Diferenční rovnice - úvod

Řada veličin, které ekonomové zkoumají (například příjmy, spotřeba, úspory, atd.), jsou zaznamenávany v daných časových intervalech (např. denní, týdenní, čtvrtletní či roční záznamy). Rovnice, které vyjadřují vztah mezi hodnotami veličiny v různých časových okamžicích, se nazývají diferenční rovnice. Jsou obdobou diferenciálních rovnic, rozdíl je v chápání času jako diskrétní (ne spojité) veličiny.

Diferenční rovnice - úvod

Řada veličin, které ekonomové zkoumají (například příjmy, spotřeba, úspory, atd.), jsou zaznamenávany v daných časových intervalech (např. denní, týdenní, čtvrtletní či roční záznamy). Rovnice, které vyjadřují vztah mezi hodnotami veličiny v různých časových okamžicích, se nazývají diferenční rovnice. Jsou obdobou diferenciálních rovnic, rozdíl je v chápání času jako diskrétní (ne spojité) veličiny.

Definice : Označme $t = 0, 1, 2, \ldots$ diskrétní časové okamžiky. ($t = 0$ se obvykle nazývá počáteční okamžik. Diferenční rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

Diferenční rovnice - úvod

Řada veličin, které ekonomové zkoumají (například příjmy, spotřeba, úspory, atd.), jsou zaznamenávany v daných časových intervalech (např. denní, týdenní, čtvrtletní či roční záznamy). Rovnice, které vyjadřují vztah mezi hodnotami veličiny v různých časových okamžicích, se nazývají diferenční rovnice. Jsou obdobou diferenciálních rovnic, rozdíl je v chápání času jako diskrétní (ne spojité) veličiny.

Definice : Označme $t = 0, 1, 2, \dots$ diskrétní časové okamžiky. ($t = 0$ se obvykle nazývá počáteční okamžik. Diferenční rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \ t = 0, 1, 2, \dots$$

Vhodnějším označením by mělo být spíše rekurentní rovnice, protože pojmenování diferenční rovnice je odvozeno od pojmu diference $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$. Nicméně snadnou úpravou lze výše uvedený tvar rovnice převést na $\Delta x_t = f(t, x_t) - x_t, \ t = 0, 1, 2, \dots$.

Řešení diferenční rovnice

Jestliže je dána počáteční hodnota x_0, můžeme řešení diferenční rovnice získat postupným dosazováním:

$$x_1 = f(0, x_0),$$
$$x_2 = f(1, f(0, x_0))$$
$$x_3 = f(2, f(1, f(0, x_0))), \text{ atd.}$$

Takto se můžeme postupně dostat k libovolnému t.

Řešení diferenční rovnice

Jestliže je dána počáteční hodnota x_0, můžeme řešení diferenční rovnice získat postupným dosazováním:

$$x_1 = f(0, x_0),$$
$$x_2 = f(1, f(0, x_0))$$
$$x_3 = f(2, f(1, f(0, x_0))), \text{ atd.}$$

Takto se můžeme postupně dostat k libovolnému t.Řešení získané postupným dosazováním obvykle nepopisuje dostatečně chování rovnice (ekonomy zajímá též kvalitativní analýza, např. jak se veličina chová pro velká t, závislost řešení na parametrech, apod.) Navíc jde o výpočetně náročný postup.

Řešení diferenční rovnice

Jestliže je dána počáteční hodnota x_0, můžeme řešení diferenční rovnice získat postupným dosazováním:

$x_1 = f(0, x_0)$,
$x_2 = f(1, f(0, x_0))$
$x_3 = f(2, f(1, f(0, x_0)))$, atd.

Takto se můžeme postupně dostat k libovolnému t.Řešení získané postupným dosazováním obvykle nepopisuje dostatečně chování rovnice (ekonomy zajímá též kvalitativní analýza, např. jak se veličina chová pro velká t, závislost řešení na parametrech, apod.) Navíc jde o výpočetně náročný postup.

Někdy je možné odvodit pro x_t jednoduchý předpis. Obecným řešením rovnice nazveme funkci tvaru $x_t = g(t, A)$, pokud je rovnice splněna pro jakoukoliv hodnotu konstanty A. Obvykle pro každou počáteční hodnotu x_0 existuje právě jedno A, pro něž $g(0, A) = x_0$.

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.
Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0, \ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0 \ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.
Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0, \ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0 \ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0, \ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Uvažujme zobecnění předchozího příkladu v podobě nehomogenní rovnice
$x_{t+1} = a \cdot x_t + b, \ t = 0, 1, 2, \ldots$.
Přímou substitucí opět dostaneme
$x_t = a^t \cdot x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b, \ t = 0, 1, 2, \ldots$

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.

Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0,\ x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0\ x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Uvažujme zobecnění předchozího příkladu v podobě nehomogenní rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b,\ t = 0, 1, 2, \ldots$.

Přímou substitucí opět dostaneme

$x_t = a^t \cdot x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b,\ t = 0, 1, 2, \ldots$

Podle vzorce pro součet geometrické řady je

$(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1) = \frac{(1-a^t)}{(1-a)}, a \neq 1$. Tedy dostaneme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_t = a^t \cdot \left(x_0 - \frac{b}{(1-a)}\right) + \frac{b}{(1-a)},\ t = 0, 1, 2, \ldots,\ a \neq 1$$

Diferenční rovnice - příklad

Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t, \; t = 0, 1, 2, \ldots$. Pozn: Takováto rovnice se nazývá homogenní, protože je-li x_t^* řešením, pak je řešením i Ax_t^* pro libovolnou konstantu A.

Řešení: Je-li dáno x_0, můžeme postupně dosazovat a získáme tak $x_1 = a \cdot x_0, \; x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0 \; x_3 = a^3 \cdot x_0$, atd. Obecně tedy $x_{t+1} = a^t \cdot x_0, \; t = 0, 1, 2, \ldots$. Přímým dosazením lze ověřit, že jde o řešení rovnice, a toto řešení je jediné pro danou hodnotu x_0.

Uvažujme zobecnění předchozího příkladu v podobě nehomogenní rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b, \; t = 0, 1, 2, \ldots$.

Přímou substitucí opět dostaneme

$x_t = a^t \cdot x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1)b, \; t = 0, 1, 2, \ldots$

Podle vzorce pro součet geometrické řady je

$(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1) = \frac{(1-a^t)}{(1-a)}, a \neq 1$. Tedy dostaneme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_t = a^t \cdot \left(x_0 - \frac{b}{(1-a)}\right) + \frac{b}{(1-a)}, \; t = 0, 1, 2, \ldots, \; a \neq 1$$

Poznámka : Pro $a = 1$ je $a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a^2 + a + 1 = t$, tedy dostaneme řešení $x_t = x_0 + t \cdot b$.

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $x^* = \frac{b}{(1-a)}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $\boxed{x^* = \frac{b}{(1-a)}}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Věta : Pro a splňující $|a| < 1$ platí $a^t \to 0$, tedy $\boxed{x_t \to x^* = \frac{b}{(1-a)}}$ pro $t \to \infty$. Rovnice je globálně asymptoticky stabilní.

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $\boxed{x^* = \frac{b}{(1-a)}}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

Věta : Pro a splňující $|a| < 1$ platí $a^t \to 0$, tedy $\boxed{x_t \to x^* = \frac{b}{(1-a)}}$ pro $t \to \infty$. Rovnice je globálně asymptoticky stabilní.

Příklad : Vyjádřete řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = \frac{x_t}{2} + 3$, určete její rovnovážný bod a rozhodněte, zda je stabilní

Rovnováha a stabilita diferenční rovnice

Bude-li počáteční podmínka předchozí rovnice $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$, dostaneme $x_0 = \frac{b}{(1-a)}, \forall t$. Dokonce nemusí jít jen o počáteční stav, ale platí obecně, že pokud x_s bude rovno této hodnotě v libovolném okamžiku s, pak už veličina x_t zůstane na této konstantní úrovni pro všechna $t \geq s$. Konstantu $x^* = \frac{b}{(1-a)}$ nazýváme rovnovážným stavem rovnice $x_{t+1} = a \cdot x_t + b$. (vzorec pro rovnovážný bod lze odvodit též z rovnice $x^* = ax^* + b$).

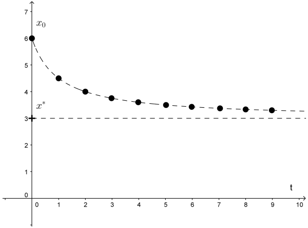
Věta : Pro a splňující $|a| < 1$ platí $a^t \to 0$, tedy $x_t \to x^* = \frac{b}{(1-a)}$ pro $t \to \infty$. Rovnice je globálně asymptoticky stabilní.

Příklad : Vyjádřete řešení diferenční rovnice $x_{t+1} = \frac{x_t}{2} + 3$, určete její rovnovážný bod a rozhodněte, zda je stabilní

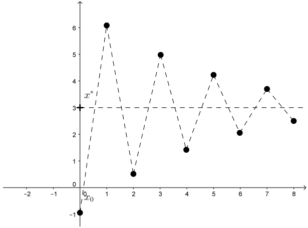
Řešení: Podle formule použité pro hodnoty koeficientů $a = \frac{1}{2},\ b = 3$ dostaneme $x^* = \frac{3}{(1-1/2)} = 6$. Řešením rovnice je $x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t (x - 6) + 6$. Rovnováha je stabilní, protože $|a| = |\frac{1}{2}| < 1$.

Na následujícím obrázku jsou znázorněny dva případy stability, a to monotónní konvergence k ekvilibriu (a) a tlumené oscilace (b) a dva případy nestability (c,d)

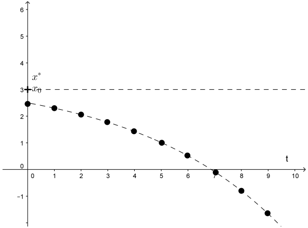
a) $x_0 > x^* = \frac{b}{1-a},\ 0 < a < 1$



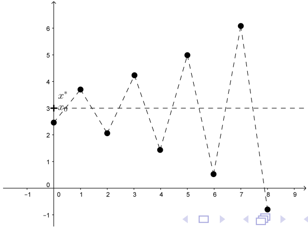
b) $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a},\ -1 < a < 0$



c) $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a},\ 1 < a$



d) $x_0 < x^* = \frac{b}{1-a},\ a < -1$



Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy $D_t = a - bp_t,\ S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy $D_t = a - bp_t,\ S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Vyjádřeme podmínku pro ekvilibrium: $S_t = D_t$, tj. $a - bp_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$

Osamostatníme p_t: $p_t = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{\beta}{b} p_{t-1}$

Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy $D_t = a - bp_t,\ S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.
Vyjádřeme podmínku pro ekvilibrium: $S_t = D_t$, tj. $a - bp_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$
Osamostatníme p_t: $p_t = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{\beta}{b} p_{t-1}$
Zjednodušíme pomocí nových parametrů: $p_t = A - Bp_{t-1}$
Řešení dostaneme ve tvaru $p_t = C(-B)^t + \frac{A}{1+B}$

Aplikace lineární diferenční rovnice

Pomocí diferenční rovnice lze vysvětlit i tzv. pavučinový model popisující dynamiku na trhu. Označme p_t cenu produktu a S_t a D_t nabídku a poptávku po produktu v období t. Model předpokládá lineární tvar poptávkové a nabídkové funkce, přičemž na straně nabídky existuje zpoždění, tedy

$D_t = a - bp_t, \; S_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$ pro dané koeficienty $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Vyjádřeme podmínku pro ekvilibrium: $S_t = D_t$, tj. $a - bp_t = -\alpha + \beta p_{t-1}$

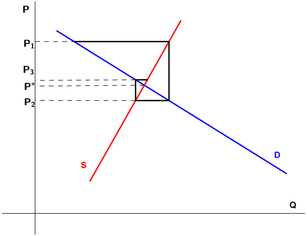
Osamostatníme p_t: $p_t = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{\beta}{b} p_{t-1}$

Zjednodušíme pomocí nových parametrů: $p_t = A - Bp_{t-1}$

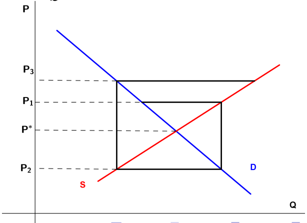
Řešení dostaneme ve tvaru $p_t = C(-B)^t + \frac{A}{1+B}$

Pro $0 < B = \frac{\beta}{b} < 1$ pak p_t konverguje k rovnovážné ceně $P^* = \frac{A}{1+B} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$.

a) $\frac{\beta}{b} < 1 \Rightarrow$ cena konverguje k ekvilibriu P^*



b) $\frac{\beta}{b} > 1 \Rightarrow$ divergence



Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici druhého řádu můžeme zapsat jako $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$. Pro pevné hodnoty x_0 a x_1 lze spočítat $x_2 = f(0, x_0, x_1)$, $x_3 = f(1, x_1, x_2)$, atd. Takto můžeme jednoznačně určit hodnotu x_t pro každé t. Vidíme, že úloha má obecně nekonečně moho řešení, pokud nezadáme konkrétní hodnoty pro první dvě období. Obecným řešením rozumíme funkci tvaru $x_t = g(t, A, B)$, přičemž volbou vhodných hodnot A a B dostaneme libovolné řešení.

Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici druhého řádu můžeme zapsat jako $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$. Pro pevné hodnoty x_0 a x_1 lze spočítat $x_2 = f(0, x_0, x_1)$, $x_3 = f(1, x_1, x_2)$, atd. Takto můžeme jednoznačně určit hodnotu x_t pro každé t. Vidíme, že úloha má obecně nekonečně moho řešení, pokud nezadáme konkrétní hodnoty pro první dvě období. Obecným řešením rozumíme funkci tvaru $x_t = g(t, A, B)$, přičemž volbou vhodných hodnot A a B dostaneme libovolné řešení.

Definice : Je-li funkce f lineární, tj. lze-li rovnice zapsat ve tvaru $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t$, (kde $b_t \neq 0$), hovoříme o lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Nahradíme-li pravou stranu nulou, dostaneme přidruženou homogenní rovnici $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0$.

Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici druhého řádu můžeme zapsat jako $x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1})$. Pro pevné hodnoty x_0 a x_1 lze spočítat $x_2 = f(0, x_0, x_1)$, $x_3 = f(1, x_1, x_2)$, atd. Takto můžeme jednoznačně určit hodnotu x_t pro každé t. Vidíme, že úloha má obecně nekonečně moho řešení, pokud nezadáme konkrétní hodnoty pro první dvě období. Obecným řešením rozumíme funkci tvaru $x_t = g(t, A, B)$, přičemž volbou vhodných hodnot A a B dostaneme libovolné řešení.

Definice : Je-li funkce f lineární, tj. lze-li rovnice zapsat ve tvaru $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t$, (kde $b_t \neq 0$), hovoříme o lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Nahradíme-li pravou stranu nulou, dostaneme přidruženou homogenní rovnici $x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0$.

Věta : Obecným řešením homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu je $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$, kde $u_t^{(1)}$, $u_t^{(2)}$ jsou dvě nezávislá řešení a A, B libovolné konstanty. Obecným řešením nehomogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu je $x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenční rovnici $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,$ kde koeficienty a, b nezávisí na čase a $b \neq 0$. Na základě předchozí zkušenosti můžeme odhadnout, že řešení můžeme očekávat ve tvaru $x_t = m^t$, kdy $x_{t+1} = m^{t+1}$, $x_{t+2} = m^{t+2}$, takže rovnice je splněna pokud $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Pro $m \neq 0$ můžeme pravou i levou stranu vydělit výrazem m^t.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenční rovnici $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,$ kde koeficienty a, b nezávisí na čase a $b \neq 0$. Na základě předchozí zkušenosti můžeme odhadnout, že řešení můžeme očekávat ve tvaru $x_t = m^t$, kdy $x_{t+1} = m^{t+1}$, $x_{t+2} = m^{t+2}$, takže rovnice je splněna pokud $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Pro $m \neq 0$ můžeme pravou i levou stranu vydělit výrazem m^t.

Dostaneme tzv. charakteristickou rovnici $(m^2 + am + b) = 0$ (levá strana se nazývá charakteristickým polynomem rovnice). Kořeny můžeme vyjádřit jako $m_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenční rovnici $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,$ kde koeficienty a, b nezávisí na čase a $b \neq 0$. Na základě předchozí zkušenosti můžeme odhadnout, že řešení můžeme očekávat ve tvaru $x_t = m^t$, kdy $x_{t+1} = m^{t+1}$, $x_{t+2} = m^{t+2}$, takže rovnice je splněna pokud $m^t(m^2 + am + b) = 0$. Pro $m \neq 0$ můžeme pravou i levou stranu vydělit výrazem m^t.

Dostaneme tzv. charakteristickou rovnici $(m^2 + am + b) = 0$ (levá strana se nazývá charakteristickým polynomem rovnice). Kořeny můžeme vyjádřit jako $m_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$.Shrňme výsledky do přehledné věty:

Věta : Obecné řešení diferenční rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0$, $(b \neq 0)$ můžeme vyjádřit v závislosti na řešení charakteristické rovnice

1. Pro $a^2 - 4b > 0$ (dva různé reálné kořeny) ve tvaru $x_t = Am_1^t + Bm_2^t$, kde $m_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$
2. Pro $a^2 - 4b = 0$ (jeden dvojitý reálný kořen) ve tvaru $x_t = (A + Bt)m^t$, kde $m = -\frac{1}{2}a$
3. Pro $a^2 - 4b < 0$ (žádný reálný kořen) ve tvaru $x_t = r^t(A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$, kde $r = \sqrt{b}$, $\cos(\theta) = -\frac{a}{2\sqrt{b}}$

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty, příklad

Příklad : Najděte obecné řešení diferenčních rovnic

1. $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0.$
2. $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0.$
3. $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0.$

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty, příklad

Příklad : Najděte obecné řešení diferenčních rovnic

1. $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0.$
2. $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0.$
3. $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0.$

Řešení:

1. Charakteristická rovnice je $m^2 - 5m + 6 = 0$, její kořeny jsou $m_1 = 2$ a $m_2 = 3$, takže obecné řešení je $x_t = A2^t + B3^t$.
2. Charakteristická rovnice je $m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2 = 0$, jejím kořenem je $m = 3$, takže obecné řešení je $x_t = (A + Bt)3^t$.
3. Charakteristická rovnice je $m^2 - m + 1 = 0$ jejíž diskriminant je záporný, takže spočteme $r = \sqrt{b} = 1$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ a dostaneme obecné řešení $x_t = A\cos\frac{\pi}{3}t + B\sin\frac{\pi}{3}t$.

Poznámka : V případě záporného diskriminantu řešení osciluje. Číslu r se říká faktor růstu. Je-li $|r| < 1$, pak $r^t \to 0$ pro $t \to \infty$ a oscilace jsou tlumené.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.
Hledáme konstantní řešení $x_t = C$. Potom také $x_{t+1} = C,\ x_{t+2} = C$, takže dosazením získáme $C + aC + bC = c$. Odtud $C = \frac{c}{1+a+b}$, pokud $1 + a + b \neq 0$.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.
Hledáme konstantní řešení $x_t = C$. Potom také $x_{t+1} = C,\ x_{t+2} = C$, takže dosazením získáme $C + aC + bC = c$. Odtud $C = \frac{c}{1+a+b}$, pokud $1 + a + b \neq 0$.
Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.

Nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Zobecněme výsledky pro rovnici s nenulovou pravou stranou
$\boxed{x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c,}$ $(b,\ c \neq 0)$
Již víme, že řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako
$x_t = Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)} + u_t^*$, kde $Au_t^{(1)} + Bu_t^{(2)}$ je řešení přidružené homogenní úlohy a u_t^* je jakékoliv partikulární řešení nehomogenní rovnice. Postup, jak nalézt první člen, byl popsán na předchozích slajdech, teď zbývá určit u_t^*.
Hledáme konstantní řešení $x_t = C$. Potom také $x_{t+1} = C,\ x_{t+2} = C$, takže dosazením získáme $C + aC + bC = c$. Odtud $\boxed{C = \frac{c}{1+a+b}}$, pokud $1 + a + b \neq 0$.
Příklad : Najděte řešení diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.
Řešení: Nejprve vyjádříme řešení homogenní rovnice pomocí kořenů charakteristického polynomu $3m^2 - 2 = 0$. Dostaneme $m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. K řešení zhomogenizované úlohy $A\sqrt{\frac{2}{3}}^t + B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t$ musíme ještě přičíst konstantní řešení pro $C = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 4$. Tedy celkem $x_t = A\sqrt{\frac{2}{3}}^t + B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t + 4$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Poznámka : Podmínka věty je splněna pokud $|a| < 1 + b$ a $b < 1$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Poznámka : Podmínka věty je splněna pokud $|a| < 1 + b$ a $b < 1$.

Příklad : Rozhodněte o stabilitě diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.

Stabilita lineární diferenční rovnice druhého řádu

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínky, bude její řešení jednoznačně určeno konkrétními hodnotami konstant. Pokud je diferenční rovnicí popsána dynamika ekonomické veličiny, jistě je dobré vědět, jak změna počtečních podmínek ovlivní řešení. Bude mít i malá změna vliv na chování veličiny v dlouhodobém horizontu, nebo bude její efekt slábnout pro $t \to \infty$? Proto nás zajímá otázka stability řešení, odpověď nám dává následující věta.

Věta : Rovnice $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = c$ je globálně asymptoticky stabilní, jestliže kořeny charakteristické rovnice $m^2 + am + b = 0$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|m_{1,2}| < 1$.

Poznámka : Podmínka věty je splněna pokud $|a| < 1 + b$ a $b < 1$.

Příklad : Rozhodněte o stabilitě diferenční rovnice $3x_{t+2} - 2x_t = 4$.

Řešení: Kořeny splňují podmínku $|m_{1,2}| = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, tedy rovnice je globálně asymptoticky stabilní. Evidentně první dva členy řešení

$x_t = A\sqrt{\frac{2}{3}}^t + B\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t + 4$ konvergují k nule pro $t \to \infty$, tedy $x_t \to x^* = 4$.

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$$\boxed{x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),}$$
$$\boxed{y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),} \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$$

$$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2),\ y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t)$,

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2)$, $y_t = g_2(t, C_1, C_2)$, kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Příklad : Najděte řešení systému $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{3}y_t$, $y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{2}{3}y_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$.

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),$ $t = 0, 1, 2, \dots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2), y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Příklad : Najděte řešení systému $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{3}y_t,\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{2}{3}y_t,$ $t = 0, 1, 2, \dots$.

Řešení: Z první rovnice vyjádříme $y_t = 3x_{t+1} - \frac{3}{2}x_t$, což můžeme dosadit do druhé rovnice a získat tak $y_{t+1} = 2x_{t+1} - \frac{1}{2}x_t$. Posunutím času (nahradíme t časem $t+1$) v první rovnici pak $x_{t+2} = \frac{1}{2}x_{t+1} + \frac{1}{3}y_{t+1}$, takže substitucí za y_{t+1} dostaneme diferenční rovnici druhého řádu $x_{t+2} - \frac{7}{6}x_{t+1} + \frac{1}{6}x_t = 0.$

Systémy diferenčních rovnic

Systém 2 diferenčních rovnic prvního řádu můžeme zapsat jako

$x_{t+1} = f_1(t, x_t, y_t),$

$y_{t+1} = f_2(t, x_t, y_t),\quad t = 0, 1, 2, \dots$

Jsou-li známy počáteční hodnoty $x_0,\ y_0$, můžeme postupným dosazováním získat $x_t,\ y_t$ pro libovolné t. Obecným řešením systému rozumíme funkce $x_t = g_1(t, C_1, C_2), y_t = g_2(t, C_1, C_2),$ kde vhodnou volbou konstant $C_1,\ C_2$ můžeme získat libovolné řešení.

Příklad : Najděte řešení systému $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{3}y_t,\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{2}{3}y_t,$ $t = 0, 1, 2, \dots$.

Řešení: Z první rovnice vyjádříme $y_t = 3x_{t+1} - \frac{3}{2}x_t$, což můžeme dosadit do druhé rovnice a získat tak $y_{t+1} = 2x_{t+1} - \frac{1}{2}x_t$. Posunutím času (nahradíme t časem $t+1$) v první rovnici pak $x_{t+2} = \frac{1}{2}x_{t+1} + \frac{1}{3}y_{t+1}$, takže substitucí za y_{t+1} dostaneme diferenční rovnici druhého řádu $x_{t+2} - \frac{7}{6}x_{t+1} + \frac{1}{6}x_t = 0.$ Řešením charakteristické rovnice $m^2 - \frac{7}{6}m + \frac{1}{6} = 0$ dostaneme kořeny $m_1 = 1,\ m_2 = \frac{1}{6}$, které dávají $x_t = A + B\left(\frac{1}{6}\right)^t$. Dodatečně dosadíme do

$$y_t = 3x_{t+1} - \frac{3}{2}x_t = 3A + 3B\left(\frac{1}{6}\right)^{t+1} - \frac{3}{2}A - \frac{3}{2}B\left(\frac{1}{6}\right)^t = \frac{3}{2}A - B\left(\frac{1}{6}\right)^t.$$

Maticový zápis lineárního systému diferenčních rovnic

V případě lineárního systému

$x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1,$

$y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2,$ $t = 0, 1, 2, \dots$

můžeme označit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a systém přepsat jako

$(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b,$ $t = 0, 1, 2, \dots$.

Maticový zápis lineárního systému diferenčních rovnic

V případě lineárního systému

$x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1,$

$y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

můžeme označit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a systém přepsat jako

$(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b,$ $t = 0, 1, 2, \ldots$.Obdobně jako u jednodimenzionálního případu můžeme z výchozího $(x_0, y_0)^\top$ dostat postupným dosazováním $(x_1, y_1)^\top = A \cdot (x_0, y_0)^\top + b$, $(x_2, y_2)^\top = A \cdot (x_1, y_1)^\top + b = A^2 \cdot (x_0, y_0)^\top + A \cdot b + b$, atd. Pro obecný čas pak máme $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I + A + A^2 + \ldots A^{t-1}) \cdot b.$

Maticový zápis lineárního systému diferenčních rovnic

V případě lineárního systému

$x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1,$

$y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2,$ $t = 0, 1, 2, \dots$

můžeme označit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a systém přepsat jako

$(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b,$ $t = 0, 1, 2, \dots$.Obdobně jako u jednodimenzionálního případu můžeme z výchozího $(x_0, y_0)^\top$ dostat postupným dosazováním $(x_1, y_1)^\top = A \cdot (x_0, y_0)^\top + b$, $(x_2, y_2)^\top = A \cdot (x_1, y_1)^\top + b = A^2 \cdot (x_0, y_0)^\top + A \cdot b + b$, atd. Pro obecný čas pak máme $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I + A + A^2 + \dots A^{t-1}) \cdot b.$

Pravá strana může být ještě zjednodušena pomocí rovnosti $(I + A + A^2 + \dots A^{t-1})(I - A) = I - A^t$. Pro případ, kdy je matice $I - A$ regulární, tj. $|I - A| \neq 0$, máme tedy $(I + A + A^2 + \dots A^{t-1}) = (I - A^t) \cdot (I - A)^{-1}$. Celkové řešení pak lze vyjádřit ve tvaru $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I - A^t) \cdot (I - A)^{-1} \cdot b$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:

Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:
Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $\boxed{|\lambda_{1,2} < 1|}$.

Poznámka : V části věnované maticím jsme s využitím diagonalizace matice pomocí vlastních čísel vyjádřili její mocninu jako $A^t = P \cdot D^t \cdot P^{-1}$, kde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ a tudíž $D^t = diag(\lambda_1^t, \lambda_2^t)$. Prvky této matice se evidentně blíží k nule, je-li $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:
Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Poznámka : V části věnované maticím jsme s využitím diagonalizace matice pomocí vlastních čísel vyjádřili její mocninu jako $A^t = P \cdot D^t \cdot P^{-1}$, kde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ a tudíž $D^t = diag(\lambda_1^t, \lambda_2^t)$. Prvky této matice se evidentně blíží k nule, je-li $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Věta : Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, pak je matice $(I - A)$ regulární a každé řešení rovnice konverguje k rovnovážnému stavu $(x_t^*, y_t^*)^\top = (I - A)^{-1} \cdot b$.

Stabilita lineárního systému diferenčních rovnic

Systém nazveme globálně asymptoticky stabilní, pokud první část řešení $A^t \cdot (x_0, y_0)^\top$ odpovídající zhomogenizovanému systému konverguje nezávisle na počátečních podmínkách k nulové matici, tj. $A^t \to \mathbf{0}$ pro $t \to \infty$. Nutnou a postačující podmínku pro tuto konvergenci vyjadřuje následující věta:
Věta : Systém lineárních diferenčních rovnic $(x_{t+1}, y_{t+1})^\top = A \cdot (x_t, y_t)^\top + b$ je globálně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla matice A jsou v absolutní hodnotě menší než 1, $\boxed{|\lambda_{1,2} < 1|}$.

Poznámka : V části věnované maticím jsme s využitím diagonalizace matice pomocí vlastních čísel vyjádřili její mocninu jako $A^t = P \cdot D^t \cdot P^{-1}$, kde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ a tudíž $D^t = diag(\lambda_1^t, \lambda_2^t)$. Prvky této matice se evidentně blíží k nule, je-li $|\lambda_{1,2} < 1|$.

Věta : Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, pak je matice $(I - A)$ regulární a každé řešení rovnice konverguje k rovnovážnému stavu $\boxed{(x_t^*, y_t^*)^\top = (I - A)^{-1} \cdot b}$.

Tvrzení dostaneme, nahradíme-li ve výrazu pro řešení $(x_t, y_t)^\top = A^t \cdot (x_0, y_0)^\top + (I - A^t) \cdot (I - A)^{-1} \cdot b$ matici A^t nulovou maticí.