Hessova matice kvadratické formy

Příklad : Určete Hessovu matici kvadratické formy
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Hessova matice kvadratické formy

Příklad : Určete Hessovu matici kvadratické formy
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $Q(x_1, x_2, x_3)$:

$$
\begin{array}{ccc}
Q''_{11} = 6 & Q''_{12} = 0 & Q''_{13} = 6 \\
Q''_{21} = 0 & Q''_{22} = 2 & Q''_{23} = -4 \\
Q''_{31} = 6 & Q''_{32} = -4 & Q''_{33} = 16
\end{array}
$$

Hessova matice kvadratické formy

Příklad : Určete Hessovu matici kvadratické formy
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $Q(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{array}{ccc} Q''_{11} = 6 & Q''_{12} = 0 & Q''_{13} = 6 \\ Q''_{21} = 0 & Q''_{22} = 2 & Q''_{23} = -4 \\ Q''_{31} = 6 & Q''_{32} = -4 & Q''_{33} = 16 \end{array}$$

Již dříve jsme zavedli maticový zápis $Q(x) = x'\mathbf{A}x$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)'$ a
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$
Nyní vidíme, že $H(x_1, x_2, x_3) = 2\mathbf{A}$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.
Řešení: Funkce $z = x^3y^4$ má spojité parciální derivace $f'_x(x, y) = 3x^2y^4$ a $f'_y(x, y) = 4x^3y^3$ v každém bodě $[x, y]$, tedy i v bodě $[2, 3]$. Dostáváme pak

$$dz = (3x^2y^4)_{[2,3]}dx + (4x^3y^3)_{[2,3]}dy,$$

$$dz = 972\,dx + 864\,dy.$$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a + h, b + k] \in U_\delta([a, b])$ platí:
$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \eta(h, k)$ a zároveň
$\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h,k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a+h, b+k] \in U_\delta([a,b])$ platí:

$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \eta(h,k)$ a zároveň

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$$

Význam věty:

$f(a+dx, b+dy) - f(a,b)$ je přírůstek funkce při přechodu z bodu $[a,b]$ do bodu $[a+dx, b+dy]$. Předchozí vztah lze tedy zapsat takto

$\Delta f = f(a+dx, b+dy) - f(a,b) = df_{a,b}(dx,dy) + \eta(dx,dy).$

Jestliže nahradíme přírůstek Δf přírůstkem na tečné rovině df, dopustíme se chyby $\eta(dx,dy)$, tato chyba se blíží k nule, blížíme-li se k bodu $[a,b]$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$.

Analogicky případu $n = 2$ lze formulovat větu, ze které vyplývá, že pokud má funkce $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) \approx f'_{x_1}(X_0)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0)dx_n.$$

Totální diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině, přejdeme-li z bodu $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ do bodu $X = [x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n]$.

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right).$$

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right).$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_2(x, y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a, b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x, y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $T_2(x, y)$ až do řádu 2 se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_2(x, y)$ nazýváme Taylorovým polynomem řádu 2 příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2\right).$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_2(x, y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a, b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x, y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $T_2(x, y)$ až do řádu 2 se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_2(x, y)$ nazýváme Taylorovým polynomem řádu 2 příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Poznámka : Místo výrazů $(x - a),\ (y - b)$ lze také psát $dx,\ dy$.

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0, 0) = 0$,

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x,y)$ v bodě $[0,0]$ pro kvadratickou formu $Q(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0,0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x,y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0,0) = (0,0)^\top$,

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ pro kvadratickou formu $Q(x, y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0, 0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x, y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0, 0) = (0, 0)^\top$,
a pro Hessovu matici platí $\mathbf{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x,y)$ v bodě $[0,0]$ pro kvadratickou formu $Q(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0,0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x,y) = (2x+5y, 5x+6y)^\top$, takže $\nabla Q(0,0) = (0,0)^\top$,
a pro Hessovu matici platí $\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
Dostaneme tedy $T_2(0,0) = f(0,0) + \frac{1}{1!}(0(x-0) + 0(y-0)) + \frac{1}{2!}\left(2(x-0)^2 + 2\cdot 5(x-0)(y-0) + 6(y-0)^2\right) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Určete $T_2(x,y)$ v bodě $[0,0]$ pro kvadratickou formu $Q(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Řešení: Funkční hodnota formy v zadaném bodě $Q(0,0) = 0$,
Pro gradient máme $\nabla Q(x,y) = (2x + 5y, 5x + 6y)^\top$, takže $\nabla Q(0,0) = (0,0)^\top$,
a pro Hessovu matici platí $\mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
Dostaneme tedy $T_2(0,0) = f(0,0) + \frac{1}{1!}(0(x-0) + 0(y-0)) + \frac{1}{2!}\left(2(x-0)^2 + 2\cdot 5(x-0)(y-0) + 6(y-0)^2\right) = x^2 + 5xy + 3y^2$

Věta : Pro kvadratickou formu $Q(x,y)$ platí $T_2(x,y) = Q(x,y)$.

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y)$:
$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x, y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x, y) = y \cdot (y - 1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x, y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x, y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y)$:
$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x, y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x, y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x, y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x, y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1, 1]$ jsou
$f'_x(1, 1) = 1,\ f'_y(1, 1) = 0,\ f''_{xx}(1, 1) = 0,\ f''_{xy}(1, 1) = 1,\ f''_{yy}(1, 1) = 0$, takže
$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + 1 + \frac{1}{2!}(x-1)(y-1)$

Taylorův polynom - použití

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1,1]$ jsou
$f'_x(1,1) = 1$, $f'_y(1,1) = 0$, $f''_{xx}(1,1) = 0$, $f''_{xy}(1,1) = 1$, $f''_{yy}(1,1) = 0$, takže
$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + 1 + \frac{1}{2!}(x-1)(y-1)$

Aplikujeme tento vztah pro odhad $0,9^{1,1}$ pomocí $T_2(0,9;1,1)$:
$0,9^{1,1} \approx T_2(0,9;1,1) = 1 + \frac{1}{1!}(0,9-1) + 1 + \frac{2}{2!}(0,9-1)(1,1-1) = 0,89.$

Konvexní množina

Konvexita hraje v matematice pro ekonomy významnou roli. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní, jestliže pro každé dva její body $A,\ B$ jsou všechny body úsečky AB také prvky množiny M. Tuto vlastnost můžeme analyticky vyjádřit symbolickým zápisem:

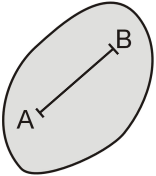
$$A, B \in M \Rightarrow \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : \lambda A + (1 - \lambda) B \in M$$

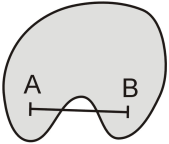
Konvexní množina

Konvexita hraje v matematice pro ekonomy významnou roli. Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní, jestliže pro každé dva její body A, B jsou všechny body úsečky AB také prvky množiny M. Tuto vlastnost můžeme analyticky vyjádřit symbolickým zápisem:

$$A, B \in M \Rightarrow \forall\lambda \in \langle 0, 1\rangle : \lambda A + (1 - \lambda)B \in M$$

(výrazu na pravé straně se říká konvexní kombinace A, B) Na obrázku je znázorněn příklad konvexní a nekonvexní množiny.





Poznámka : Prázdná a jednobodová množina jsou triviálně konvexní. Průnik dvou konvexních množin je opět konvexní množinou (toto tvrzení lze rozšířit pro průnik více konvexních množin). Platí totéž i pro sjednocení?

Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda) f(B).$

Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$

Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."

Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$$

Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."Pro opačné nerovnosti dostaneme definici konkávní, resp. ryze konkávní funkce.

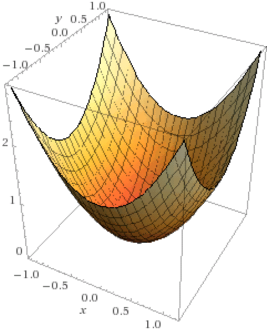
Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:

$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B).$

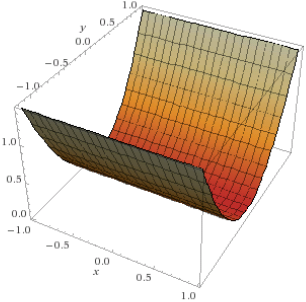
Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."Pro opačné nerovnosti dostaneme definici konkávní, resp. ryze konkávní funkce.

Na obrázku je znázorněn příklad funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$, která je ryze konvexní v $\mathbb{R}^2$.



Konvexní a konkávní funkce

Funkci f definovanou na konvexní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme konvexní na M, jestliže pro každé dva body $A, B \in M$ platí:
$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B).$
Pokud je pro všechna $A \neq B$ a $\lambda \in (0, 1)$ tato nerovnost ostrá, je funkce f na množině M ryze konvexní. Geometrický význam: "Spojnice každých dvou bodů grafu leží nad grafem."Pro opačné nerovnosti dostaneme definici konkávní, resp. ryze konkávní funkce.
Na obrázku je znázorněn příklad funkce $f(x, y) = y^2$, která je (neryze) konvexní v $\mathbb{R}^2$.



Konvexní a konkávní funkce

Příklady konvexních funkcí v $\mathbb{R}^n$:

- Pro libovolný vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$ konvexní na $\mathbb{R}^n$ (není ale ryze konvexní). Současně je tato funkce i konkávní (není ale ryze konkávní).
- Euklidovská metrika $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je konvexní na $\mathbb{R}^n$.

Konvexní a konkávní funkce

Příklady konvexních funkcí v $\mathbb{R}^n$:

- Pro libovolný vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$ konvexní na $\mathbb{R}^n$ (není ale ryze konvexní). Současně je tato funkce i konkávní (není ale ryze konkávní).
- Euklidovská metrika $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je konvexní na $\mathbb{R}^n$.

Pro konvexní funkce platí řada tvrzení:

- Jsou-li $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ konvexní funkce, pak jejich součet $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ je též konvexní (totéž platí i pro součin $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ v případě nezápornosti funkcí).
- Funkce $f(\mathbf{x})$ je (ryze) konvexní funkce $\Leftrightarrow -f(\mathbf{x})$ je (ryze) konkávní.
- Pro konvexní funkci $f(\mathbf{x})$ na $\mathbb{R}^n$ a libovolnou konstantu c platí: Množina $X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ je konvexní. Všechny funkce splňující zadanou podmínku pro $\forall c \in \mathbb{R}$ se souhrně nazývají kvazikonvexní. Kvazikonvexita je tedy slabší pojem než konvexita. Tento pojem se v ekonomii hodně používá, neboť ekonomové někdy vyjadřují užitek pomocí preferencí a ne pomocí přesně specifikované měřitelné užitkové funkce (ordinalita vs kardinalita).

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace.

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu).

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \ f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Příklad : Je funkce $f(x, y, z) = x^2 + z \cdot y^2$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1, 1]$?

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Příklad : Je funkce $f(x, y, z) = x^2 + z \cdot y^2$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1, 1]$?

Řešení: Spočítáme Hessovu matici:

Hessova matice konvexních a konkávních funkcí

Funkci f nazveme konvexní v bodě $\mathbf{t}$, jestliže existuje okolí tohoto bodu, na kterém je konvexní. U funkce jedné proměnné lze konvexitu rozpoznat podle znaménka druhé derivace. Zobecněním této úvahy pro funkci více proměnných dostaneme tvrzení: Dvakrát diferencovatelná funkce f je konvexní v bodě $\mathbf{t}$ právě když pro každý směr $\mathbf{s}$ platí: $f_s''(\mathbf{t}) \geq 0$ (při platnosti ostré nerovnosti dostaneme ryzí konvexitu). Tedy Hessova matice $H(\mathbf{t})$ musí mít následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top \geq 0$$

Již víme, že takové matice se nazývají pozitivně semidefinitní (pro ryzí konvexitu pak musí Hessova matice být pozitivně definitní a pro konkavitu jsou nerovnosti opačné, tj. Hessova matice negativně (semi)definitní).

Příklad : Je funkce $f(x, y, z) = x^2 + z \cdot y^2$ konvexní nebo konkávní v bodě $[1, 1, 1]$?

Řešení: Spočítáme Hessovu matici: $H(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, například pro vektor $\mathbf{s} = (-1, -1, 2)$ platí $\mathbf{s} \cdot H(1, 1, 1) \cdot \mathbf{s}^\top = -4 < 0$, ale pro vektor $\mathbf{s} = (1, 1, 1)$ platí $\mathbf{s} \cdot H(1, 1, 1) \cdot \mathbf{s}^\top = 8 > 0$ Funkce není v bodě $[1, 1, 1]$ ani konvexní ani konkávní.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.
Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Lokální extrémy

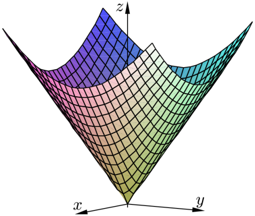
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad: Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má minimum v bodě $[0, 0]$, kde neexistují parciální derivace.



Lokální extrémy

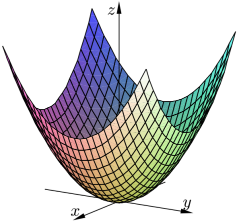
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad: Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má minimum ve stacionárním bodě $[0, 0]$.



Lokální extrémy

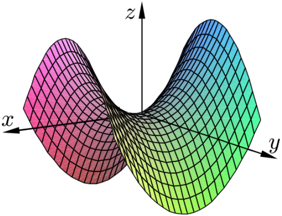
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a} \in Df$:

1. lokální maximum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \leq f(a)$
2. lokální minimum, když existuje jeho δ-okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \subset Df$ takové, že
   $\forall x \in U_\delta(\mathbf{a})$ platí $f(x) \geq f(a)$

Poznámka: jsou-li nerovnosti splněny na ryzím okolí $U_\delta(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ ostře, pak extrémy nazýváme ostré.

Poznámka: Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (tedy bodech s nulovým gradientem), nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad: Funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ má stacionární bod $[0, 0]$, kde není extrém, jedná se o sedlový bod.



Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Sylvestrovo kritérium

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in Df$ její stacionární bod. Označme $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ determinant submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců Hessovy matice $H(\mathbf{a})$. Pak

1. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) > 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. minimum.
2. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) < 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ (-1)^n D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. maximum.
3. Jestliže jsou všechny minory $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ nenulové a přitom neplatí žádná z předchozích možností, pak v bodě $\mathbf{a}$ není extrém.

Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Sylvestrovo kritérium

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in Df$ její stacionární bod. Označme $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \dots, n$ determinant submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců Hessovy matice $H(\mathbf{a})$. Pak

1. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) > 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \dots,\ D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. minimum.
2. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) < 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \dots,\ (-1)^n D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. maximum.
3. Jestliže jsou všechny minory $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \dots, n$ nenulové a přitom neplatí žádná z předchozích možností, pak v bodě $\mathbf{a}$ není extrém.

Příklad: Hessova matice funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ ve stacionárním bodě $[0, 0]$ je: $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, její hlavní minory jsou $D_1(0, 0) = 2,\ D_2(0, 0) = 4$, tedy je pozitivně definitní a v bodě $[0, 0]$ je minimum.

Lokální extrémy

Při rozhodování o tom, zda ve stacionárním bodě nastává lokální extrém, se řídíme pomocí Hessovy matice. Zřejmě je-li ve svém stacionárním bodě funkce f ryze konvexní, tj. má-li zde pozitivně definitní Hessovu matici, pak zde nabývá svého lokálního minima (analogicky maximum a konkavita). Připomeňme, že pozitivně definitní matici lze rozpoznat podle toho, že má všechny řídící hlavní minory. Podmínky pro existenci extrému shrnuje

Sylvestrovo kritérium

Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in Df$ její stacionární bod. Označme $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ determinant submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců Hessovy matice $H(\mathbf{a})$. Pak

1. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) > 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. minimum.
2. Jestliže $D_1(\mathbf{a}) < 0,\ D_2(\mathbf{a}) > 0, \ldots,\ (-1)^n D_n(\mathbf{a}) > 0$, má f v $\mathbf{a}$ lok. maximum.
3. Jestliže jsou všechny minory $D_k(\mathbf{a}),\ k = 1, \ldots, n$ nenulové a přitom neplatí žádná z předchozích možností, pak v bodě $\mathbf{a}$ není extrém.

Příklad: Hessova matice funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ ve stacionárním bodě $[0, 0]$ je: $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \text{-}2 \end{pmatrix}$, její hlavní minory jsou $D_1(0, 0) = 2,\ D_2(0, 0) = -4$, tedy je indefinitní a v bodě $[0, 0]$ není extrém.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad : Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad : Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$.
Řešení: První derivace jsou $f'_x = 2xy + y^2 - y, f'_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení:
$x = y = 0;\ x = 0, y = 1;\ x = 1, y = 0;\ x = 1/3, y = 1/3$, což dává čtyři stacionární body dané funkce.

Lokální extrémy - příklad

Analytické řešení úlohy hledání volných extrémů funkce f v $\mathbb{R}^n$ tedy spočívá v nalezení stacionárních bodů (resp. bodů, kde neexistuje gradient) a vyšetření definitnosti Hessovy matice v těchto bodech. Při hledání stacionárních bodů řešíme soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad : Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$.
Řešení: První derivace jsou $f'_x = 2xy + y^2 - y, f'_y = x^2 + 2xy - x$. Položíme-li obě parciální derivace současně nule, má soustava následující řešení: $x = y = 0$; $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 1/3, y = 1/3$, což dává čtyři stacionární body dané funkce. Hodnoty Hessovy matice ve stacionárních bodech jsou postupně $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $H(1/3, 1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Pouze poslední matice je pozitivně definitní, funkce má jen jedno lokální minimum, a to v bodě $[1/3, 1/3]$.

Globální extrémy

Řekneme, že funkce f dosahuje na množině X v bodě $\mathbf{a} \in X$ svého

1. globálního maxima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
2. globálního minima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$

Poznámka: Místo pojmu globální též používáme pojem absolutní. Opět definujeme ostré extrémy, jestliže nerovnosti jsou ostré pro $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Globální extrémy

Řekneme, že funkce f dosahuje na množině X v bodě $\mathbf{a} \in X$ svého

1. globálního maxima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
2. globálního minima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$

Poznámka: Místo pojmu globální též používáme pojem absolutní. Opět definujeme ostré extrémy, jestliže nerovnosti jsou ostré pro $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Weierstrassova věta:

Je-li $X \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na X, pak má f na X globální extrémy, a to buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici množiny X.

Globální extrémy

Řekneme, že funkce f dosahuje na množině X v bodě $\mathbf{a} \in X$ svého

1. globálního maxima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$
2. globálního minima jestliže $\forall \mathbf{x} \in X$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$

Poznámka: Místo pojmu globální též používáme pojem absolutní. Opět definujeme ostré extrémy, jestliže nerovnosti jsou ostré pro $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Weierstrassova věta:

Je-li $X \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá funkce na X, pak má f na X globální extrémy, a to buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici množiny X.

Poznámka: Není-li množina X uzavřená nebo ohraničená, pak globální extrémy nemusí existovat. Pokud extrémy existují, jsou jejich hodnoty určeny jednoznačně. Funkce však může nabývat těchto hodnot obecně ve více bodech. Hranici množiny lze většinou popsat pomocí rovnic. Vyšetřování hranice je úlohou s omezením.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1,0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1, 0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.
Pro další postup stanovíme podezřelé body. Nejprve vyšetříme stacionární body jako řešení soustavy

$$f'_x = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

$$f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$$

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1, 0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.
Pro další postup stanovíme podezřelé body. Nejprve vyšetříme stacionární body jako řešení soustavy
$f'_x = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$
$f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$
Nalezli jsme bod $P_1 = [1, 0]$. Další skupinou podezřelých bodů je hraniční elipsa, a to proto, že hranice je vždy podezřelá a navíc v jejích bodech neexistují parciální derivace.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Řešení: Definičním oborem funkce je množina bodů vyhovujících nerovnici $2x - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Po doplnění na čtverec dostaneme nerovnici $(x-1)^2 + 4y^2 \leq 1$.
Jedná se tedy o množinu bodů ohraničenou elipsou o středu $[1, 0]$ a poloosách rovných 1 a $\frac{1}{2}$.
Pro další postup stanovíme podezřelé body. Nejprve vyšetříme stacionární body jako řešení soustavy
$f'_x = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$
$f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0,$
Nalezli jsme bod $P_1 = [1, 0]$. Další skupinou podezřelých bodů je hraniční elipsa, a to proto, že hranice je vždy podezřelá a navíc v jejích bodech neexistují parciální derivace.

Porovnáme funkční hodnoty, $f(P_1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2 - 4 \cdot 0^2} = 1$. Pro libovolný bod P_e na hraniční elipse platí: $f(P_e) = 0$. Tedy funkce má v bodě P_1 globální maximum a ve všech bodech hranice nabývá globálního minima.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku, který je určen body $A = [0; 0]$; $B = [2; 0]$; $C = [2; 1]$; $D = [0; 1]$.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku, který je určen body $A = [0; 0]$; $B = [2; 0]$; $C = [2; 1]$; $D = [0; 1]$.

Řešení: Nalezneme lokální extrémy funkce f. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f'_y = 2y - 1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhých derivací je rovna $H(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f.

Globální extrémy - příklad

Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku, který je určen body $A = [0; 0]$; $B = [2; 0]$; $C = [2; 1]$; $D = [0; 1]$.

Řešení: Nalezneme lokální extrémy funkce f. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f'_y = 2y - 1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhých derivací je rovna $H(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f.
Hranice zadané množiny je tvořena čtyřmi úsečkami AB, BC, CD a DA. Je tedy třeba řešit čtyři optimalizační úlohy s funkcí f a postupně s podmínkami $V_1 : y = 0$, $V_2 : x = 2$, $V_3 : y = 1$ a $V_4 : x = 0$.

Pozor! Při této formulaci je zapotřebí zvlášť vyšetřit body A, B, C, D, protože nehledáme extrémy na celých hraničních přímkách, ale pouze na příslušných úsečkách.

Globální extrémy - příklad

Úlohy optimalizace f za podmínky V_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde

$F_1(x) = f(x, 0) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_2(y) = f(2, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$,
$F_3(x) = f(x, 1) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_4(y) = f(0, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$.

Globální extrémy - příklad

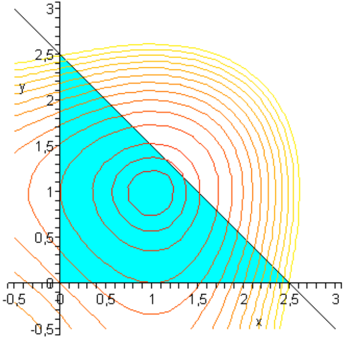
Úlohy optimalizace f za podmínky V_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde
$F_1(x) = f(x, 0) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_2(y) = f(2, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$,
$F_3(x) = f(x, 1) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$,
$F_4(y) = f(0, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$.
Snadno se zjistí, že jednotlivé úlohy mají minimum v bodech postupně: $a = [1, 0]$, $b = [2, \frac{1}{2}]$, $c = [1, 1]$ a $d = [0, \frac{1}{2}]$. Hodnoty funkce f ve všech podezřelých bodech shrneme v tabulce:

$\mathbf{x}$	s	A	B	C	D	a	b	c	d
f($\mathbf{x}$)	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1

Je zřejmé, že nejmenší hodnoty dosahuje funkce v bodě $s = [1, \frac{1}{2}]$ a největší v bodech A, B, C, D.

Optimalizace s omezením - grafické řešení

Uvažujme úlohu optimalizace funkce $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ na množině M vymezené nerovnostmi $x \geq 0,\ y \geq 0, 2x + 2y \leq 5$. Problém si můžeme znázornit graficky. Modře je vyznačena přípustná množina, vrstevnice jsou odstupňovány od nejnižší červené po nejvyšší žlutou.



Zřejmě má funkce f na množině M minimum v bodě $[1,1]$ a maximum v bodech $[0;2,5]$ a $[2,5;0]$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \rightarrow min$,

na množině M vymezené soustavou m rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots m.$

Jsou - li funkce f i $g_i, \; i = 1, \dots, m$ spojitě diferencované a jsou - li gradienty omezení ∇g_i lineárně nezávislé vektory (tj. žádné omezení není nadbytečné), pak pro bod optima $\mathbf{x}^*$ existují jednoznačné hodnoty $\lambda_1, \; \dots, \lambda_m$, takové, že:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Čísla $\lambda_1, \; \dots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory a umožňují převedení optimalizační úlohy na řešení systému rovnic.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Uvažujme úlohu na vázaný extrém $f(\mathbf{x}) \rightarrow min$,

na množině M vymezené soustavou m rovnic $g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots m.$

Jsou - li funkce f i $g_i, \; i = 1, \ldots, m$ spojitě diferencované a jsou - li gradienty omezení ∇g_i lineárně nezávislé vektory (tj. žádné omezení není nadbytečné), pak pro bod optima $\mathbf{x}^*$ existují jednoznačné hodnoty $\lambda_1, \; \ldots, \lambda_m$, takové, že:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Čísla $\lambda_1, \; \ldots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory a umožňují převedení optimalizační úlohy na řešení systému rovnic. Jaký je formální postup? Vytvoří se tzv. Lagrangeova funkce

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x})$$

a sestaví se podmínky pro její stacionární body, tzv. podmínky 1. řádu:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0, \quad \nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

Jde o systém $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých (posledních m rovnic vyjadřuje vlastně vazební podmínky). Jestliže má tento systém řešení $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ a jsou-li f i M konvexní, pak je bod $\mathbf{x}^*$ globálním minimem funkce f na množině M.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze:
Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze:
Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Řešení: Hledáme tedy bod $[x, y, z]$ ležící v zadané rovině, pro nějž je vzdálenost od bodu $[5, 1, 2]$ minimální. Místo minimalizace funkce $f(x, y, z) = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2}$ můžeme pro zjednodušení výpočtu minimalizovat její druhou mocninu. Abychom mohli použít Lagrangeův multiplikátor, je třeba rovnici omezení anulovat: $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze: Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Řešení: Hledáme tedy bod $[x, y, z]$ ležící v zadané rovině, pro nějž je vzdálenost od bodu $[5, 1, 2]$ minimální. Místo minimalizace funkce $f(x, y, z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$ můžeme pro zjednodušení výpočtu minimalizovat její druhou mocninu. Abychom mohli použít Lagrangeův multiplikátor, je třeba rovnici omezení anulovat: $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Sestavme Lagrangeovu funkci úlohy: $L(x, y, z, \lambda) = (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(2x + 3y + z - 6)$ a určeme její parciální derivace:

$L_x(x, y, z, \lambda) = 2(x-5) + 2\lambda,$
$L_y(x, y, z, \lambda) = 2(y-1) + 3\lambda,$
$L_z(x, y, z, \lambda) = 2(z-2) + \lambda,$
$L_\lambda(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + z - 6.$

Optimalizační úloha s omezením ve formě rovností

Ukažme si metodu Lagrangeových multiplikátorů na následující úloze: Najděte patu kolmice spuštěné z bodu $[5, 1, 2]$ na rovinu $2x + 3y + z = 6$.

Řešení: Hledáme tedy bod $[x, y, z]$ ležící v zadané rovině, pro nějž je vzdálenost od bodu $[5, 1, 2]$ minimální. Místo minimalizace funkce $f(x, y, z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$ můžeme pro zjednodušení výpočtu minimalizovat její druhou mocninu. Abychom mohli použít Lagrangeův multiplikátor, je třeba rovnici omezení anulovat: $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Sestavme Lagrangeovu funkci úlohy:
$L(x, y, z, \lambda) = (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(2x + 3y + z - 6)$ a určeme její parciální derivace:
$L_x(x, y, z, \lambda) = 2(x-5) + 2\lambda,$
$L_y(x, y, z, \lambda) = 2(y-1) + 3\lambda,$
$L_z(x, y, z, \lambda) = 2(z-2) + \lambda,$
$L_\lambda(x, y, z, \lambda) = 2x + 3y + z - 6.$
Položíme parciální rovnice rovny nule a dostaneme lineární systém, jehož vyřešením získáme bod optima $[\frac{52}{14}, \frac{-13}{14}, \frac{19}{14}]$. Protože minimalizovaná funkce i přípustná množina jsou konvexní, nalezli jsme bod minima.