4. seminář: Konvexní množiny, konvexní funkce, optimalizace bez omezení

Příklad 1: Načrtněte uvedené množiny a rozhodněte, zda jsou konvexní:

a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 2\}$

b) $\{(x,y) : x^2 + y^2 > 8\}$

c) $\{(x,y) : xy \leq 1\}$

d) $\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$

e) $\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 1\}$

f) $\{(x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2\}$

Příklad 2: Rozhodněte o konvexitě/konkávnosti uvedených funkcí

a) $z = x + y - e^x - e^{x+y}$

b) $z = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{y}{2}$

c) $w = (x + 2y + 3z)^2$

Příklad 3: Dokažte, že funkce $g(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y$ definovaná pro $x > 0, y > 0$ je ryze konvexní a najděte její minimum.

Příklad 4: Funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$$

definovaná na $\mathbb{R}^3$ má jeden stacionární bod. Ukažte, že tento stacionární bod je bodem lokálního minima.

Příklad 5: Nechť $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ je funkce definovaná pro každé $x, y \in \mathbb{R}^2$.

a) Ukažte, že body $[0,0]$ a $[1,1]$ jsou jediné stacionární body.

b) Ověřte definitnost Hessovy matice v těchto bodech

c) Určete, jakého typu jednotlivé stacionární body jsou

Příklad 6: Určete stacionární body (a jejich typy) následujících funkcí.

a) $f(x, y, z) = x^2 + x^2y + y^2z + y^2 + z^2 - 4z$

b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20x_2 + 48x_3 + 6x_4 + 8x_1x_2 - 4x_1^2 - 12x_3^2 - x_4^2 - 4x_2^3$

Příklad 7: Firma produkuje dva výrobky, označme je A a B. Náklady na den jsou

$$C(x, y) = 0,04x^2 - 0,01xy + y^2 + 4x + 2y + 500,$$

kde x je počet jednotek A a y je počet jednotek B ($x > 0, y > 0$). Firma prodává výrobek A za 13 Kč a výrobek B za 8 Kč. Najděte funkci zisku $\pi(x, y)$ a hodnoty x a y pro které nastává maximální zisk.