^t) \cdot (I - A)^{-1} \cdot b$ matici A^t nulovou maticí.