Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je **diferenciálními rovnicemi** (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je diferenciálními rovnicemi (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

- Je-li neznámá funkce x závislá pouze na jedné proměnné, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice,
- v opačném případě se jedná o parciální diferenciální rovnice.

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je diferenciálními rovnicemi (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

- Je-li neznámá funkce x závislá pouze na jedné proměnné, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice,
- v opačném případě se jedná o parciální diferenciální rovnice.

My se budeme zabývat pouze prvním typem rovnic a neznámou budeme chápat většinou jako funkci času. Proto pro derivaci funkce $x(t)$ používáme speciální značení $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Veškerá níže uvedená teorie je bez újmy na obecnosti aplikovatelná i pro jiné nezávislé proměnné než je čas.

Diferenciální rovnice - úvod

V ekonomii se často zkoumá, jak se vybrané veličiny mění v čase. Tento vývoj bývá popsán většinou pomocí rovnic nebo soustav rovnic. Je-li v těchto rovnicích čas považován za spojitou veličinu a figurují-li zde jako neznámé funkce a jejich derivace, nazýváme je diferenciálními rovnicemi (pro diskrétní čas se hovoří o diferenčních rovnicích).

- Je-li neznámá funkce x závislá pouze na jedné proměnné, jedná se o obyčejné diferenciální rovnice,
- v opačném případě se jedná o parciální diferenciální rovnice.

My se budeme zabývat pouze prvním typem rovnic a neznámou budeme chápat většinou jako funkci času. Proto pro derivaci funkce $x(t)$ používáme speciální značení $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Veškerá níže uvedená teorie je bez újmy na obecnosti aplikovatelná i pro jiné nezávislé proměnné než je čas.

Příklad : Typickým příkladem diferenciální rovnice je vztah $\dot{x} = x$, popisující přirozený růst, kdy je tempo růstu přímo úměrné velikosti populace. Používá se též pojem exponenciální růst, protože této rovnici vyhovuje funkce $x(t) = e^t$ (a všechny její násobky).

Diferenciální rovnice prvního řádu

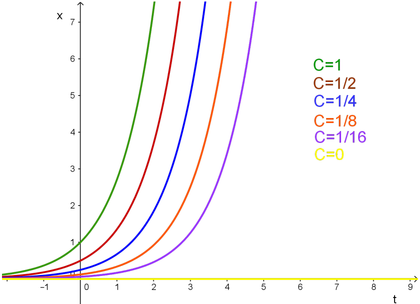
Definice : Pro danou funkci dvou proměnných $F(t, x)$ a neznámou funkci $x(t)$ nazveme zápis $\boxed{\dot{x} = F(t, x)}$ diferenciální rovnicí prvního řádu.

Poznámka : Řešením rovnice na intervalu I nazveme libovolnou funkci $\varphi(t)$ definovanou na tomto intervalu, která rovnici vyhovuje, tj. $\forall t \in I : \ \dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t))$. Diferenciální rovnice obvykle má nekonečně mnoho řešení, množinu všech nazveme obecným řešením, o konkrétních funkcích z této množiny hovoříme jako o partikulárním řešení. Grafy těchto funkcí mohou být znázorněny v rovině tx, říkáme jim integrální křivky.

Diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Pro danou funkci dvou proměnných $F(t,x)$ a neznámou funkci $x(t)$ nazveme zápis $\boxed{\dot{x} = F(t,x)}$ diferenciální rovnicí prvního řádu.

Poznámka : Řešením rovnice na intervalu I nazveme libovolnou funkci $\varphi(t)$ definovanou na tomto intervalu, která rovnici vyhovuje, tj.
$\forall t \in I: \ \dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t))$. Diferenciální rovnice obvykle má nekonečně mnoho řešení, množinu všech nazveme obecným řešením, o konkrétních funkcích z této množiny hovoříme jako o partikulárním řešení. Grafy těchto funkcí mohou být znázorněny v rovině tx, říkáme jim integrální křivky.
Na obrázku je znázorněno několik integrálních křivek pro rovnici $\dot{x} = x$.



Diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = x + t$.

1. Ukažte, že funkce $x = e^t - 1$ není řešením rovnice
2. Ukažte, že funkce $x = -t - 1$ a $x = e^t - t - 1$ jsou řešením rovnice
3. Ukažte, že pro libovolnou hodnotu konstanty C je funkce $x = Ce^t - t - 1$ řešením rovnice.

Diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = x + t$.

1. Ukažte, že funkce $x = e^t - 1$ není řešením rovnice
2. Ukažte, že funkce $x = -t - 1$ a $x = e^t - t - 1$ jsou řešením rovnice
3. Ukažte, že pro libovolnou hodnotu konstanty C je funkce $x = Ce^t - t - 1$ řešením rovnice.

Řešení:

1. Pro $x = e^t - 1$ je $L = \dot{x} = e^t$, ale $P = x + t = e^t + t - 1$, tedy pravá a levá strana se rovnají jen pro $t = 1$, takže funkce není řešením rovnice.
2. Pro $x = -t - 1$ je $L = \dot{x} = -1$ a $P = x + t = -t - 1 + t = -1$, rovnice je splněna.
   Podobně pro $x = e^t - t - 1$ je $L = \dot{x} = e^t - 1$ a
   $P = x + t = e^t - t - 1 + t = e^t - 1$, pravá a levá strana se opět rovnají
3. Pro obecné C je derivace funkce $x = Ce^t - t - 1$ rovna $L = \dot{x} = Ce^t - 1$ a $P = x + t = Ce^t - t - 1 + t = Ce^t - 1$, tedy funkce rovnici vyhovuje.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.
Řešení: Zapíšeme si podmínku pro řešení $x(t) = Ce^t - t - 1$ ve tvaru $x(0) = 1$. Máme tedy $x(0) = Ce^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1$, odkud určíme $C = 2$.

Počáteční podmínky

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.
Řešení: Zapíšeme si podmínku pro řešení $x(t) = Ce^t - t - 1$ ve tvaru $x(0) = 1$. Máme tedy $x(0) = Ce^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1$, odkud určíme $C = 2$.

Poznámka : Pokud $t = 0$ značí počáteční čas, pak podmínku $x(0) = 1$ nazýváme počáteční podmínkou. Formulace úloh s počáteční podmínkou je v ekonomii velmi častá. Například uvažujme model ekonomického růstu s diferenciální rovnicí prvního řádu pro akumulaci kapitálu. Počáteční zásoba kapitálu je známa z historických dat, což umožní najít jednoznačné řešení rovnice.

Počáteční podmínky

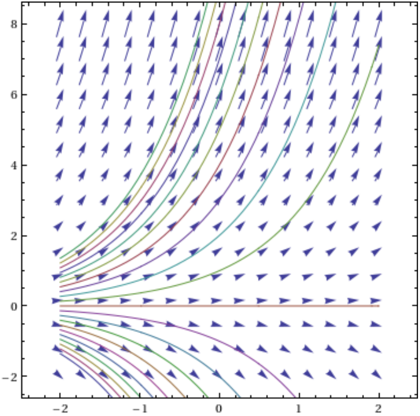
Jak jsme viděli v předchozím příkladě, obecné řešení může záležet na jedné nebo více kostantách. Jestliže požadujeme, aby hledaná funkce procházela nějakým konkrétním bodem v rovině tx, pak tato podmínka většinou jednoznačně určí konkrétní hodnotu konstanty.

Příklad : Najděte řešení diferenciální rovnice z předchozího příkladu, které prochází bodem $(t, x) = (0, 1)$.
Řešení: Zapíšeme si podmínku pro řešení $x(t) = Ce^t - t - 1$ ve tvaru $x(0) = 1$. Máme tedy $x(0) = Ce^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1$, odkud určíme $C = 2$.

Poznámka : Pokud $t = 0$ značí počáteční čas, pak podmínku $x(0) = 1$ nazýváme počáteční podmínkou. Formulace úloh s počáteční podmínkou je v ekonomii velmi častá. Například uvažujme model ekonomického růstu s diferenciální rovnicí prvního řádu pro akumulaci kapitálu. Počáteční zásoba kapitálu je známa z historických dat, což umožní najít jednoznačné řešení rovnice. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem (t_0, x_0) žádná další křivka a integrální křivky se nikde neprotínají.

Směrové pole diferenciální rovnice prvního řádu

Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici $\dot{x} = F(t, x)$ chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například na pravidelné síti) bodů (t, x) vektory $(1, F(t, x))$, obdržíme směrové pole diferenciální rovnice, tj. systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.



Otázky související s diferenciálními rovnicemi

- Od počátků systematického zkoumání problematiky diferenciálních rovnic, které započali Newton a Leibnitz v 17. století, se matematikové snaží o explicitní vyjádření řešení určitých typů rovnic
- S rozvojem výpočetní techniky se vyvíjí řada užitečných numerických postupů pro přibližné řešení úloh, u nichž exaktní řešení není známo
- Často není ani nutné explicitní vyjádření a pro praktické použití stačí popis důležitých vlastností řešení (existence, jednoznačnost, citlivost, stabilita, atd.)

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Příklad : Rozhodněte, zda se jedná o rovnice se separovanými proměnnými

1. $\dot{x} = xt + 2t - x - 2$
2. $\dot{x} = t^2 + x$
3. $\dot{x} = 2x$

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Příklad : Rozhodněte, zda se jedná o rovnice se separovanými proměnnými

1. $\dot{x} = xt + 2t - x - 2$
2. $\dot{x} = t^2 + x$
3. $\dot{x} = 2x$

Řešení:

1. ANO, $\dot{x} = (x + 2)(t - 1)$
2. NE, nelze zapsat v požadovaném tvaru
3. ANO, $\dot{x} = 2x \cdot 1$

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice : V případě, že pravou stranu diferenciální rovnice lze zapsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné t, tedy ve tvaru $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, nazveme rovnici diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými.

Příklad : Rozhodněte, zda se jedná o rovnice se separovanými proměnnými

1. $\dot{x} = xt + 2t - x - 2$
2. $\dot{x} = t^2 + x$
3. $\dot{x} = 2x$

Řešení:

1. ANO, $\dot{x} = (x + 2)(t - 1)$
2. NE, nelze zapsat v požadovaném tvaru
3. ANO, $\dot{x} = 2x \cdot 1$

Poznámka : Má-li funkce $g(x)$ kořen a, pak je automaticky konstantní funkce $x(t) = a$ řešením diferenciální rovnice $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$.

Postup řešení rovnic se separovanými proměnnými

1. Zapíšeme rovnici ve tvaru $\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$
2. Separujeme proměnné: $\frac{dx}{g(x)} = f(t)\,dt$
3. Zintegrujeme obě strany: $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\,dt$
4. Pokud je to možné, po zintegrování vyjádříme z rovnice neznámou funkci $x(t)$.
5. Do množiny všech řešení musíme zahrnout též případnou konstantní funkci $x(t) = a$, je-li a nulový bod funkce $g(x)$.

Postup řešení rovnic se separovanými proměnnými

1. Zapíšeme rovnici ve tvaru $\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$
2. Separujeme proměnné: $\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt$
3. Zintegrujeme obě strany: $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt$
4. Pokud je to možné, po zintegrování vyjádříme z rovnice neznámou funkci $x(t)$.
5. Do množiny všech řešení musíme zahrnout též případnou konstantní funkci $x(t) = a$, je-li a nulový bod funkce $g(x)$.

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ a najděte integrální křivku, která prochází bodem $(t, x) = (1, -1)$.

Postup řešení rovnic se separovanými proměnnými

1. Zapíšeme rovnici ve tvaru $\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$
2. Separujeme proměnné: $\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt$
3. Zintegrujeme obě strany: $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt$
4. Pokud je to možné, po zintegrování vyjádříme z rovnice neznámou funkci $x(t)$.
5. Do množiny všech řešení musíme zahrnout též případnou konstantní funkci $x(t) = a$, je-li a nulový bod funkce $g(x)$.

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ a najděte integrální křivku, která prochází bodem $(t, x) = (1, -1)$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že úloha má triviální řešení $x(t) = 0$. Toto řešení však neprochází bodem $(1, -1)$, takže dále postupujeme dle uvedeného návodu.

Rovnice se separovanými proměnnými - pokračování příkladu

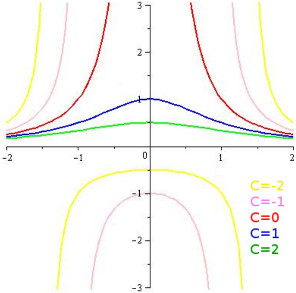
Při řešení rovnice $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ postupujeme v následujících krocích:

- Separuj: $-\frac{dx}{x^2} = 2t\, dt$
- Integruj: $-\int \frac{dx}{x^2} = \int 2t\, dt$
- Vyjádři: $\frac{1}{x} = t^2 + C$, odkud dostaneme $x = \frac{1}{t^2+C}$

Rovnice se separovanými proměnnými - pokračování příkladu

Při řešení rovnice $\frac{dx}{dt} = -2tx^2$ postupujeme v následujících krocích:

- Separuj: $-\frac{dx}{x^2} = 2t\,dt$
- Integruj: $-\int \frac{dx}{x^2} = \int 2t\,dt$
- Vyjádři: $\frac{1}{x} = t^2 + C$, odkud dostaneme $x = \frac{1}{t^2+C}$



Na obrázku je znázorněno několik integrálních křivek, bodem $(1, -1)$ prochází křivka splňující $-1 = \frac{1}{1^2+C}$, tedy křivka pro $C = -2$.

Rovnice se separovanými proměnnými - příklad

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$.

Rovnice se separovanými proměnnými - příklad

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že úloha nemá žádné triviální řešení, $g(x) = \frac{1}{x^6+1}$ nemá žádné nulové body. Postupujeme dle návodu:

- Separuj: $(x^6 + 1)\ dx = t^3\ dt$
- Integruj: $\int (x^6 + 1)\ dx = \int t^3\ dt$
- Vyjádři: $\frac{x^7}{7} + x = \frac{t^4}{4} + C$

Rovnice se separovanými proměnnými - příklad

Příklad : Vyřešete diferenciální rovnici $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$.

Řešení: Nejprve si povšimněme, že úloha nemá žádné triviální řešení, $g(x) = \frac{1}{x^6+1}$ nemá žádné nulové body. Postupujeme dle návodu:

- Separuj: $(x^6 + 1)\ dx = t^3\ dt$
- Integruj: $\int (x^6 + 1)\ dx = \int t^3\ dt$
- Vyjádři: $\frac{x^7}{7} + x = \frac{t^4}{4} + C$

V této úloze se nám nepodařlo nalézt explicitní vyjádření funkce x, avšak alespoň jsme nalezli pro tuto funkci rovnici, ve které se nevyskytuje její derivace.

Rovnice se separovanými proměnnými - aplikace

Uvedený postup můžeme aplikovat v úlohách o složeném úrokování ve spojitém čase : Označme $w = w(t) > 0$ hodnotu na investičním účtu v čase t, kde úroková míra spojitého úročení je rovna $r = r(t)$. Potom hodnotu w určíme pomocí řešení diferenciální rovnice $\dot{w} = r(t) \cdot w$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Oddělením proměnných a integrováním získáme $\int \frac{dw}{w} = \int r(t)\, dt.$ Odtud $\ln w = R(t) + C_1$, kde $R(t) = \int r(t)\, dt$. Řešení můžeme vyjádřit ve tvaru $w = e^{R(t)+C_1} = Ce^{R(t)},$ při označení $C = e^{C_1}$.

Rovnice se separovanými proměnnými - aplikace

Uvedený postup můžeme aplikovat v úlohách o složeném úrokování ve spojitém čase : Označme $w = w(t) > 0$ hodnotu na investičním účtu v čase t, kde úroková míra spojitého úročení je rovna $r = r(t)$. Potom hodnotu w určíme pomocí řešení diferenciální rovnice $\dot{w} = r(t) \cdot w$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Oddělením proměnných a integrováním získáme $\int \frac{dw}{w} = \int r(t)\, dt.$ Odtud $\ln w = R(t) + C_1$, kde $R(t) = \int r(t)\, dt$. Řešení můžeme vyjádřit ve tvaru $w = e^{R(t)+C_1} = Ce^{R(t)},$ při označení $C = e^{C_1}$.

Konkrétní řešení pro počáteční hodnotu $w(0)$ je dáno podmínkou $w(0) = Ce^{R(0)}$, odkud vyjádříme $C = w(0)e^{-R(0)}$. Úloha s počáteční podmínkou má tedy jednoznačné řešení $w(t) = w(0)e^{R(t)-R(0)}$, což může být též zapsáno jako $w(t) = w(0)e^{\int_0^t r(s)\, ds}.$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme rovnici tvaru $\dot{x} + a(t)x = b(t),$ kde $a(t),\ b(t)$ jsou spojité funkce proměnné t definované na jistém intervalu a $x(t)$ neznámá funkce.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme rovnici tvaru $\dot{x} + a(t)x = b(t),$ kde $a(t),\ b(t)$ jsou spojité funkce proměnné t definované na jistém intervalu a $x(t)$ neznámá funkce.

Příklad : Rovnice $\dot{x} + x = t$ je evidentně uvedeného typu. U rovnice $(t^2 + 1)\dot{x} + e^t x = t\ln t$ už to tak zřejmé není, ale po vydělení obou stran výrazem $t^2 + 1$ již dostaneme požadovaný tvar $\dot{x} + \frac{e^t}{(t^2+1)}x = \frac{t\ln t}{(t^2+1)}$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice : Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme rovnici tvaru $\dot{x} + a(t)x = b(t),$ kde $a(t),\ b(t)$ jsou spojité funkce proměnné t definované na jistém intervalu a $x(t)$ neznámá funkce.

Příklad : Rovnice $\dot{x} + x = t$ je evidentně uvedeného typu. U rovnice $(t^2+1)\dot{x} + e^t x = t\ln t$ už to tak zřejmé není, ale po vydělení obou stran výrazem t^2+1 již dostaneme požadovaný tvar $\dot{x} + \frac{e^t}{(t^2+1)}x = \frac{t\ln t}{(t^2+1)}$.

Nejjednodušším případem lineární rovnice 1. řádu je rovnice $\dot{x} + ax = b,$ kde $a,\ b$ jsou konstanty, přičemž $a \neq 0$. Tuto rovnici lze vyřešit pomocí umělého kroku, vynásobení obou stran rovnice výrazem e^{at}. Potom dostaneme $\dot{x}e^{at} + axe^{at} = be^{at},$ kde levá strana odpovídá derivaci součinu $x \cdot e^{at}$. Po zintegrování tedy máme $x \cdot e^{at} = \int be^{at}dt = \frac{b}{a}e^{at} + C$. Vydělíme-li vztah výrazem e^{at}, dostaneme řešení $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$

Poznámka : Pro $C = 0$ dostaneme konstantní řešení $x = \frac{b}{a}$, které nazýváme rovnovážným stavem rovnice. V případě $a > 0$ konverguje každé řešení pro $t \to \infty$ k rovnovážnému stavu, říkáme, že je rovnice stabilní.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.
Řešení: Dosadíme do odvozeného vztahu $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$ hodnoty $a = 2,\ b = 8$. Dostaneme $x = \frac{8}{2} + Ce^{-2t}$. Rovnovážný stav je $x = 4$ a rovnice je stabilní, protože $a = 2 > 0$. Tedy $x \to 4$ pro $t \to \infty$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.
Řešení: Dosadíme do odvozeného vztahu $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$ hodnoty $a = 2,\ b = 8$. Dostaneme $x = \frac{8}{2} + Ce^{-2t}$. Rovnovážný stav je $x = 4$ a rovnice je stabilní, protože $a = 2 > 0$. Tedy $x \to 4$ pro $t \to \infty$.

Popsaný postup může být aplikován i na rovnice s variabilní pravou stranou: $\dot{x} + ax = b(t)$. Pomocí umělé úpravy opět dostaneme $\frac{d}{dt}(x \cdot e^{at}) = b(t)e^{at}$, po zintegrování tedy $x \cdot e^{at} = \int b(t)e^{at}\, dt + C$, odkud

$$x = e^{-at} \int b(t)e^{at}\, dt + Ce^{-at}.$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2x = 8$, a rozhodněte, zda je stabilní.
Řešení: Dosadíme do odvozeného vztahu $x = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$ hodnoty $a = 2,\ b = 8$. Dostaneme $x = \frac{8}{2} + Ce^{-2t}$. Rovnovážný stav je $x = 4$ a rovnice je stabilní, protože $a = 2 > 0$. Tedy $x \to 4$ pro $t \to \infty$.

Popsaný postup může být aplikován i na rovnice s variabilní pravou stranou: $\dot{x} + ax = b(t)$. Pomocí umělé úpravy opět dostaneme $\frac{d}{dt}(x \cdot e^{at}) = b(t)e^{at}$, po zintegrování tedy $x \cdot e^{at} = \int b(t)e^{at}\, dt + C$, odkud

$$x = e^{-at} \int b(t)e^{at}\, dt + Ce^{-at}.$$

Pro obecný případ, kdy jsou oba koeficienty $a,\ b$ nekonstantní uvedeme řešení již bez postupu odvození.
Věta : Rovnice $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, má obecné řešení tvaru

$$x = e^{-\int a(t)\, dt} \left(\int b(t)e^{\int a(t)\, dt}\, dt + C \right).$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka : V případě rovnice s nulovou pravou stranou $\dot{x} + a(t)x = 0$ nazýváme rovnici homogenní. Vzorec pro řešení pak nabývá zjednodušené podoby $x = e^{-\int a(t)\ dt}\left(\int 0 \cdot e^{\int a(t)\ dt}\ dt + C\right) = Ce^{-\int a(t)\ dt}$. K řešení bychom se mohli dostat též pomocí separace proměnných, viz následující příklad.

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka : V případě rovnice s nulovou pravou stranou $\dot{x} + a(t)x = 0$ nazýváme rovnici homogenní. Vzorec pro řešení pak nabývá zjednodušené podoby $x = e^{-\int a(t)\ dt}\left(\int 0 \cdot e^{\int a(t)\ dt}\ dt + C\right) = Ce^{-\int a(t)\ dt}$. K řešení bychom se mohli dostat též pomocí separace proměnných, viz následující příklad.

Příklad : Vyřešte diferenciální rovnici $\dot{x} + 3t^2x = 0$.

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka : V případě rovnice s nulovou pravou stranou $\dot{x} + a(t)x = 0$ nazýváme rovnici homogenní. Vzorec pro řešení pak nabývá zjednodušené podoby $x = e^{-\int a(t)\,dt}\left(\int 0 \cdot e^{\int a(t)\,dt}\,dt + C\right) = Ce^{-\int a(t)\,dt}$. K řešení bychom se mohli dostat též pomocí separace proměnných, viz následující příklad.

Příklad : Vyřešte diferenciální rovnici $\dot{x} + 3t^2x = 0$.
Řešení: Separací proměnných obdržíme $\frac{dx}{dt} = -3t^2$, odtud $\ln x = -t^3 + c$
Tedy obecné řešení je $x(t) = Ce^{-t^3}$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2tx = 4t$ a nalezněte integrální křivku jdoucí bodem $(t, x) = (0, -2)$.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu - příklad

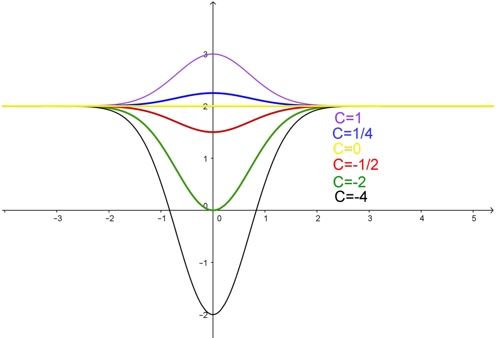
Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2tx = 4t$ a nalezněte integrální křivku jdoucí bodem $(t, x) = (0, -2)$.

Řešení: Dosadíme do vzorce $x = e^{-\int a(t)\,dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)\,dt}\,dt + C\right)$ funkce $a(t) = 2t$ a $b(t) = 4t$. Potom $\int a(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2$. Dosazením tedy získáme $x = e^{-t^2}\left(\int 4te^{t^2}\,dt + C\right) = Ce^{-t^2} + e^{-t^2}2e^{t^2} = Ce^{-t^2} + 2$.

Příklad : Najděte obecné řešení rovnice $\dot{x} + 2tx = 4t$ a nalezněte integrální křivku jdoucí bodem $(t, x) = (0, -2)$.

Řešení: Dosadíme do vzorce $x = e^{-\int a(t)\,dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)\,dt}\,dt + C\right)$ funkce $a(t) = 2t$ a $b(t) = 4t$. Potom $\int a(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2$. Dosazením tedy získáme $x = e^{-t^2}\left(\int 4te^{t^2}\,dt + C\right) = Ce^{-t^2} + e^{-t^2}2e^{t^2} = Ce^{-t^2} + 2$.

Na obrázku je znázorněno několik integrálních křivek, počáteční podmínce $(t, x) = (0, -2)$ vyhovuje ta, jejíž konstanta splňuje $-2 = Ce^{-0^2} + 2$, tj. pro $C = -4$.



Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx.$
Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx.$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} dx.$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Příklad : Diferenciální rovnice $x + t\dot{x} = 0$ neboli $xdt + tdx = 0$ je exaktní, protože vyhovuje definiční podmínce pro $F(t,x) = x \cdot t$.

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dx.$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Příklad : Diferenciální rovnice $x + t\dot{x} = 0$ neboli $xdt + tdx = 0$ je exaktní, protože vyhovuje definiční podmínce pro $F(t,x) = x \cdot t$.

Věta : Jsou-li funkce $P(t,x)$, $Q(t,x)$ diferencovatelné na oblasti Ω, pak je rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}.$ Je-li $F(t,x)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar $F(t,x) = C.$

Exaktní diferenciální rovnice

Již dříve jsme se setkali s pojmem diferenciál prvního řádu pro funkci dvou proměnných, zapišme jej pro funkci $F(t,x)$: $dF = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dx.$
Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze z tohoto vyjádření přejít zpět k funkci $F(t,x)$.

Definice : Diferenciální rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(t,x)$ označované jako kmenová funkce.

Příklad : Diferenciální rovnice $x + t\dot{x} = 0$ neboli $xdt + tdx = 0$ je exaktní, protože vyhovuje definiční podmínce pro $F(t,x) = x \cdot t$.

Věta : Jsou-li funkce $P(t,x)$, $Q(t,x)$ diferencovatelné na oblasti Ω, pak je rovnice $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$. Je-li $F(t,x)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar $F(t,x) = C.$

Poznámka : Tvrzení vyplývá z Schwarzovy věty o zaměnitelnosti smíšených derivací.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací: $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta”, která může ovšem záviset na druhé proměnné.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací: $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta", která může ovšem záviset na druhé proměnné. Tuto veličinu určíme z podmínky $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy

$$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$$

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací:
$F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta", která může ovšem záviset na druhé proměnné.Tuto veličinu určíme z podmínky $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy
$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$

Poznámka : Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací $F(t,x) = \int Q(t,x)dx + L(x) = V(t,x) + L(x)$ a pokračovat určením funkce $L(x)$.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací:
$F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta”, která může ovšem záviset na druhé proměnné. Tuto veličinu určíme z podmínky
$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy

$$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$$

Poznámka : Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací $F(t,x) = \int Q(t,x)dx + L(x) = V(t,x) + L(x)$ a pokračovat určením funkce $L(x)$.

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $tdt + xdx = 0$. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a aplikujte na ni popsaný postup řešení.

Postup řešení exaktní diferenciální rovnice

Z předchozí věty je zřejmé, že k vyřešení exaktní rovnice potřebujeme nalézt kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li přitom z rovnosti $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$, můžeme kmenovou funkci určit integrací: $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = U(t,x) + K(x)$. Ve výsledku je $U(t,x)$ primitivní funkce a $K(x)$ integrační „konstanta", která může ovšem záviset na druhé proměnné.Tuto veličinu určíme z podmínky $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{dK(x)}{dx} = Q(t,x)$, tedy $K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx$

Poznámka : Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací $F(t,x) = \int Q(t,x)dx + L(x) = V(t,x) + L(x)$ a pokračovat určením funkce $L(x)$.

Příklad : Je dána diferenciální rovnice $tdt + xdx = 0$. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a aplikujte na ni popsaný postup řešení.

Řešení: Zkontrolujeme podmínku $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$ (ověření exaktnosti je nutné u každé rovnice, o které domníváme, že je exaktní). Podmínka je splněna, v rovnici $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial t}$ jsou pravá i levá strana nulové.

Exaktní diferenciální rovnice - příklad

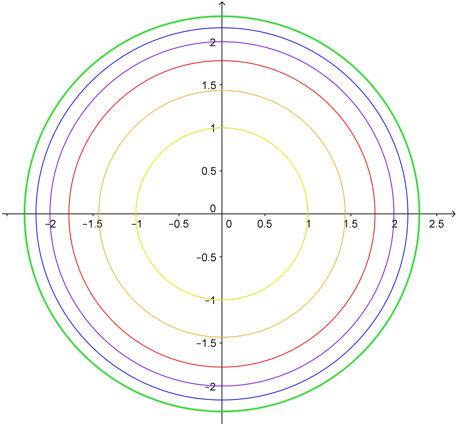
Po ověření exaktnosti rovnice $tdt + xdx = 0$ pokračujeme v řešení dle návodu. Spočteme $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = \int tdt + K(x) = \frac{t^2}{2} + K(x)$.

Exaktní diferenciální rovnice - příklad

Po ověření exaktnosti rovnice $tdt + xdx = 0$ pokračujeme v řešení dle návodu.
Spočteme $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = \int tdt + K(x) = \frac{t^2}{2} + K(x)$.
Dále určíme $K(x)$ z podmínky
$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx = \int (x - \frac{\partial t^2/2}{\partial x})dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

Exaktní diferenciální rovnice - příklad

Po ověření exaktnosti rovnice $tdt + xdx = 0$ pokračujeme v řešení dle návodu.
Spočteme $F(t,x) = \int P(t,x)dt + K(x) = \int tdt + K(x) = \frac{t^2}{2} + K(x)$.
Dále určíme $K(x)$ z podmínky
$K(x) = \int (Q(t,x) - \frac{\partial U(t,x)}{\partial x})dx = \int (x - \frac{\partial t^2/2}{\partial x})dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.
Celkem tedy máme $F(t,x) = \frac{t^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$. Vybrané integrální křivky můžeme znázornit:



Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Příklad : Rovnice

- $\dot{x} = (x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$,
- $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$

jsou autonomní.

Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Příklad : Rovnice

- $\dot{x} = (x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$,
- $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$

jsou autonomní.

Poznámka : Jednou z nejdůležitějších vlastností rovnice je to, zda má nějaký rovnovážný stav. V řadě ekonomických aplikací je dobré také vědět, zda je tato rovnováha stabilní, což často můžeme rozhodnout i bez znalosti explicitního řešení.

Autonomní diferenciální rovnice

Mnoho ekonomických procesů může být popsáno diferenciální rovnicí tvaru $\dot{x} = F(x)$. Jde tedy o speciální případ diferenciální rovnice 1. řádu, kde pravá strana nezávisí na t. Takové rovnice nazýváme autonomní.

Příklad : Rovnice

- $\dot{x} = (x+1)(x+2)(x-3)(x-6)$,
- $\dot{x} = x^2 - 5x + 6$

jsou autonomní.

Poznámka : Jednou z nejdůležitějších vlastností rovnice je to, zda má nějaký rovnovážný stav. V řadě ekonomických aplikací je dobré také vědět, zda je tato rovnováha stabilní, což často můžeme rozhodnout i bez znalosti explicitního řešení.

Definice : Obecně řekneme, že bod a reprezentuje rovnovážný stav autonomní rovnice, je-li $F(a) = 0$. V tomto případě je pak konstantní funkce $x(t) = a$ řešením rovnice. Je-li $x(t_0) = a$ pro nějaké $t_0 \Rightarrow x(t) = a$ pro všechna t.

Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.

Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.
Co o těchto bodech můžeme říct? Leží-li nad vodorovnou osou, pak je $F(x(t)) > 0$, tedy $\dot{x}(t) > 0$, což znamená, že x je rostoucí funkcí t (to odpovídá pohybu po křivce zleva doprava).

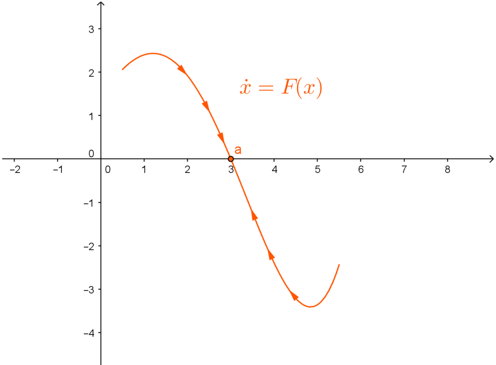
Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.
Co o těchto bodech můžeme říct? Leží-li nad vodorovnou osou, pak je $F(x(t)) > 0$, tedy $\dot{x}(t) > 0$, což znamená, že x je rostoucí funkcí t (to odpovídá pohybu po křivce zleva doprava). Naopak body pod vodorovnou osou odpovídají záporné derivaci $\dot{x}(t) < 0$, takže se s rostoucím t pohybují zprava doleva. Na obrázku situaci demonstrují šipky na křivce.

Autonomní diferenciální rovnice

K vyšetření vlastností řešení autonomní rovnice je vhodné znázornit si graf funkce $y = F(x)$ v rovině xy. Body na znázorněné křivce pak odpovídají dvojicím $(x(t), \dot{x}(t))$ pro nějaké $t \in R$.

Co o těchto bodech můžeme říct? Leží-li nad vodorovnou osou, pak je $F(x(t)) > 0$, tedy $\dot{x}(t) > 0$, což znamená, že x je rostoucí funkcí t (to odpovídá pohybu po křivce zleva doprava). Naopak body pod vodorovnou osou odpovídají záporné derivaci $\dot{x}(t) < 0$, takže se s rostoucím t pohybují zprava doleva. Na obrázku situaci demonstrují šipky na křivce.

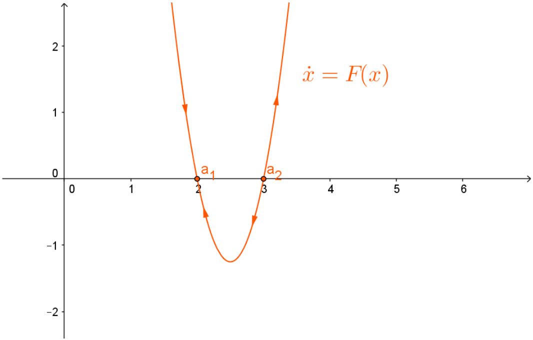


Autonomní diferenciální rovnice

Bod a z předchozího příkladu byl rovnovážným bodem, který je globálně asymptoticky stabilní, protože je-li $x(t)$ řešením úlohy $\dot{x} = F(x)$ splňujícím $x(t_0) = x_0$, pak $x(t)$ bude konvergovat k a pro libovolné (t_0, x_0).

Autonomní diferenciální rovnice

Bod a z předchozího příkladu byl rovnovážným bodem, který je globálně asymptoticky stabilní, protože je-li $x(t)$ řešením úlohy $\dot{x} = F(x)$ splňujícím $x(t_0) = x_0$, pak $x(t)$ bude konvergovat k a pro libovolné (t_0, x_0).
Oproti tomu na následujícím obrázku vidíme dva rovnovážné stavy $a_1, \ a_2$. Mezi těmito body je podstatný rozdíl. Nastartujeme-li řešení v bodě blízkém a_1, pak $x(t)$ se bude s rostoucím t blížit k bodu a_1, ale při nastartování v okolí a_2 se řešení od tohoto bodu bude vzdalovat. Řekneme, že a_1 je lokálně asypmtoticky stabilní, kdežto a_2 je nestabilní.



Autonomní diferenciální rovnice

Věta : Uvažujme autonomní rovnici $\dot{x} = F(x)$ a bod a. Je-li

- $F(a) = 0$ a $F'(a) < 0$ $\Rightarrow$ a je lokálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice
- $F(a) = 0$ a $F'(a) > 0$ $\Rightarrow$ a je nestabilní rovnovážný bod rovnice

Autonomní diferenciální rovnice

Věta : Uvažujme autonomní rovnici $\dot{x} = F(x)$ a bod a. Je-li

- $F(a) = 0$ a $F'(a) < 0$ $\Rightarrow$ a je lokálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod rovnice
- $F(a) = 0$ a $F'(a) > 0$ $\Rightarrow$ a je nestabilní rovnovážný bod rovnice

Poznámka : Všimněme si, že věta nic neříká o případu $F(a) = 0$ a $F'(a) = 0$. Pak o typu bodu nelze tímto způsobem rozhodnout.

Příklad : Rovnice $\dot{x} + ax = b$, $(a \neq 0)$ je speciálním případem autonomní rovnice pro $F(x) = b - ax$. Má jediný rovnovážný bod, a to $x = \frac{b}{a}$, přičemž $F'(x) = -a$. Tedy podle uvedené věty je rovnovážný bod lokálně asymptoticky stabilní pro $a > 0$ a nestabilní pro $a < 0$.

Mechanizmus přizpůsobení ceny I

Příklad : Označme $D(P) = a - bP$ a $S(P) = \alpha + \beta P$ poptávku a nabídku po určitém produktu při ceně P (a, b, α, β jsou kladné konstanty). Uvažujme P jako funkci času, přičemž její derivace je přímo úměrná převisu poptávky, tj. $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$ pro kladnou konstantu λ.

Mechanizmus přizpůsobení ceny I

Příklad : Označme $D(P) = a - bP$ a $S(P) = \alpha + \beta P$ poptávku a nabídku po určitém produktu při ceně P ($a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ jsou kladné konstanty). Uvažujme P jako funkci času, přičemž její derivace je přímo úměrná převisu poptávky, tj. $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$ pro kladnou konstantu λ.

Dosazením předpisů pro $D(P)$ a $S(P)$ dostaneme diferenciální rovnici $\dot{P} = \lambda[a - bP - \alpha - \beta P]$.

Řešením této autonomní rovnice je jak víme

$P = Ce^{-\lambda(b+\beta)} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Mechanizmus přizpůsobení ceny I

Příklad : Označme $D(P) = a - bP$ a $S(P) = \alpha + \beta P$ poptávku a nabídku po určitém produktu při ceně P (a, b, α, β jsou kladné konstanty). Uvažujme P jako funkci času, přičemž její derivace je přímo úměrná převisu poptávky, tj. $\dot{P} = \lambda[D(P) - S(P)]$ pro kladnou konstantu λ.

Dosazením předpisů pro $D(P)$ a $S(P)$ dostaneme diferenciální rovnici $\dot{P} = \lambda[a - bP - \alpha - \beta P]$.

Řešením této autonomní rovnice je jak víme

$P = Ce^{-\lambda(b+\beta)} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Protože dle předpokladů je výraz $\lambda(b + \beta)$ kladný, je rovnice stabilní a řešení konverguje s rostoucím časem k rovnovážné ceně $P^e = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$, pro kterou $S(P^e) = D(P^e)$.

Mechanizmus přizpůsobení ceny II

Příklad : Uvažujme zobecnění problému. Stejně jako v předchozím příkladu předpokládejme, že cena se mění podle převisu poptávky, ale ne nutně lineárně, tj. $\dot{P} = F(P) = H(D(P) - S(P))$, kde H je rostoucí funkce splňující podmínku $H(0) = 0$, (tj. $H' > 0$).

Mechanizmus přizpůsobení ceny II

Příklad : Uvažujme zobecnění problému. Stejně jako v předchozím příkladu předpokládejme, že cena se mění podle převisu poptávky, ale ne nutně lineárně, tj. $\dot{P} = F(P) = H(D(P) - S(P))$, kde H je rostoucí funkce splňující podmínku $H(0) = 0$, (tj. $H' > 0$).
Při převisu poptávky je $D(P) - S(P) > 0$, takže $\dot{P} > 0$ a cena tedy stoupá. Naopak cena klesá při $D(P) - S(P) < 0$. Označme P^e rovnovážnou cenu, při které $\dot{P} = F(P^e) = 0.$ Podle tvrzení o rovnováze autonomní rovnice je tato rovnováha stabilní při $F'(P^e) < 0$. Tato podmínka je většinou splněna, neboť $F'(P^e) = H'(D(P^e) - S(P^e)) \cdot (D'(P^e) - S'(P^e))$, kde první součinitel je dle předpokladu o monotónnosti H kladný a druhý výraz naopak záporný (u běžných produktů je $D' < 0$ a $S' > 0$, takže $D' - S' < 0$).

Systémy diferenciálních rovnic

Doposud jsme v diferenciálních rovnicích uvažovali jen jednu neznámou funkci. Řada dynamických ekonomických modelů zejména z oblasti makroekonomie však zahrnuje více neznámých funkcí, které společně splňují několik rovnic. Uvažujme případ dvou stavových veličin $x(t), y(t)$, které charakterizují ekonomický systém v čase t.

Definice : Soustavou diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, x, y).$$

(předpokládejme dále, že všechny funkce $f,\ g,\ f'_x,\ f'_y,\ g'_x,\ g'_y$ jsou spojité)

Systémy diferenciálních rovnic

Doposud jsme v diferenciálních rovnicích uvažovali jen jednu neznámou funkci. Řada dynamických ekonomických modelů zejména z oblasti makroekonomie však zahrnuje více neznámých funkcí, které společně splňují několik rovnic. Uvažujme případ dvou stavových veličin $x(t), y(t)$, které charakterizují ekonomický systém v čase t.

Definice : Soustavou diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, x, y).$$

(předpokládejme dále, že všechny funkce $f,\ g,\ f'_x,\ f'_y,\ g'_x,\ g'_y$ jsou spojité)

Řešením systému diferenciálních rovnic rozumíme dvojici funkcí (x(t), y(t)), které jsou definovány na nějakém intervalu I a vyhovují oběma rovnicím. Často je stav systému znám v nějakém okamžiku $t_0 \in I$ a budoucí vývoj systému může být pak jednoznačně charakterizován soustavou rovnic a počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0.$ Obecné řešení zpravidla závisí na dvou volitelných konstantách A, B, takže řešení lze zapsat jako $x = \varphi_1(t, A, B),\ y = \varphi_2(t, A, B)$; díky počáteční podmínce umíme tyto konstanty jednoznačně určit.

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Při řešení postupujeme podle následujících kroků:

1. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $\dot{y} = g(t, y)$, získáme tak $y(t)$
2. Dosadíme toto řešení do rovnice $\dot{x} = f(t, x, y)$, získáme tak novou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, z níž určíme $x(t)$.

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Při řešení postupujeme podle následujících kroků:

1. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $\dot{y} = g(t, y)$, získáme tak $y(t)$
2. Dosadíme toto řešení do rovnice $\dot{x} = f(t, x, y)$, získáme tak novou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, z níž určíme $x(t)$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy $\dot{x} = txy$, $\dot{y} = 2ty$

Rekurzivní systémy diferenciálních rovnic

Obvykle změna veličin x, y nezávisí jen na čase a veličině samotné, ale také na druhé veličině (tedy je mezi nimi interakce). Chování systémů tohoto typu pak může být velmi komplikované, není popsán žádný univerzální postup jejich řešení. V určitých případech však postup řešení umíme popsat, například pro tzv. rekurzivní systémy charakterizované soustavou

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, y).$$

Při řešení postupujeme podle následujících kroků:

1. Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu $\dot{y} = g(t, y)$, získáme tak $y(t)$
2. Dosadíme toto řešení do rovnice $\dot{x} = f(t, x, y)$, získáme tak novou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, z níž určíme $x(t)$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy $\dot{x} = txy$, $\dot{y} = 2ty$

Řešení: Nejprve separací proměnných určíme z druhé rovnice $y = Be^{t^2}$. Potom dosadíme do první rovnice, kde dostaneme $\dot{x} = Bxte^{t^2}$. Opět separací proměnných $\int \frac{dx}{x} = \int Bte^{t^2} dt$, tedy $x = Ae^{\frac{Be^{t^2}}{2}}$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y).$$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$\dot{x} = f(x, y),$

$\dot{y} = g(x, y).$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy
$\dot{x} = y, \dot{y} = y^2/x, \ x > 0, \ y > 0$
a nalezněte partikulární řešení s počáteční podmínkou $x(1) = 1, \ y(1) = 2.$

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y).$$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy
$\dot{x} = y, \dot{y} = y^2/x, \; x > 0, \; y > 0$
a nalezněte partikulární řešení s počáteční podmínkou $x(1) = 1, \; y(1) = 2$.

Řešení: Vyjádříme $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x}$, jejímž obecným řešením je $y = Ax$. Potom $\dot{x} = y = Ax$, což dá obecné řešení $x = Be^{At}$. Dosazením získáme $y = ABe^{At}$.

Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Další speciální případ tvoří autonomní systémy, kde funkce f a g nezávisí na čase t:

$\dot{x} = f(x, y),$

$\dot{y} = g(x, y).$

Při řešení úlohy v okolí bodu, kde $\dot{x} \neq 0$ můžeme systém převést na úlohu $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Tuto úlohu vyřešíme nejdřív, abychom získali $y = \varphi(x)$, pak toto vyjádření dosadíme do rovnice $\dot{x} = f(x, y)$ a nalezneme $x(t)$ jako řešení $\dot{x} = f(x, \varphi(x))$. Nakonec vyjádříme $y = \varphi(x(t))$.

Příklad : Použijte popsaný postup k řešení soustavy
$\dot{x} = y,\ \dot{y} = y^2/x,\ x > 0,\ y > 0$
a nalezněte partikulární řešení s počáteční podmínkou $x(1) = 1,\ y(1) = 2$.

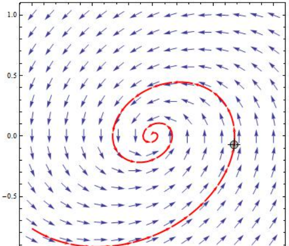
Řešení: Vyjádříme $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x}$, jejímž obecným řešením je $y = Ax$. Potom $\dot{x} = y = Ax$, což dá obecné řešení $x = Be^{At}$. Dosazením získáme $y = ABe^{At}$. Z počáteční podmínky máme $1 = Be^{A}$ a $2 = ABe^{A}$, takže vypočteme $A = 2,\ B = e^{-2}$. Tomu odpovídá řešení $x = e^{2t-2},\ y = 2e^{2t-2}$.

Grafická analýza autonomního systému diferenciálních rovnic

Řešení autonomního systému $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kde f, g jsou spojité funkce, můžeme znázornit jako křivku v rovině xy složenou z bodů $[x(t), y(t)]$ pro t z nějakého časového intervalu, $t \in I$. Říkáme, že znázorňujeme trajektorii ve fázovém prostoru. Tempo změny veličin x a y můžeme vyjádřit pomocí vektoru $(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y))$. Tento vektor je tečný k trajektorii procházející daným bodem (x, y).

Grafická analýza autonomního systému diferenciálních rovnic

Řešení autonomního systému $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, kde f, g jsou spojité funkce, můžeme znázornit jako křivku v rovině xy složenou z bodů $[x(t), y(t)]$ pro t z nějakého časového intervalu, $t \in I$. Říkáme, že znázorňujeme trajektorii ve fázovém prostoru. Tempo změny veličin x a y můžeme vyjádřit pomocí vektoru $(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y))$. Tento vektor je tečný k trajektorii procházející daným bodem (x, y).Chceme-li vyjádřit dynamiku systému, můžeme tento vektor znázornit v bodech nějaké pravidelné sítě. (obvykle se délky vektorů proporcionálně upraví, aby se neprotínaly). Tato množina vektorů tvoří vektorové pole, na jehož základě lze konstruovat jednotlivé trajektorie. Říkáme, že vytváříme fázový portrét systému.



Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

V případě $b_1, \ b_2 = 0$ budeme takový systém nazývat homogenní. Takový systém lze zapsat maticově jako $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$ a řešit pomocí vlastních čísel a vektorů matice A. Je-li λ vlastní číslo a $v = (v_1, v_2)^\top$ jemu příslušný vlastní vektor, pak $(x, y)^\top = (v_1 e^{\lambda t}, v_2 e^{\lambda t})^\top$ je řešením homogenního systému s maticí A.

Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

V případě $b_1,\ b_2 = 0$ budeme takový systém nazývat homogenní. Takový systém lze zapsat maticově jako $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$ a řešit pomocí vlastních čísel a vektorů matice A. Je-li λ vlastní číslo a $v = (v_1, v_2)^\top$ jemu příslušný vlastní vektor, pak $(x, y)^\top = (v_1 e^{\lambda t}, v_2 e^{\lambda t})^\top$ je řešením homogenního systému s maticí A.

Skutečně, můžeme udělat zkoušku a dosadit do systému $(\dot{x}, \dot{y})^\top = (\lambda v_1 e^{\lambda t}, \lambda v_2 e^{\lambda t})^\top$. Po vydělení pravé i levé strany rovnice výrazem $e^{\lambda t}$ nám zůstane jen $\lambda(v_1, v_2)^\top = A \cdot (v_1, v_2)^\top$, což evidentně platí z definice vlastních čísel a vektorů.

Lineární systémy s konstantními koeficienty

Speciálním případem autonomního systému je lineární systém s konstantními koeficienty

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

V případě $b_1,\ b_2 = 0$ budeme takový systém nazývat homogenní. Takový systém lze zapsat maticově jako $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$ a řešit pomocí vlastních čísel a vektorů matice A. Je-li λ vlastní číslo a $v = (v_1, v_2)^\top$ jemu příslušný vlastní vektor, pak $(x, y)^\top = (v_1 e^{\lambda t}, v_2 e^{\lambda t})^\top$ je řešením homogenního systému s maticí A.

Skutečně, můžeme udělat zkoušku a dosadit do systému $(\dot{x}, \dot{y})^\top = (\lambda v_1 e^{\lambda t}, \lambda v_2 e^{\lambda t})^\top$. Po vydělení pravé i levé strany rovnice výrazem $e^{\lambda t}$ nám zůstane jen $\lambda(v_1, v_2)^\top = A \cdot (v_1, v_2)^\top$, což evidentně platí z definice vlastních čísel a vektorů.

V případě, kdy má matice A dvě různá reálná vlastní čísla $\lambda_1,\ \lambda_2$ (s vlastními vektory $u,\ v$) pak výše uvedený vzorec platí pro obě dvě, obecné řešení systému má pak tvar $(x, y)^\top = Ke^{\lambda_1 t}(u_1, u_2)^\top + Le^{\lambda_2 t}(v_1, v_2)^\top$

Homogenní lineární systém - příklad

Řešte soustavu $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Homogenní lineární systém - příklad

Řešte soustavu $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$, kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Charakteristický polynom matice je
$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Odtud máme
$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ s odpovídajícími vektory $u = (-2, 1)^\top$ a $v = (1, 1)^\top$. Obecné řešení lineárního diferenciálního systému je tedy
$(x, y)^\top = Ke^{-t}(-2, 1)^\top + Le^{2t}(1, 1)^\top$.

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1,\ b_2 \neq 0$

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1, \ b_2 \neq 0$ Tato soustava může být převedena na homogenní zavedením nových proměnných. Ukažme si postup na příkladu:

Příklad : Najděte řešení systému

$\dot{x} = 2y + 6,$

$\dot{y} = x + y - 3.$

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1, \ b_2 \neq 0$ Tato soustava může být převedena na homogenní zavedením nových proměnných. Ukažme si postup na příkladu:

Příklad : Najděte řešení systému

$\dot{x} = 2y + 6,$

$\dot{y} = x + y - 3.$

Řešení: Povšimněme si, že rovnovážným bodem (kde $\dot{x} = \dot{y} = 0$) je bod $(6, -3)$. Zavedeme proměnné $z = x - 6, \ w = y + 3$, které vyjadřují odchylku jednotlivých proměnných od rovnovážných hodnot. Pak $\dot{z} = \dot{x}, \ \dot{w} = \dot{y}$.

Systém tedy můžeme přepsat jako

$\dot{z} = 2(w - 3) + 6 = 2w,$

$\dot{w} = (z + 6) + (w - 3) - 3 = z + w.$

Nehomogenní lineární systém

Uvažujme nehomogenní systém tvaru

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

kde $b_1,\ b_2 \neq 0$ Tato soustava může být převedena na homogenní zavedením nových proměnných. Ukažme si postup na příkladu:

Příklad : Najděte řešení systému

$\dot{x} = 2y + 6,$

$\dot{y} = x + y - 3.$

Řešení: Povšimněme si, že rovnovážným bodem (kde $\dot{x} = \dot{y} = 0$) je bod $(6, -3)$. Zavedeme proměnné $z = x - 6,\ w = y + 3$, které vyjadřují odchylku jednotlivých proměnných od rovnovážných hodnot. Pak $\dot{z} = \dot{x},\ \dot{w} = \dot{y}$.

Systém tedy můžeme přepsat jako

$\dot{z} = 2(w - 3) + 6 = 2w,$

$\dot{w} = (z + 6) + (w - 3) - 3 = z + w.$

Řešení tohoto homogenního systému známe z předchozího příkladu, $z = -2Ke^{-t} + Le^{2t},\ w = Ke^{-t} + Le^{2t}$. Původné neznámé dopočítáme zpětnou substitucí, $x = z + 6 = -2Ke^{-t} + Le^{2t} + 6,\ y = w - 3 = Ke^{-t} + Le^{2t} - 3.$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

neboli

$$a_{11}x + a_{12}y = -b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = -b_2.$$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

neboli

$$a_{11}x + a_{12}y = -b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = -b_2.$$

Pomocí Cramerova pravidla můžeme v případě $|A| \neq 0$ řešení tohoto systému vyjádřit přímo jako

$$x^* = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{|A|}, \quad y^* = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{|A|},$$

Rovnováha lineárního systému

Podmínku $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pro rovnovážný bod můžeme zapsat jako

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0.$$

neboli

$$a_{11}x + a_{12}y = -b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = -b_2.$$

Pomocí Cramerova pravidla můžeme v případě $|A| \neq 0$ řešení tohoto systému vyjádřit přímo jako

$$x^* = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{|A|}, \quad y^* = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{|A|},$$

Potom konstantní funkce $x(t) = x^*, y(t) = y^*$ tvoří řešení systému (na levé straně dostaneme derivace konstantní funkce, tj. $\dot{x} = \dot{y} = 0$ a pravé strany jsou evidentně nulové). Dostane-li se tedy systém do stavu (x^*, y^*) v nějakém čase t_0, už zde zůstane pro všechna $t > t_0$.

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$

$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$$

Poznámka : Výrazu $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$ se říká stopa matice A.

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic

$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$

$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$

má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$

Poznámka : Výrazu $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$ se říká stopa matice A.

Poznámka : V případě, že má matice A reálná vlastní čísla $\lambda_1, \ \lambda_2$, je podmínka věty splněna, jsou-li obě vlastní čísla záporná, $\lambda_1, \ \lambda_2 < 0.$

Rovnováha lineárního systému

Rovnovážný bod (x^*, y^*) nazveme globálně asymptoticky stabilní, jestliže každé řešení konverguje k rovnovážnému bodu pro $t \to \infty$.

Věta : Systém lineárních rovnic
$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1,$
$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$
má globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod $(x^*, y^*) \Leftrightarrow$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \wedge a_{11} + a_{22} < 0$$

Poznámka : Výrazu $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$ se říká stopa matice A.

Poznámka : V případě, že má matice A reálná vlastní čísla λ_1, λ_2, je podmínka věty splněna, jsou-li obě vlastní čísla záporná, $\lambda_1, \lambda_2 < 0.$

Příklad : Již dříve jsme zjistili, že systém z předchozího příkladu $\dot{x} = 2y + 6$, $\dot{y} = x + y - 3$ má rovnovážný bod $(6, -3)$. Tento bod však není globálně asymptoticky stabilní, protože $\lambda_2 = 2 > 0$. Řešení $x = z + 6 = -2Ke^{-t} + Le^{2t} + 6, \; y = w - 3 = Ke^{-t} + Le^{2t} - 3$ nekonverguje k rovnovážnému bodu.

Závěrečné poznámky k diferenciálním rovnicím

Poznámka : Pokud v rovnicích vystupují i vyšší derivace, např. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, hovoříme o diferenciálních rovnicích vyššího řádu. Jejich problematika (stejně jako další typy a metody řešení diferenciálních rovnic) překračuje rámec kurzu. Vždy je dobré umět alespoň rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Závěrečné poznámky k diferenciálním rovnicím

Poznámka : Pokud v rovnicích vystupují i vyšší derivace, např. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, hovoříme o diferenciálních rovnicích vyššího řádu. Jejich problematika (stejně jako další typy a metody řešení diferenciálních rovnic) překračuje rámec kurzu. Vždy je dobré umět alespoň rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Věta : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = F(t, x)$. Je-li její pravá strana $F(t, x)$ i její derivace $F'_x(t, x)$ spojitá v nějaké otevřené množině A, pak pro libovolný bod $(t_0, x_0) \in A$ existuje právě jedno "lokální"řešení rovnice, které prochází bodem (t_0, x_0).

Závěrečné poznámky k diferenciálním rovnicím

Poznámka : Pokud v rovnicích vystupují i vyšší derivace, např. $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$, hovoříme o diferenciálních rovnicích vyššího řádu. Jejich problematika (stejně jako další typy a metody řešení diferenciálních rovnic) překračuje rámec kurzu. Vždy je dobré umět alespoň rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Věta : Je dána diferenciální rovnice $\dot{x} = F(t, x)$. Je-li její pravá strana $F(t, x)$ i její derivace $F'_x(t, x)$ spojitá v nějaké otevřené množině A, pak pro libovolný bod $(t_0, x_0) \in A$ existuje právě jedno "lokální"řešení rovnice, které prochází bodem (t_0, x_0).

Poznámka : Funkce $x(t)$ je lokálním řešením ve smyslu předchozí věty, existuje-li nějaký interval (a, b) okolo bodu t_0, takový že pro $t \in (a, b)$ je $(t, x(t)) \in A$ a navíc je na tomto intervalu splněna diferenciální rovnice i s počáteční podmínkou.