Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in X$ nazývame vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Příklad : Určete gradient a Hessovu matici funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ v bodě $(5, 3)$.

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top.$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Příklad : Určete gradient a Hessovu matici funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ v bodě $(5, 3)$.
Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou: $f'_x(x, y) = y^2$, $f'_y(x, y) = 2x \cdot y$, tedy $\nabla f(5, 3) = (9, 30)^\top$.

Předpokládejme dále, že funkce f je spojitě diferencovatelná až do řádu 2.

Gradient funkce

Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce n proměnných. Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in X$ nazýváme vektor

$$\nabla f(\mathbf{t}) = (f'_{x_1}(\mathbf{t}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{t}))^\top .$$

Hessova matice

Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in X$ nazýváme symetrickou matici řádu n:

$$H(\mathbf{t}) = (f''_{x_i,x_j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^n$$

Příklad : Určete gradient a Hessovu matici funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ v bodě $(5, 3)$.

Řešení: Parciální derivace prvního řádu jsou: $f'_x(x, y) = y^2$, $f'_y(x, y) = 2x \cdot y$, tedy $\nabla f(5, 3) = (9, 30)^\top$. Parciální derivace druhého řádu jsou:

$f''_{xx}(x, y) = 0$, $f''_{xy}(x, y) = 2y$, $f''_{yy}(x, y) = 2x$, tedy $H(5, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.)

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f_s'(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f_s''(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f_s'(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \;\; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top.$$

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f'_s(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f''_s(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f'_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \; f''_s(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top.$$

Příklad : Určete první a druhou derivaci funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme **derivací f ve směru $\mathbf{s}$** a značíme $f_s'(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f_s''(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f_s'(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top.$$

Příklad : Určete první a druhou derivaci funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Řešení: Víme, že $\nabla f(x, y) = (y^2, \; 2xy)^\top$, tedy $f_s'(x, y) = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{2}}$.

Směrové derivace

Uvažujme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci $f : X \to \mathbb{R}$, bod $\mathbf{t} \in X$ a jednotkový vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Vytvoříme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(\mathbf{t} + x.\mathbf{s})$. Hodnotu $\varphi'(0)$ nazveme derivací f ve směru $\mathbf{s}$ a značíme $f_s'(\mathbf{t})$. (pozn.: obdobně definujeme $f_s''(\mathbf{t})$ jako $\varphi''(0)$.) Dá se ukázat, že platí

$$f_s'(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot \nabla f(\mathbf{t}), \;\; f_s''(\mathbf{t}) = \mathbf{s} \cdot H(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{s}^\top .$$

Příklad : Určete první a druhou derivaci funkce $f(x, y) = x \cdot y^2$ ve směru $\mathbf{s} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

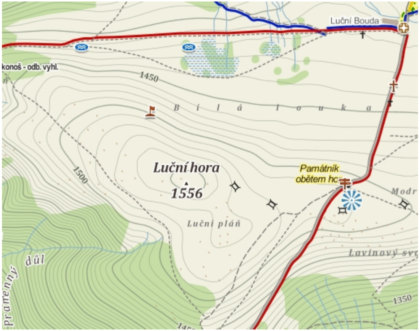
Řešení: Víme, že $\nabla f(x, y) = (y^2,\ 2xy)^\top$, tedy $f_s'(x, y) = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{2}}$.

Hessova matice je: $H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, tedy

$f_s''(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 2y + 2y + 2x) = 2y + x$.

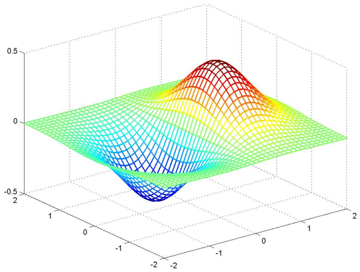
Grafické znázornění funkce dvou proměnných

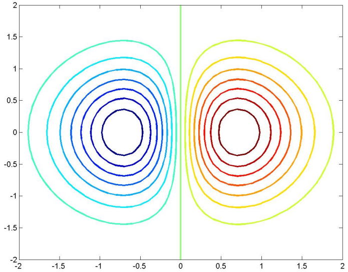
V třírozměrném prostoru si můžeme graf funkce dvou proměnných představit jako zemský povrch. Pro znázornění povrchu ve 2D se používají většinou vrstevnice funkce.



Grafické znázornění funkce dvou proměnných

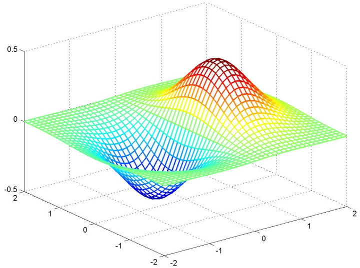
Podobným způsobem si můžeme znázornit třeba funkci $f(x,y) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$.

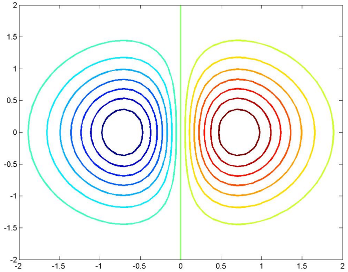




Grafické znázornění funkce dvou proměnných

Podobným způsobem si můžeme znázornit třeba funkci $f(x,y) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$.

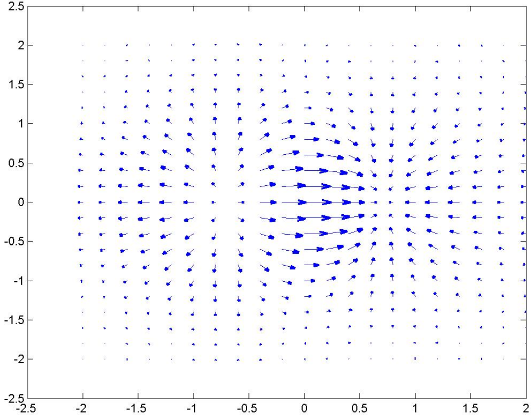




Vrstevnicí funkce $f(x,y)$ "o nadmořské výšce c"rozumíme množinu všech bodů $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takových, že platí $f(x,y) = c$. Například pro výše uvedenou funkci $f(x,y)$ určíme nultou vrstevnici jako množinu všech řešení rovnice o dvou neznámých $\frac{x}{e^{x^2+y^2}} = 0$. Zřejmě musí být $x = 0$, ale y je libovolné, tedy dostaneme množinu $\{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

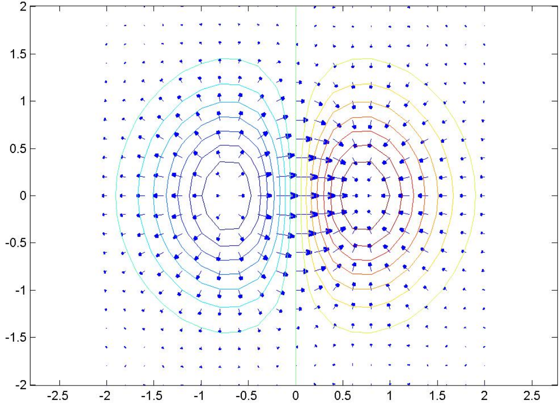
Grafické znázornění gradientů funkce dvou proměnných

Gradient $\nabla f(x, y)$ většinou znázorňujeme jako vektor vycházející z bodu (x, y) do bodu $(x + f'_x(x, y),\ y + f'_y(x, y))$. Na obrázku vidíme gradienty funkce $f(x, y) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$ v bodech pravidelné sítě.



Gradienty a vrstevnice

Znázorníme-li gradienty funkce do stejného obrázku s vrstevnicemi, můžeme si všimnout, že se jeví jako normálové vektory vrstevnic. Dá se ukázat, že libovolná funkce f v zadaném bodě $\mathbf{x}$ nejprudčeji roste ve směru gradientu $\nabla f(\mathbf{x})$ a nejstrměji klesá ve směru $-\nabla f(\mathbf{x})$.



Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.

Totální diferenciál

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce definovaná v daném δ-okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$, která má v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace f'_x, f'_y. Potom funkci df v proměnných dx, dy, danou vztahem

$$df_{a,b}(dx, dy) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Příklad : Napište diferenciál funkce $z = x^3y^4$ v bodě $[2, 3]$.
Řešení: Funkce $z = x^3y^4$ má spojité parciální derivace $f'_x(x, y) = 3x^2y^4$ a $f'_y(x, y) = 4x^3y^3$ v každém bodě $[x, y]$, tedy i v bodě $[2, 3]$. Dostáváme pak

$$dz = (3x^2y^4)_{[2,3]}dx + (4x^3y^3)_{[2,3]}dy,$$

$$dz = 972\,dx + 864\,dy.$$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h, k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a + h, b + k] \in U_\delta([a, b])$ platí:

$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \eta(h, k)$ a zároveň

$\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$

Totální diferenciál

Pro totální diferenciál platí následující věta.

Věta : Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ spojité parciální derivace prvního řádu, potom existují $\delta > 0$ a funkce $\eta(h,k)$ tak, že pro všechna h, k splňující $[a+h, b+k] \in U_\delta([a,b])$ platí:

$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \eta(h,k)$ a zároveň

$\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\eta(h,k)}{|h|+|k|} = 0.$

Význam věty:

$f(a+dx, b+dy) - f(a,b)$ je přírůstek funkce při přechodu z bodu $[a,b]$ do bodu $[a+dx, b+dy]$. Předchozí vztah lze tedy zapsat takto

$\Delta f = f(a+dx, b+dy) - f(a,b) = df_{a,b}(dx,dy) + \eta(dx,dy).$

Jestliže nahradíme přírůstek Δf přírůstkem na tečné rovině df, dopustíme se chyby $\eta(dx,dy)$, tato chyba se blíží k nule, blížíme-li se k bodu $[a,b]$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \ldots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n] \in \Omega$.

Totální diferenciál n proměnných

Analogicky lze zavést diferenciál funkce n-proměnných.

Definice : Jestliže funkce $z = f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$ má v oblasti Ω spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$df_X(dx_1, \dots, dx_n) = f'_{x_1}(X)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X)dx_n$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce $z = f(X)$ v bodě $X = [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$.

Analogicky případu $n = 2$ lze formulovat větu, ze které vyplývá, že pokud má funkce $f(X)$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ v bodě $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak

$$f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) \approx f'_{x_1}(X_0)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(X_0)dx_n.$$

Totální diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině, přejdeme-li z bodu $X^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ do bodu $X = [x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n]$.

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2\right).$$

Taylorův polynom

Formulujeme pouze pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ mající v jistém okolí $U_\delta([a, b])$ bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace až do řádu 3 včetně. Označme $T_2(x, y)$ následující polynom v proměnných $x,\ y$:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2\right).$$

Podíváme-li se blíže na polynom $T_2(x, y)$, vidíme, že tento polynom má v bodě $[a, b]$ stejnou funkční hodnotu jako funkce $f(x, y)$ a všechny odpovídající si parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $T_2(x, y)$ až do řádu 2 se v bodě $[a, b]$ sobě rovnají. Polynom $T_2(x, y)$ nazýváme Taylorovým polynomem řádu 2 příslušným k funkci $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$.

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x, y)$:
$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x, y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x, y) = y \cdot (y - 1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x, y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x, y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1, 1]$ jsou
$f'_x(1, 1) = 1$, $f'_y(1, 1) = 0$, $f''_{xx}(1, 1) = 0$, $f''_{xy}(1, 1) = 1$, $f''_{yy}(1, 1) = 0$, takže
$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}(x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)(y - 1)$

Taylorův polynom - příklad

Příklad : Pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x,y) = x^y$ ve vhodném bodě odhadněte $0,9^{1,1}$.

Řešení: Spočteme parciální derivace funkce $f(x,y)$:
$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$
$f'_y(x,y) = x^y \cdot ln(x)$
$f''_{xx}(x,y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}$
$f''_{xy}(x,y) = y \cdot x^{y-1} \cdot ln(x) + x^{y-1}$
$f''_{yy}(x,y) = x^y \cdot ln^2(x)$

Hodnoty těchto derivací ve vhodném bodě $[1,1]$ jsou
$f'_x(1,1) = 1,\ f'_y(1,1) = 0,\ f''_{xx}(1,1) = 0,\ f''_{xy}(1,1) = 1,\ f''_{yy}(1,1) = 0$, takže
$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)(y-1)$

Aplikujeme tento vztah pro odhad $0,9^{1,1}$ pomocí $T_2(0,9;1,1)$:
$0,9^{1,1} \approx T_2(0,9;1,1) = 1 + \frac{1}{1!}(0,9-1) + \frac{2}{2!}(0,9-1)(1,1-1) = 0,89.$