Matice - pokročilé partie

Ze základního kurzu matematiky je třeba znát následující témata: (stačí např. v rozsahu `http://mathstat.econ.muni.cz/materialy/matematika`)

- Matice a základní operace s maticemi
- Determinant matice
- Inverzní matice
- Systémy lineárních rovnic
- Elementární transformace, Gaussova eliminační metoda
- Euklidovský prostor
- Lineární nezávislost vektorů, hodnost matice

Matice a lineární zobrazení

Pomocí matic můžeme definovat lineární zobrazení:

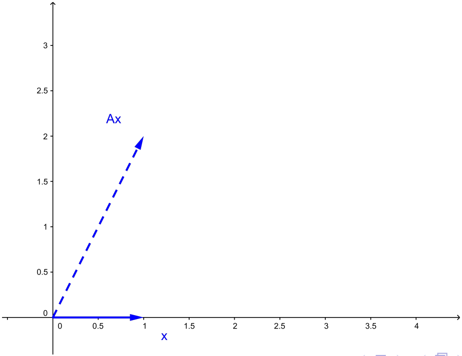
Příklad : Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ definuje lineární zobrazení přiřazující vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$

Matice a lineární zobrazení

Pomocí matic můžeme definovat lineární zobrazení:

Příklad : Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ definuje lineární zobrazení přiřazující vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$

Například pro vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dostaneme $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

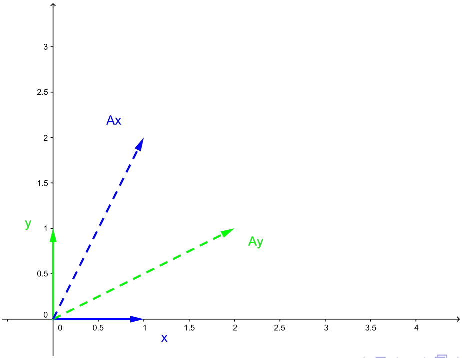


Matice a lineární zobrazení

Pomocí matic můžeme definovat lineární zobrazení:

Příklad : Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ definuje lineární zobrazení přiřazující vektoru $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor $\mathbf{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$

Pro $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dostaneme $\mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

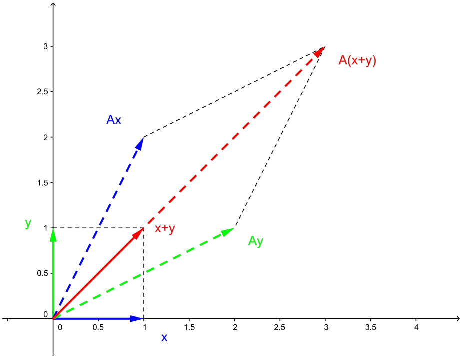


Matice a lineární zobrazení, příklad

Pokud bychom chtěli provést totéž pro vektor $z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ díky linearitě zobrazení nemusíme počítat součin $\mathbf{A} \cdot (x + y)$, ale stačí sečíst $\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

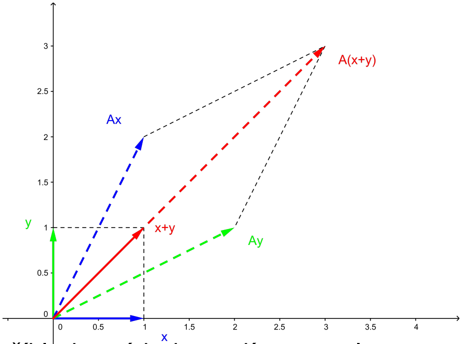
Matice a lineární zobrazení, příklad

Pokud bychom chtěli provést totéž pro vektor $z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ díky linearitě zobrazení nemusíme počítat součin $\mathbf{A} \cdot (x + y)$, ale stačí sečíst $\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Matice a lineární zobrazení, příklad

Pokud bychom chtěli provést totéž pro vektor $z = x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ díky linearitě zobrazení nemusíme počítat součin $\mathbf{A} \cdot (x + y)$, ale stačí sečíst $\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{A} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Vektor $z = x + y$ z příkladu má jednu zajímavou vlastnost. Při násobení maticí $\mathbf{A}$ se nezměnil jeho směr, ale pouze se ztrojnásobila jeho délka. Takový vektor pak nazýváme vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu 3.

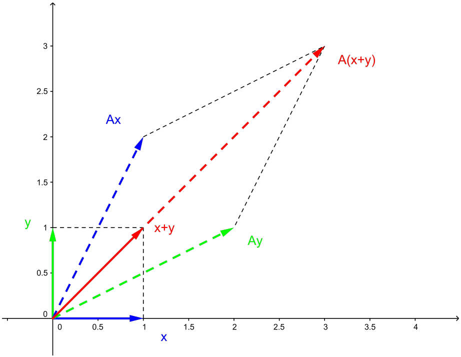
Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice : Pokud pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ existuje číslo λ a nenulový vektor x takové že $\mathbf{A}x = \lambda x$, pak číslo λ nazýváme vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ a x nazveme vlastním vektorem odpovídajícím číslu λ.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice : Pokud pro čtvercovou matici **A** existuje číslo λ a nenulový vektor x takové že $\mathbf{A}x = \lambda x$, pak číslo λ nazýváme vlastním číslem matice **A** a x nazveme vlastním vektorem odpovídajícím číslu λ.

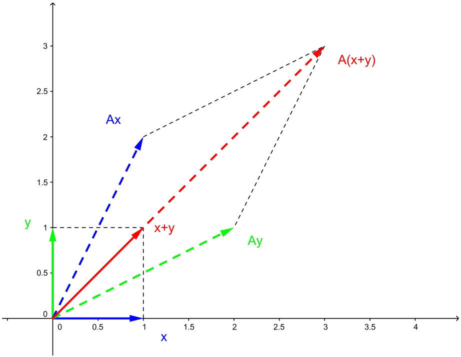
Příklad : Existují pro matici **A** z předchozího příkladu nějaké další vektory příslušející vlastnímu číslu 3?



Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice : Pokud pro čtvercovou matici **A** existuje číslo λ a nenulový vektor x takové že $\mathbf{A}x = \lambda x$, pak číslo λ nazýváme vlastním číslem matice **A** a x nazveme vlastním vektorem odpovídajícím číslu λ.

Příklad : Existují pro matici **A** z předchozího příkladu nějaké další vektory příslušející vlastnímu číslu 3?



Příklad : Existuje pro matici **A** nějaké jiné vlastní číslo? (hint: najdete na obrázku nějaký jiný vektor, který nemění transformací směr?)

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Řešení: Přepišme si soustavu rovnic, pomocí které jsou vlastní čísla definována.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

Anulováním rovnic dostaneme homogenní systém

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kdy má homogenní systém i jiné než triviální (rozuměj nulové) řešení? Matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici) musí být singulární, tedy její determinant musí být nulový.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Řešení: Přepišme si soustavu rovnic, pomocí které jsou vlastní čísla definována.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\
2x_1 + x_2 &= \lambda x_2
\end{aligned}
$$

Anulováním rovnic dostaneme homogenní systém

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\
2x_1 + (1-\lambda)x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Kdy má homogenní systém i jiné než triviální (rozuměj nulové) řešení? Matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici) musí být singulární, tedy její determinant musí být nulový. Rozepišme tuto podmínku podrobněji: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, tedy $(1-\lambda)^2 = 4$ a $(1-\lambda) = \pm 2$. Dostali jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Řešení: Přepišme si soustavu rovnic, pomocí které jsou vlastní čísla definována.

$$x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

Anulováním rovnic dostaneme homogenní systém

$$(1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

Kdy má homogenní systém i jiné než triviální (rozuměj nulové) řešení? Matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici) musí být singulární, tedy její determinant musí být nulový. Rozepišme tuto podmínku podrobněji: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, tedy $(1-\lambda)^2 = 4$ a $(1-\lambda) = \pm 2$. Dostali jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$. Jaké vektory příslušejí těmto vlastním číslům zjistíme již snadno jako řešení systémů $\mathbf{A}x = \lambda_1 x$ a $\mathbf{A}x = \lambda_2 x$. První systém nemusíme řešit, víme že rovnici vyhovuje

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Pro $\lambda_2 = -1$ dostaneme:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

Po anulování:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

dostáváme řešení $x_1 = -x_2, x_2 = t \in \mathbb{R}$. Odpovídající vlastní vektor je tedy lib. nenulový násobek vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, návod

Shrňme si nyní postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů pro obecnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$:

- Odečteme λ od každého z diagonálních prvků matice $\mathbf{A}$
- Vyjádříme determinant $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$, tzv. charakteristcký polynom
- Položíme tento polynom roven nule, čímž získáme tzv. charakteristickou rovnici $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$
- Nalezneme reálné kořeny charakteristické rovnice
- Ke každému vlastnímu číslu λ_i sestavíme systém rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})x = 0$, jeho řešením získáme odpovídající vlastní vektor(y) v_i.

Vlastní čísla a vlastní vektory, návod

Shrňme si nyní postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů pro obecnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$:

- Odečteme λ od každého z diagonálních prvků matice $\mathbf{A}$
- Vyjádříme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$, tzv. charakteristcký polynom
- Položíme tento polynom roven nule, čímž získáme tzv. charakteristickou rovnici $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- Nalezneme reálné kořeny charakteristické rovnice
- Ke každému vlastnímu číslu λ_i sestavíme systém rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})x = 0$, jeho řešením získáme odpovídající vlastní vektor(y) v_i.

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, návod

Shrňme si nyní postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů pro obecnou čtvercovou matici **A**:

- Odečteme λ od každého z diagonálních prvků matice **A**
- Vyjádříme determinant $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$, tzv. charakteristcký polynom
- Položíme tento polynom roven nule, čímž získáme tzv. charakteristickou rovnici $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- Nalezneme reálné kořeny charakteristické rovnice
- Ke každému vlastnímu číslu λ_i sestavíme systém rovnic $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})x = 0$, jeho řešením získáme odpovídající vlastní vektor(y) v_i.

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Sestavíme charakteristický polynom:

$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ nemá bohužel v reálném oboru řešení, takže neexsitují žádná reálná vlastní čísla matice **B**.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad

Příklad : Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Sestavíme charakteristickou rovnici:
$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Pro $\lambda_1 = 1$ dostaneme systém $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right)$, který elementárními úpravami převedeme na $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Z druhé rovnice získáme pro lib. nenulové $t \in R$: $x_2 = -t, \ x_3 = 3t$, což nám po dosazení do první rovnice dá $x_1 = 3t$, tedy vlastní vektor je $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory, příklad pokračování

Pro $\lambda_{2,3} = 2$ dostaneme systém $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right)$, který elementárními úpravami převedeme na $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Tato soustava má řešení závislé na dvou parametrech, pro volbu $x_2 = t \in \mathbb{R}$ a $x_3 = s \in \mathbb{R}$ dopočítáme $x_1 = 2t + 2s$. Každé řešení tedy můžeme zapsat jako kombinaci $s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Řekneme, že vlastnímu číslu 2 odpovídají dva vlastní vektory, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vlastní vektory, využití

Vlastní čísla a vlastní vektory jsou využívány v mnoha oblastech matematiky a statistiky:

- Diagonalizace a rozklady matic
- Systémy diferenciálních rovnic
- Analýza hlavních komponent `https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis`
- Vícerozměrná optimalizace
- Teorie grafů

Vlastní čísla a vlastní vektory, využití

Vlastní čísla a vlastní vektory jsou využívány v mnoha oblastech matematiky a statistiky:

- Diagonalizace a rozklady matic
- Systémy diferenciálních rovnic
- Analýza hlavních komponent `https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis`
- Vícerozměrná optimalizace
- Teorie grafů

Mají nesmírný praktický význam v řadě aplikačních oblastí:

- Zpracování obrazu (rozpoznávání tváří apod.) `https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenface`
- Komprese a dekomprese dat `https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxuYXNsdW5kZXJpY3xneDpkMTI4OTI1NTc4YjRl`
- Analýza tržního rizika, predikce vývoje na burze
- Google Pagerank algoritmus "The $25,000,000,000 Eigenvector"
- Fyzika, stavební inženýrství a další

Vlastní čísla a vlastní vektory diagonální matice

Příklad : Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = diag(3,2,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory diagonální matice

Příklad : Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = diag(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory diagonální matice

Příklad : Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = diag(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka : Každá diagonální matice $\mathbf{D} = diag(d_1,\ d_2, \ldots, d_n)$ má vlastní čísla rovna svým diagonálním prvkům a vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu d_i je příslušný sloupec jednotkové matice $e_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Diagonalizace matice

Definice : Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, jestliže existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n, takové že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Diagonalizace matice

Definice : Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, jestliže existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n, takové že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Nyní bychom chtěli vědět, za jakých podmínek je čtvercová matice diagonalizovatelná, a jak nalezneme matici $\mathbf{P}$. Na obě otázky nám odpoví následující věta:
Věta : Matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná tehdy a jen tehdy, má-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů $x_1, \ldots x_n$. Potom $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, kde $\mathbf{P}$ je matice sestavená ze sloupců $x_1, \ldots, x_n$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou odpovídající vlastní čísla.

Diagonalizace matice

Definice : Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná, jestliže existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární matice $\mathbf{P}$ řádu n, takové že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$.

Nyní bychom chtěli vědět, za jakých podmínek je čtvercová matice diagonalizovatelná, a jak nalezneme matici $\mathbf{P}$. Na obě otázky nám odpoví následující věta:

Věta : Matice $\mathbf{A}$ řádu n je diagonalizovatelná tehdy a jen tehdy, má-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů $x_1, \dots x_n$. Potom $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde $\mathbf{P}$ je matice sestavená ze sloupců $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou odpovídající vlastní čísla.

Poznámka : V ekonomii se často pracuje se symetrickými maticemi. Každá symetrická matice řádu n je diagonalizovatelná, protože má právě n vlastních čísel a jejich odpovídající vlastní vektory jsou nezávislé (lze ukázat, že jsou dokonce vzájemně ortogonální)

Diagonalizace matice, příklad

Příklad : Diagonalizujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonalizace matice, příklad

Příklad : Diagonalizujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Již dříve jsme nalezli $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$ a $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Pro matici $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ spočteme inverzi. Determinant je roven $|\mathbf{P}| = -2$, takže $\mathbf{P}^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Můžeme tedy zapsat:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizace matice, využití

Poznámka : S výhodou lze využít diagonalizace při výpočtu vyšších mocnin matice $\mathbf{A}$. Platí: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Pro $\mathbf{A}^2$ dostaneme $\mathbf{A}^2 = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$, neboť $\mathbf{PDP}^{-1} \cdot \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PD} \cdot \mathbf{DP}^{-1}$. Tento postup můžeme opakovat k vyjádření $\mathbf{A}^m = \mathbf{PD}^m\mathbf{P}^{-1}$. Mocniny diagonální matice $\mathbf{D} = \mathit{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ spočteme snadno, $\mathbf{D}^m = \mathit{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$.

Diagonalizace matice, využití

Poznámka : S výhodou lze využít diagonalizace při výpočtu vyšších mocnin matice $\mathbf{A}$. Platí: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Pro $\mathbf{A}^2$ dostaneme $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}$, neboť $\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Tento postup můžeme opakovat k vyjádření $\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}$. Mocniny diagonální matice $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ spočteme snadno, $\mathbf{D}^m = diag(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$.

Příklad : Pro matici $\mathbf{A}$ z předchozího příkladu spočtěte $\mathbf{A}^4$

Řešení: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, tedy $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{P}\mathbf{D}^4\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^4 & 0 \\ 0 & (-1)^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 81 & 1 \\ 81 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$$

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Označíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots 2}$ a $x = (x_1, x_2)'$, z definice maticového násobení je zřejmé, že funkci $Q(x_1, x_2)$ lze zapsat jako

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'\mathbf{A}x .$$

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Označíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots 2}$ a $x = (x_1, x_2)'$, z definice maticového násobení je zřejmé, že funkci $Q(x_1, x_2)$ lze zapsat jako

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'\mathbf{A}x.$$

Příklad : Určete matici kvadratické formy $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$

Kvadratické formy

V mnoha aplikacích se setkáváme se speciálním případem funkcí dvou proměnných ve tvaru $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Takovou funkci nazýváme kvadratická forma 2 proměnných.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{12} = a_{21}$ (kdyby byly koeficienty různé, lze je oba nahradit výrazem $(a_{12} + a_{21})/2$ protože $x_1x_2 = x_2x_1$).

Označíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots 2}$ a $x = (x_1, x_2)'$, z definice maticového násobení je zřejmé, že funkci $Q(x_1, x_2)$ lze zapsat jako

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'\mathbf{A}x.$$

Příklad : Určete matici kvadratické formy $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$

Řešení: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix}$

Kvadratické formy

Uveďme obecnou definici kvadratické formy pro případ n proměnných:
Definice : Kvadratickou formou n proměnných nazveme funkci $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \ldots n$. Symetrickou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ nazýváme maticí kvadratické formy.

Poznámka : Při označení $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ lze opět psát $Q(x_1, \ldots, x_n) = x' \mathbf{A} x$

Kvadratické formy

Uveďme obecnou definici kvadratické formy pro případ n proměnných:
Definice : Kvadratickou formou n proměnných nazveme funkci $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \ldots n$. Symetrickou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ nazýváme maticí kvadratické formy.

Poznámka : Při označení $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ lze opět psát $Q(x_1, \ldots, x_n) = x' \mathbf{A} x$

Příklad : Zapište kvadratickou formu
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1 x_3 + x_2^2 - 4x_2 x_3 + 8x_3^2$ maticově.

Kvadratické formy

Uveďme obecnou definici kvadratické formy pro případ n proměnných:
Definice : Kvadratickou formou n proměnných nazveme funkci $Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,\dots n$. Symetrickou matici $\mathbf{A}=(a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ nazýváme maticí kvadratické formy.

Poznámka : Při označení $x=(x_1,\dots,x_n)'$ lze opět psát $Q(x_1,\dots,x_n)=x'\mathbf{A}x$

Příklad : Zapište kvadratickou formu
$Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+6x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3+8x_3^2$ maticově.

Řešení: $Q(x)=x'\mathbf{A}x$, kde $x=(x_1,x_2,x_3)'$ a $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&1&-2\\3&-2&8\end{pmatrix}$

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Řešení: Výraz $-x_1^2 - x_2^2$ je vždy nekladný a pokud je alespoň jedna složka nenulová, tak je dokonce záporný. Forma Q_1 je tedy negativně definitní.

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Řešení: Výraz $-x_1^2 - x_2^2$ je vždy nekladný a pokud je alespoň jedna složka nenulová, tak je dokonce záporný. Forma Q_1 je tedy negativně definitní. Výraz $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ lze upravit na $(x_1 - x_2)^2$, což nabývá pouze nezáporných hodnot, ale může být rovno nule např. pro $x_1 = x_2 = 1$. Kvadratická forma Q_2 je tedy pozitivně semidefinitní

Definitnost kvadratické formy

V praktických úlohách nás často zajímá, co musí splňovat koeficienty, aby kvadratická forma "neměnila znaménko".

Definice : Kvadratickou formu $Q(x)$ nazýváme

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \forall$ nenulové $x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q(x) > 0$ a $Q(y) < 0$.

Příklad : Určete definitnost kvadratických forem $Q_1 = -x_1^2 - x_2^2$, $Q_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $Q_3 = x_1^2 - x_2^2$

Řešení: Výraz $-x_1^2 - x_2^2$ je vždy nekladný a pokud je alespoň jedna složka nenulová, tak je dokonce záporný. Forma Q_1 je tedy negativně definitní.
Výraz $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ lze upravit na $(x_1 - x_2)^2$, což nabývá pouze nezáporných hodnot, ale může být rovno nule např. pro $x_1 = x_2 = 1$.
Kvadratická forma Q_2 je tedy pozitivně semidefinitní
Výraz $x_1^2 - x_2^2$ může nabývat kladné hodnoty (např. pro $x_1 = 1,\ x_2 = 0$) i záporné hodnoty (např. pro $x_1 = 0,\ x_2 = 1$). Forma Q_3 je tedy indefinitní.

Definitnost kvadratické formy dvou proměnných

Příklad : Určete definitnost kvadratické formy $Q = 5x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$.

Definitnost kvadratické formy dvou proměnných

Příklad : Určete definitnost kvadratické formy $Q = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Řešení: Doplníme první dva členy výrazu na čtverec:
$Q = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2) + x_2^2 = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2 + \frac{1}{25}x_2^2 - \frac{1}{25}x_2^2) + x_2^2 =$
$5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 - \frac{1}{5}x_2^2 + x_2^2 = 5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{4}{5}x_2^2.$
Vidíme, že koeficienty u obou kvadratických výrazů jsou kladné, forma je tedy pozitivně definitní.

Definitnost kvadratické formy dvou proměnných

Příklad : Určete definitnost kvadratické formy $Q = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Řešení: Doplníme první dva členy výrazu na čtverec:
$Q = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2) + x_2^2 = 5(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2 + \frac{1}{25}x_2^2 - \frac{1}{25}x_2^2) + x_2^2 =$
$5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 - \frac{1}{5}x_2^2 + x_2^2 = 5(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{4}{5}x_2^2$.
Vidíme, že koeficienty u obou kvadratických výrazů jsou kladné, forma je tedy pozitivně definitní.
Pokud bychom provedli postup doplnění na čtverec pro formu s obecnými koeficienty, dostali bychom následující pravidlo:
Věta : Kvadratická forma $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ je

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0,\ a_{22} \geq 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow a_{11} > 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow a_{11} \leq 0,\ a_{22} \leq 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow a_{11} < 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium

K uvedení kritéria pro rozhodnutí o definitnosti kvadratické formy potřebujeme připomenout pojem vedoucích hlavních minorů matice **A**. Vedoucím hlavním minorem řádu k rozumíme determinant D_k submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců matice **A**. Na obrázku vidíme barevně jednotlivé submatice naznačeny.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium

K uvedení kritéria pro rozhodnutí o definitnosti kvadratické formy potřebujeme připomenout pojem vedoucích hlavních minorů matice **A**. Vedoucím hlavním minorem řádu k rozumíme determinant D_k submatice vytvořené z prvních k řádků a sloupců matice **A**. Na obrázku vidíme barevně jednotlivé submatice naznačeny.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nyní stačí určit znaménka vedoucích hlavních minorů matice **A** příslušné formě Q.

1. Jestliže $D_1 > 0,\ D_2 > 0, \dots,\ D_n > 0$, je Q pozitivně definitní.
2. Jestliže $D_1 < 0,\ D_2 > 0, \dots,\ (-1)^n D_n > 0$, je Q negativně definitní.

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy
$Q = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy
$Q = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

Řešení: Matice formy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ má řídící hlavní minory

$$D_1 = 3,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,\quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 3$$

$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0$, tedy forma Q je pozitivně definitní.

Definitnost kvadratické formy a vlastní čísla

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy s maticí $D = diag(-1, -4, -5)$.

Definitnost kvadratické formy a vlastní čísla

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy s maticí $D = diag(-1, -4, -5)$.

Máme-li čtvercové matice $\mathbf{A},\ \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární, pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ mají stejná vlastní čísla. Toto důležité tvrzení nám umožní rozhodnout o definitnosti matice na základě její diagonalizace.

Definitnost kvadratické formy a vlastní čísla

Příklad : Rozhodněte o definitnosti formy s maticí $D = diag(-1, -4, -5)$.

Máme-li čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární, pak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ mají stejná vlastní čísla. Toto důležité tvrzení nám umožní rozhodnout o definitnosti matice na základě její diagonalizace.

Věta : Pro kvadratickou formu $Q(x)$ se symetrickou maticí $\mathbf{A}$, která má vlastní čísla $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$, platí, že tato forma je:

- pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
- pozitivně definitní $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$
- negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$
- negativně definitní $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$
- indefinitní $\Leftrightarrow$ má kladná i záporná vlastní čísla.