3. seminář: Funkce více proměnných: gradient, směrová derivace, Taylorův polynom

Příklad 1: Určete symetrickou matici **A**, která je určena kvadratickou formou.

a) $x^2 + 2xy + y^2$ b) $ax^2 + bxy + cy^2$ c) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$

Příklad 2: Pomocí Sylvestrova kritéria rozhodněte o definitnosti kvadratické formy (s využitím sw ověřte také dle znamének vlastních čísel):

a) $2x^2 - 2xy + y^2$ b) $-3x^2 + 8xy - 6y^2$ c) $-x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 4x_2^2 + 6x_3^2$

Příklad 3: Vypočítejte gradienty všech následujících funkcí v zadaných bodech.

a) $f(x, y) = y^2 + xy$ v bodě $[2, 1]$

b) $g(x, y, z) = xe^{xy} - z^2$ v bodě $[0, 0, 1]$

c) $h(x, y, z) = e^x + e^{2y} + e^{3z}$ v bodě $[0, 0, 0]$

d) $k(x, y, z) = e^{x+2y+3z}$ v bodě $[0, 0, 0]$

Příklad 4: Vypočítejte směrovou derivaci následujících funkcí v daném bodě a v daném směru.

a) $f(x, y) = 2x + y - 1$ v bodě $[2, 1]$ a ve směru daném vektorem $(1, 1)$

b) $g(x, y, z) = xe^{xy} - xy - z^2$ v bodě $[0, 1, 1]$ a ve směru daném vektorem $(1, 1, 1)$

Příklad 5: Najděte kvadratickou aproximaci (Taylorův polynom druhého řádu) v bodě $[0, 0]$ pro funkce

a) $f(x, y) = e^{xy}$

b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2y)$

d) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$