

11. seminář: Diferenční rovnice a systémy rovnic

Příklad 1: Najděte řešení následujících diferenčních rovnic s danou počáteční hodnotou x_0 :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_{t+1} = 2x_t + 4, & x_0 = 1 \\ \text{c) } 2x_{t+1} + 3x_t + 2 = 0, & x_0 = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{b) } 3x_{t+1} = x_t + 2, & x_0 = 2 \\ \text{d) } x_{t+1} - x_t + 3 = 0, & x_0 = 3 \end{array}$$

Příklad 2: Předpokládejme, že v čase $t = 0$ si vypůjčíte \$100000 s pevnou úrokovou sazbou $r = 7\%$ za jeden rok. Předpokládá se, že budete platit 30 stejných splátek pro dobu třiceti let, takže po $n = 30$ letech bude hypotéka zaplácena. Jaká je výše splátky?

Příklad 3: Dokažte přímou substitucí, že následující funkce proměnné t jsou řešením diferenčních rovnic

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_t = A + B2^t & x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0, \\ \text{b) } x_t = A3^t + B4^t & x_{t+2} - 7x_{t+1} + 12x_t = 0 \\ \text{c) } x_t = A + Bt & x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0 \\ \text{d) } x_t = A3^t + B4^t & x_{t+2} - 7x_{t+1} + 12x_t = 0 \end{array}$$

Příklad 4: Najděte obecné řešení diferenčních rovnic

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_{t+2} - 6x_{t+1} + 8x_t = 0 & \text{b) } x_{t+2} - 8x_{t+1} + 16x_t = 0, \\ \text{c) } x_{t+2} + 2x_{t+1} + 3x_t = 0 & \text{d) } 3x_{t+2} + 2x_t = 4 \end{array}$$

Příklad 5: Najděte řešení systému diferenčních rovnic s danou počáteční podmínkou

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_{t+1} = 2y_t, & x_0 = 1 \\ & y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t, & y_0 = 1 \\ \text{b) } x_{t+1} = -y_t - z_t + 1, & x_0 = 0 \\ & y_{t+1} = -x_t - z_t + 1, & y_0 = 0 \\ & z_{t+1} = -x_t - y_t + 2t, & z_0 = 1 \end{array}$$