Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Příklad : Vyjádřete parciální derivace podle s a t pro funkci složenou z $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ a $x = t - s^2$ a $y = st$.

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x,y)$, kde $x = f(t,s)$, $y = g(t,s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t,s), g(t,s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x,y)f'_s(s,t) + F'_y(x,y)g'_s(s,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x,y)f'_t(s,t) + F'_y(x,y)g'_t(s,t)$$

Příklad : Vyjádřete parciální derivace podle s a t pro funkci složenou z $F(x,y) = x^2 + 2y^2$ a $x = t - s^2$ a $y = st$.

Řešení: Vyjádříme

$F'_x(x,y) = 2x,\ F'_y(x,y) = 4y,\ \frac{\partial x}{\partial s} = -2s,\ \frac{\partial y}{\partial s} = t,\ \frac{\partial x}{\partial t} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial t} = s$, takže aplikací pravidla dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x\cdot(-2s) + 4y\cdot t = 2(t-s^2)(-2s) + 4tst = -4st + 4s^3 + 4t^2 s,$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x\cdot 1 + 4y\cdot s = 2(t-s^2) + 4tss = 2t - 2s^2 + 4ts^2.$$

Derivace složené funkce, případ více proměnných

Mějme funkci $z = F(x, y)$, kde $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$. Potom z je funkcí proměnných s a t, neboť $z = F(f(t, s), g(t, s))$. Potřebujeme-li vyjádřit změnu proměnné z v závislosti na změnách s a t, dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s} = F'_x(x, y)f'_s(s, t) + F'_y(x, y)g'_s(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + F'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial t} = F'_x(x, y)f'_t(s, t) + F'_y(x, y)g'_t(s, t)$$

Příklad : Vyjádřete parciální derivace podle s a t pro funkci složenou z $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ a $x = t - s^2$ a $y = st$.

Řešení: Vyjádříme

$F'_x(x, y) = 2x$, $F'_y(x, y) = 4y$, $\frac{\partial x}{\partial s} = -2s$, $\frac{\partial y}{\partial s} = t$, $\frac{\partial x}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = s$, takže aplikací pravidla dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x \cdot (-2s) + 4y \cdot t = 2(t - s^2)(-2s) + 4tst = -4st + 4s^3 + 4t^2 s,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot 1 + 4y \cdot s = 2(t - s^2) + 4tss = 2t - 2s^2 + 4ts^2.$$

Zobecněme pravidlo pro funkci n proměnných $z = F(x_1, \dots, x_n)$, kde $x_1 = f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n = f_m(t_1, \dots, t_m)$:

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}, \text{ pro } j = 1, \dots, m.$$

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x, r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x, r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x, r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x, r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Příklad : Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 + 2ax + 4a^2$ pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ a zjistěte, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá změna parametru a.

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x, r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x, r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Příklad : Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 + 2ax + 4a^2$ pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ a zjistěte, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá změna parametru a.

Řešení: Podmínka pro stacionární bod je $f'(x) = -2x + 2a = 0$, jejímž řešením dostaneme $x^* = a$, což dá $f^* = f(x^*) = -a^2 + 2aa + 4a^2 = 5a^2$. Derivováním podle a dostaneme $f^{*\prime}(a) = 10a$.

Optimalizační úlohy s parametrem

Uvažujme problém maximalizace funkce $f(x,r)$, kde r je parametr. Bod optima obvykle závisí na parametru, označme jej tedy $x^*(r)$. Dosazením bodu optima do účelové funkce dostaneme optimální hodnotu, kterou můžeme opět chápat jako funkci parametru: $f^*(r) = f(x^*(r), r)$,. Můžeme také psát $f^*(r) = max_x f(x,r)$, přičemž $f^*(r)$ nazýváme hodnotovou funkcí.

Příklad : Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 + 2ax + 4a^2$ pro libovolnou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ a zjistěte, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá změna parametru a.

Řešení: Podmínka pro stacionární bod je $f'(x) = -2x + 2a = 0$, jejímž řešením dostaneme $x^* = a$, což dá $f^* = f(x^*) = -a^2 + 2aa + 4a^2 = 5a^2$. Derivováním podle a dostaneme $f^{*\prime}(a) = 10a$. K tomuto výsledku jsme mohli dojít i jiným způsobem. Označme zadanou $f(x)$ jako funkci dvou proměnných $F(x,a)$. Optimální hodnotu f^* můžeme pak vyjádřit jako složenou funkci $F(x^*, a)$. Podle pravidla o derivování složené funkce platí $f^{*\prime}(a) = F_1'(x^*, a) \cdot x^{*\prime} + F_2'(x^*, a) \cdot 1$. První člen je však díky stacionaritě funkce v bodě optima nulový, $F_1'(x^*, a) = f'(x^*) = 0$. Stačí tedy spočítat parciální derivaci $F(x,a)$ podle a: $F_2'(x,a) = (-x^2 + 2ax + 4a^2)'_a = 2x + 8a$ a dosadit sem za x optimální hodnotu $x^* = a$, takže máme $F_2'(x^*, a) = 2x^* + 8a = 2a + 8a = 10a$.

Obálková věta

Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolný optimalizační problém $max_{x \in M} f(x, r)$ (resp. $min_{x \in M} f(x, r)$), jehož bod optima x^* leží pro každé r uvnitř oblasti M:

Věta : Má-li hodnotová funkce $f^*(r)$ derivaci, platí pro ni

$f^{*\prime}(r) = [f_2'(x, r)]_{x=x^*}$. Toto tvrzení bývá označováno jako obálková věta.

Obálková věta

Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolný optimalizační problém $max_{x \in M} f(x, r)$ (resp. $min_{x \in M} f(x, r)$), jehož bod optima x^* leží pro každé r uvnitř oblasti M:

Věta : Má-li hodnotová funkce $f^*(r)$ derivaci, platí pro ni
$\boxed{f^{*\prime}(r) = [f_2'(x, r)]_{x=x^*}.}$ Toto tvrzení bývá označováno jako obálková věta.

Poznámka : k intepretaci obálkové věty: Při změně parametru r se mění optimální hodnota f^* ze dvou důvodů, jednak přímo, protože hodnotu r dosazujeme do $f(x^*, r)$, jednak nepřímo prostřednictvím vlivu na x^*. Věta ukazuje, že tento nepřímý efekt lze ignorovat, neboť změna v x má v okolí stacionárního bodu zanedbatelný vliv na optimální hodnotu f^*.

Obálková věta

Postup z předchozího příkladu můžeme zobecnit pro libovolný optimalizační problém $max_{x \in M} f(x, r)$ (resp. $min_{x \in M} f(x, r)$), jehož bod optima x^* leží pro každé r uvnitř oblasti M:

Věta : Má-li hodnotová funkce $f^*(r)$ derivaci, platí pro ni

$f^{*\prime}(r) = [f_2'(x, r)]_{x=x^*}$. Toto tvrzení bývá označováno jako obálková věta.

Poznámka : k intepretaci obálkové věty: Při změně parametru r se mění optimální hodnota f^* ze dvou důvodů, jednak přímo, protože hodnotu r dosazujeme do $f(x^*, r)$, jednak nepřímo prostřednictvím vlivu na x^*. Věta ukazuje, že tento nepřímý efekt lze ignorovat, neboť změna v x má v okolí stacionárního bodu zanedbatelný vliv na optimální hodnotu f^*.

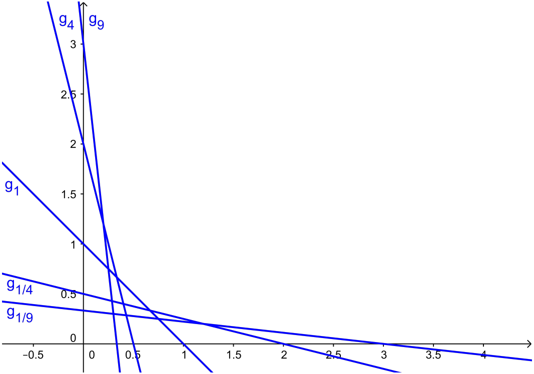
Poznámka : geometrický význam obálkové věty: Označme $g_x(r) = f(r, x)$ funkci s pevnou hodnotou argumentu x. Protože $f^*(r)$ vyjadřuje maximální hodnotu, kterou může funkce $f(x, r)$ pro dané r nabývat, je $f^*(r) \geq g_x(r)\ \forall x \in M$. Tedy graf hodnotové funkce leží nad všemi křivkami $g_x(r),\ x \in M$. Současně pro každé r existuje x^*, takové že $f^*(r) = g_{x^*}(r)$, takže se graf hodnotové funkce v každém bodě některé z těchto křivek dotýká, můžeme říct, že je "obaluje".

Obálková věta - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x,r) = \sqrt{x} - rx$. Podle zavedeného značení $f^*(r) = max_x g_x(r)$, kde $g_x(r) = f(r,x)$. Znázorněme na obrázku několik funkcí $g_x(r)$ pro vybrané hodnoty x, například
$g_1(r) = \sqrt{1} - r,\ g_4(r) = 2 - 4r,\ g_9(r) = 3 - 9r$, atd.

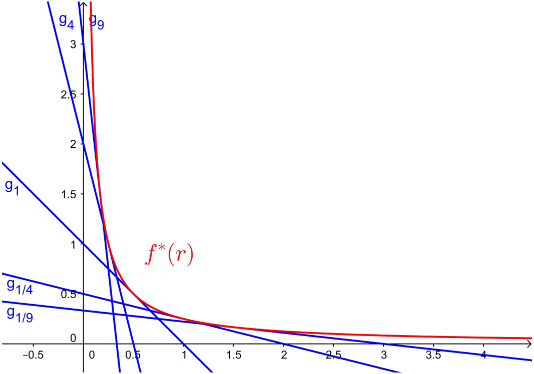
Obálková věta - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x,r) = \sqrt{x} - rx$. Podle zavedeného značení $f^*(r) = max_x g_x(r)$, kde $g_x(r) = f(r,x)$. Znázorněme na obrázku několik funkcí $g_x(r)$ pro vybrané hodnoty x, například
$g_1(r) = \sqrt{1} - r,\ g_4(r) = 2 - 4r,\ g_9(r) = 3 - 9r$, atd.



Obálková věta - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x,r) = \sqrt{x} - rx$. Podle zavedeného značení $f^*(r) = max_x g_x(r)$, kde $g_x(r) = f(r,x)$. Znázorněme na obrázku několik funkcí $g_x(r)$ pro vybrané hodnoty x, například
$g_1(r) = \sqrt{1} - r,\ g_4(r) = 2 - 4r,\ g_9(r) = 3 - 9r$, atd.



Nyní jsme přidali též funkci $f^*(r) = max_x g_x(r)$, jejíž graf shora "obaluje"znázorněné křivky.

Obálková věta - příklad

Příklad : Dořešme optimalizační problém z předchozího příkladu a určeme, jakou změnu optimální hodnoty vyvolá "jednotková změna"parametru. Stacionární bod pro maximalizaci funkce $f(x,r) = \sqrt{x} - rx$ získáme řešením podmínky $f'_x(x,r) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - r = 0$. Odtud vyjádříme $x^* = \frac{1}{4r^2}$. Aniž bychom explicitně vyjádřili hodnotovou funkci f^*, můžeme podle obálkové věty zjistit její derivaci $f^{*\prime}(r) = f'_2(x^*,r) = [-x]_{x=x^*} = \frac{-1}{4r^2}$. (Tento výsledek lze snadno ověřit pomocí dosazení $f^*(r) = f(x^*,r) = f(\frac{1}{4r^2},r) = \frac{1}{2r} - \frac{r}{4r^2} = \frac{1}{4r}$. Tedy hodnotová funkce má opravdu derivaci $f^{*\prime}(r) = \frac{-1}{4r^2}$).

Obálková věta pro více parametrů

Formulace obálkové věty pro případ více parametrů $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ je následující:

Věta : Nechť $f^*(\mathbf{r}) = max_x f(x, \mathbf{r})$ a $x^*(\mathbf{r})$ značí bod optima funkce $f(x, \mathbf{r})$. Pokud existují parciální derivace hodnotové funkce, pak pro ně platí:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \left[\frac{\partial f(x,\mathbf{r})}{\partial r_j}\right]_{x=x^*(\mathbf{r})}, \; j = 1, \ldots, k.$$

Obálková věta pro více parametrů

Formulace obálkové věty pro případ více parametrů $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ je následující:

Věta : Nechť $f^*(\mathbf{r}) = max_x f(x, \mathbf{r})$ a $x^*(\mathbf{r})$ značí bod optima funkce $f(x, \mathbf{r})$. Pokud existují parciální derivace hodnotové funkce, pak pro ně platí:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \left[\frac{\partial f(x,\mathbf{r})}{\partial r_j}\right]_{x=x^*(\mathbf{r})}, \; j = 1, \ldots, k.$$

Poznámka : S pomocí této věty se dají odvodit některá významná tvrzení ekonomické teorie, jako je například Hotellingovo lemma.

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0,\ j = 1, \ldots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{x=x^*(\mathbf{r})},\ i = 1, \ldots, k.$$

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0, \ j = 1, \dots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right]_{x = x^*(\mathbf{r})}, \ i = 1, \dots, k.$$

Poznámka : Aplikací na konkrétní ekonomické problémy lze dospět k významným tvrzením jako jsou Shephardovo lemma a Royova identita.

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0, \; j = 1, \ldots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{r})}, \; i = 1, \ldots, k.$$

Poznámka : Aplikací na konkrétní ekonomické problémy lze dospět k významným tvrzením jako jsou Shephardovo lemma a Royova identita.

Poznámka : Speciální případ dostaneme pro případ, kdy se parametry nevyskytují v účelové funkci, ale pouze jako absolutní členy omezujících rovností: $max_x f(x)$ pro x splňující podmínky $g_j(x) = c_j, \; j = 1, \ldots, m$. Pak obálková věta říká, že pro hodnotovou funkci $f^*(\mathbf{c})$ a Lagrangeovu funkci $L(x, \mathbf{c}) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j)$ plati

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{c})}{\partial c_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{c})} = \lambda_i, \; i = 1, \ldots, m,$$

Obálková věta pro optimalizaci s omezením

Formulace obálkové věty pro případ optimalizace funkce $f(x, \mathbf{r})$ pro x splňující podmínky $g_j(x, \mathbf{r}) = 0,\ j = 1, \ldots, m$, je modifikována pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, \mathbf{r}) = f(x, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, \mathbf{r})$ do následující podoby:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{r})},\ i = 1, \ldots, k.$$

Poznámka : Aplikací na konkrétní ekonomické problémy lze dospět k významným tvrzením jako jsou Shephardovo lemma a Royova identita.

Poznámka : Speciální případ dostaneme pro případ, kdy se parametry nevyskytují v účelové funkci, ale pouze jako absolutní členy omezujících rovností: $max_x f(x)$ pro x splňující podmínky $g_j(x) = c_j,\ j = 1, \ldots, m$. Pak obálková věta říká, že pro hodnotovou funkci $f^*(\mathbf{c})$ a Lagrangeovu funkci $L(x, \mathbf{c}) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j)$ platí

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \left[\frac{\partial L(x, \mathbf{c})}{\partial c_i}\right]_{x = x^*(\mathbf{c})} = \lambda_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

což už jsme zjistili dříve diskuzí ekonomické interpretace významu Lagrangeových multiplikátorů.

Implicitně zadané funkce

Až dosud jsme pracovali s funkcemi v explicitním vyjádření $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.
V ekonomických aplikacích však nejsou vždy vztahy mezi endogení veličinou a exogenními veličinami vyjádřeny v této ideální podobě, často je dostaneme v podobě rovnice (nebo soustavy rovnic) $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Implicitně zadané funkce

Až dosud jsme pracovali s funkcemi v explicitním vyjádření $y = f(x_1, \dots, x_n)$.
V ekonomických aplikacích však nejsou vždy vztahy mezi endogení veličinou a exogenními veličinami vyjádřeny v této ideální podobě, často je dostaneme v podobě rovnice (nebo soustavy rovnic) $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.
Pokud z této podmínky lze pro každé $(x_1, \dots, x_n)$ jednoznačně vyjádřit proměnnou y, pak řekneme že vztah definuje implicitně funkci $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Ne vždy však umíme tento předpis nalézt. Přesto by nás zajímala odpověď na otázku, jak změny jednotlivých exogenních proměnných ovlivní endogenní proměnnou y.

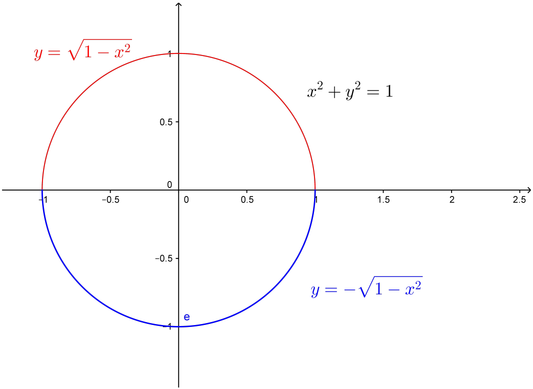
Implicitní funkce - příklad

Příklad : Obecná rovnice přímky $3x + 4y - 12 = 0$ definuje implicitně lineární funkci $y = 3 - \frac{3}{4}x$.

Implicitní funkce - příklad

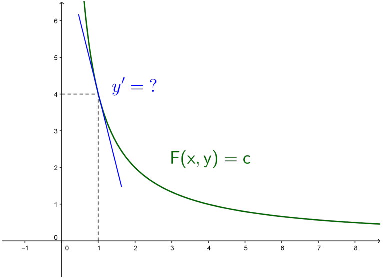
Příklad : Obecná rovnice přímky $3x + 4y - 12 = 0$ definuje implicitně lineární funkci $y = 3 - \frac{3}{4}x$.

Příklad : Obecná rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 1$ je složitějším případem implicitní funkce. Pro $x > 1$ nebo $x < -1$ neexistuje žádné y, které by podmínce vyhovovalo, pro $x \in (-1, 1)$ zase nelze vyjádřit y jednoznačně (dostaneme dvě možnosti $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$). Situace je ilustrována na obrázku.



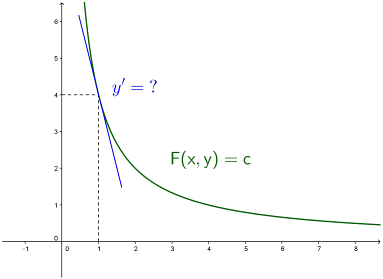
Implicitní funkce - derivace

Uvažujme nejprve jednoduchý případ funkce $y = f(x)$ definované na intervalu I podmínkou $F(x,y) = c$. Graf funkce je reprezentován vrstevnicí funkce dvou proměnných. Podaří-li se nám v bodě $x \in I$ vyjádřit derivaci $y' = f'(x)$, určíme tak sklon vrstevnice v tomto bodě.



Implicitní funkce - derivace

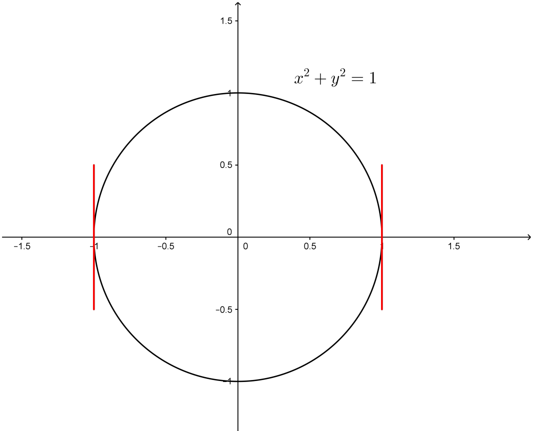
Uvažujme nejprve jednoduchý případ funkce $y = f(x)$ definované na intervalu I podmínkou $F(x, y) = c$. Graf funkce je reprezentován vrstevnicí funkce dvou proměnných. Podaří-li se nám v bodě $x \in I$ vyjádřit derivaci $y' = f'(x)$, určíme tak sklon vrstevnice v tomto bodě.



Přepišme definiční podmínku jako $F(x, f(x)) = c$ a uplatněme na ni pravidlo o derivaci složené funkce $F'_x(x, y) \cdot 1 + F'_y(x, y) \cdot y' = 0$. (Na pravé straně podmínky byla konstanta, proto je po zderivování nulová.) Ze získané rovnice můžeme vyjádřit: $y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, a to pro všechny body, ve kterých platí $F'_y(x, y) \neq 0$.

Derivace implicitní funkce - příklad

Příklad : Vrátíme-li se k předchozímu příkladu $x^2 + y^2 = 1$, kde $F(x,y) = x^2 + y^2$, a tedy $F'_x(x,y) = 2x$ a $F'_y(x,y) = 2y$, dostaneme $y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x}{2y}$, což však není definováno pro y=0. (Z obrázku je zřejmé, že y' neexistuje v bodech (1,0) a (-1,0), protože tečna ke kružnici je v těchto bodech svislá)

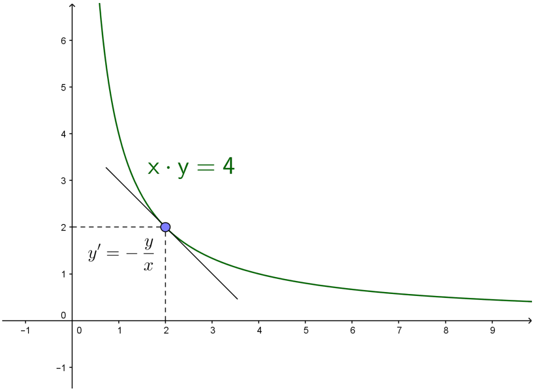


Derivace implicitní funkce - příklad

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně podmínkou $xy = 4$.

Derivace implicitní funkce - příklad

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně podmínkou $xy = 4$.
Řešení: Pro $F(x, y) = xy$ máme $F'_x(x, y) = y$, $F'_y(x, y) = x$, takže $y' = -\frac{y}{x}$.
Můžeme ověřit, že $y = \frac{4}{x}$, takže vztah $y' = -\frac{y}{x} = -\frac{4}{x^2}$ skutečně platí. Situaci máme znázorněnu na obrázku, kde je vyznačen bod $(2, 2)$, ve kterém je derivace rovna -1.



Ekonomická interpretace derivace implicitní funkce

Využití aparátu impliciních funkcí je užitečné například v teorii spotřebitele (předpokládejme, že spotřebovává pouze dva produkty , jejichž množství je x, resp. y). Je-li k dispozici užitková funkce spotřebitele $u(x, y)$, lze jeho preference vyjádřit pomocí indiferenčních křivek s analytickým vyjádřením $u(x, y) = konst$. Derivace $y' = -\frac{u'_x(x,y)}{u'_y(x,y)}$ vyjadřuje sklon indiferenční linie. Její absolutní hodnota, tj. podíl mezních užitků $-y' = \frac{MU_x}{MU_y}$ udává mezní míru substituce ve spotřebě.

Ekonomická interpretace derivace implicitní funkce

Využití aparátu impliciních funkcí je užitečné například v teorii spotřebitele (předpokládejme, že spotřebovává pouze dva produkty , jejichž množství je x, resp. y). Je-li k dispozici užitková funkce spotřebitele $u(x, y)$, lze jeho preference vyjádřit pomocí indiferenčních křivek s analytickým vyjádřením $u(x, y) = konst$. Derivace $y' = -\frac{u'_x(x,y)}{u'_y(x,y)}$ vyjadřuje sklon indiferenční linie. Její absolutní hodnota, tj. podíl mezních užitků $-y' = \frac{MU_x}{MU_y}$ udává mezní míru substituce ve spotřebě.

Příklad : Spočtěte mezní míru substituce pro funkci $u(x, y) = x^a \cdot y^b$, kde $a, \ b$ jsou kladné konstanty.

Řešení: $MU_x = u'_x = ax^{a-1} \cdot y^b$, $MU_y = u'_y = bx^a \cdot y^{b-1}$, tedy

$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{ax^{a-1} \cdot y^b}{bx^a \cdot y^{b-1}} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x}$.

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$, (pro $F'_z \neq 0$)

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ \text{(pro } F'_z \neq 0)$$

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně podmínkou $x - 2y - 3z + z^2 = -2$.

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ (\text{pro } F'_z \neq 0)$$

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně podmínkou $x - 2y - 3z + z^2 = -2$.
Řešení: Pro $F(x, y, z) = x - 2y - 3z + z^2$ máme
$F'_x(x, y, z) = 1,\ F'_y(x, y, z) = -2,\ F'_z(x, y, z) = -3 + 2z$, takže pro $z \neq 3/2$ máme $z'_x = -\frac{1}{2z-3},\ z'_y = \frac{2}{2z-3}$.

Derivace implicitní funkce - obecný případ

Odvodíme nejprve pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zadanou implicitně podmínkou $F(x, y, z) = c$. Opět použijeme pravidlo o derivování složené funkce na tento vztah zapsaný jako $F(x, y, f(x, y)) = c$. Pravá strana je konstantní a tudíž má nulovou derivaci podle obou proměnných x i y:
$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$, odkud vyjádříme

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},\ (\text{pro } F'_z \neq 0)$$

Příklad : Užijte vztah pro vyjádření parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně podmínkou $x - 2y - 3z + z^2 = -2$.
Řešení: Pro $F(x, y, z) = x - 2y - 3z + z^2$ máme
$F'_x(x, y, z) = 1,\ F'_y(x, y, z) = -2,\ F'_z(x, y, z) = -3 + 2z$, takže pro $z \neq 3/2$ máme $z'_x = -\frac{1}{2z-3},\ z'_y = \frac{2}{2z-3}$.

Pro implicitně zadanou funkci n proměnných dostaneme v bodech, kde $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ vztah

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = c \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y},\ i = 1, \ldots n.$$