5. seminář: Optimalizace s omezením ve tvaru rovnosti, Lagrangeova funkce

Příklad 1:

a) Uvažujte problém minimalizace $x^2 + y^2$ za podmínky $x + 2y = a$ (a je konstanta). Řešte problém tak, že ho transformujete na jednu proměnou.

b) Vysvětlete řešení studiem vrstevnic funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ a grafu přímky $x + 2y = a$. Můžete popsat problém geometricky? Má odpovídající maximalizační problém řešení?

Příklad 2: Řešte následující problémy převedením na jednorozměrnou optimalizaci.

a) max $10x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ za podmínky $2x + 4y = m$.

b) max $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ za podmínky $50\,000x + 0,08y = 1\,000\,000$.

c) max $12x\sqrt{y}$ za podmínky $3x + 4y = 12$.

Příklad 3: Předpokládejme, že cena jednotky prvního výrobku je \$2 a že cena jednotky druhého výrobku je \$4. Osoba s užitkovou funkcí

$$u(x, y) = 100xy + x + 2,$$

kde x, y jsou množství nakoupených výrobků, má rozpočet \$1000. Vyřešte problém maximalizace užitku, je-li třeba utratit celou částku.

Příklad 4: Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů řešte problém:

a) max xy za podmínky $x + 3y = 24$.

b) min $-40Q_1 + Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 20Q_2 + Q_2^2$ za podmínky $Q_1 + Q_2 = 15$.

c) max $U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\ln(1 + x_1) + \frac{1}{4}\ln(1 + x_2)$ s podmínkou $2x_1 + 3x_2 = m$. (za předpokladu $m \geq 4$)

d) max $100 - x^2 - y^2 - z^2$ s podmínkou $x + 2y + z = a$.

Příklad 5:

a) Řešte problém
max $f(x, y) = 24x - x^2 + 16y - 2y^2$ za podmínky $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 44$.

b) Jaká je přibližná změna v optimální hodnotě funkce $f(x, y)$, zvýší-li se pravá strana omezení o 1?

Příklad 6:

a) Řešte problém
max(min) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ za podmínky $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$. (Graf omezení je povrch elipsoidu v $\mathbb{R}^3$. Tato množina je uzavřená a ohraničená.)

b) Předpokládané omezení je změněno na $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1,02$. Jaká je aproximace změny v maximální hodnotě $f(x, y, z)$?

Příklad 7: Řešte problém

a) max(min) $x + y$ za podmínek $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

b) max $x + 4y + z$ s podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = 216$ a $x + 2y + 3z = 0$.

c) max $x^2 + y^2 + z^2$ s podmínkami $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ a $x + 3y + 2z = 0$.