Seminář 5 **Příklad 1: a) Uvažujte problém minimalizace funkce** $f := (x,y) \to x^2 + y^2$

$$(x,y) \to x^2 + y^2$$

za podmínky x + 2y = a (**a je konstanta). Řešte problém tak, že ho transformujete na jednu proměnou.**

solve(x + 2 y = a, *y*);

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$$

algsubs (*y* = %, f(x, y));

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\,a + \frac{1}{4}a^2$$

extrema(%, { }, *x*,'*bod*')

$$\left\{\frac{1}{5}a^2\right\}$$

bod

$$\left\{\left\{x = \frac{1}{5}a\right\}\right\}$$

b)Vysvětlete řešení studiem vrstevnic funkce f(x, y) = x^2 + y^2**a grafu přímky** x + 2y = a**. Můžete popsat problém geometricky? Má odpovídající maximalizační problém řešení?**

with (*plots*) : *graf1* := *contourplot* (*x*^2 + *y*^2, *x* =−5 ..5, *y* =−5 ..5, *contours* = 30)

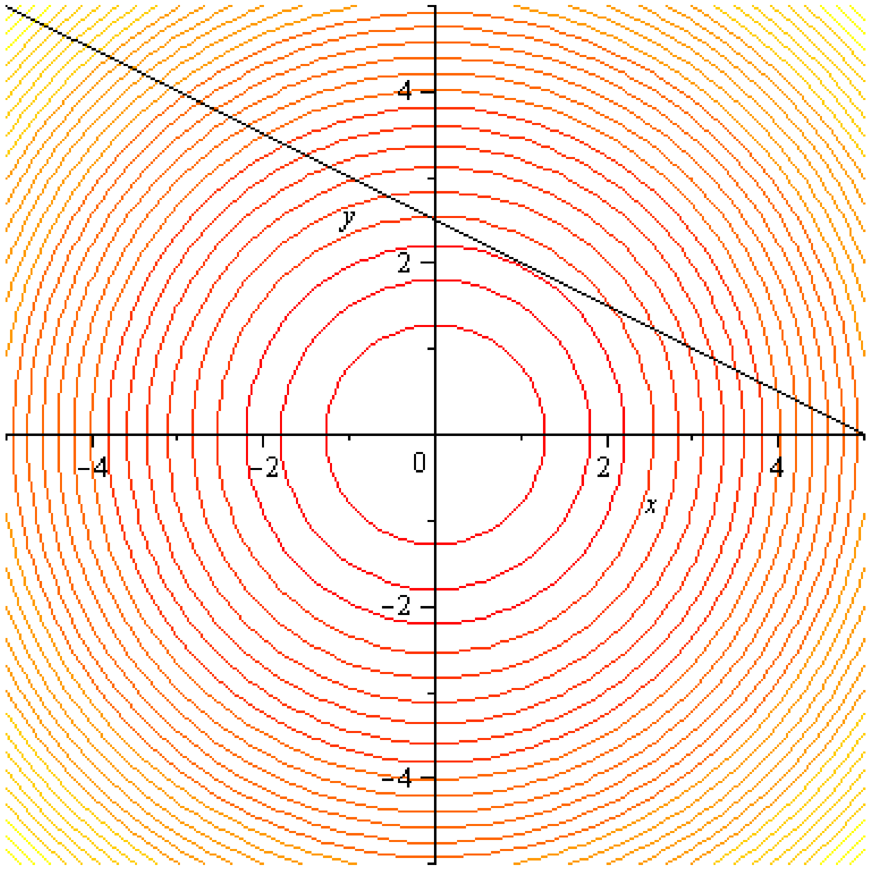
$$PLOT(\ldots)$$

graf2 := *implicitplot*(*x* + 2 *y* = 5, *x* =−5 ..5, *y* =−5 ..5, *color* ='*black*')

$$PLOT(\ldots)$$

Vykreslíme například pro a=5

display([*graf1* , *graf2*]);



Příklad 2: Řešte následující problémy převedením na jednorozměrnou optimalizaci.

a) max $F := (x, y) \rightarrow 4\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$

$$(x, y) \rightarrow 4\sqrt{x}\, y^{1/3}$$

za podmínky $2x + 4y = m$

solve(2*x + 4·y = m, y);

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}m$$

algsubs$\left(y = \%, 4\sqrt{x}\sqrt[3]{y} \right)$;

$$4\sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}m\right)^{1/3}$$

extrema(%, { }, x,'*bod*')

$$\left\{\frac{2}{5}\sqrt{3}\; 10^{1/6}\, m^{5/6}\right\}$$

bod

$$\left\{\left\{x = \frac{3}{10}\, m\right\}\right\}$$

b) max $F := (x, y) \to \sqrt{x}\,\sqrt{y}$

$$(x, y) \to \sqrt{x}\,\sqrt{y}$$

za podmínky 50000 x + 0,08 y = 1000000.

$solve(\ 50000\mathrm{x} + 0.08\,\mathrm{y} = 1000000, y\ );$

$$-6.25000\,10^5\,x + 1.2500000\,10^7$$

$algsubs(\ y = \%, \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ );$

$$\sqrt{x}\,\sqrt{-6.25000\,10^5\,x + 1.2500000\,10^7}$$

$extrema(\%, \{\ \}, x, 'bod')$

$$\{7905.694150\}$$

bod

$$\{\{x = 10.\}\}$$

c) max $F := (x, y) \to 12\,x\,\sqrt{y}$

$$(x, y) \to 12\,x\,\sqrt{y}$$

za podmínky 3x + 4y = 12

$solve(\ 3\,\mathrm{x} + 4\,\mathrm{y} = 12, y\ );$

$$-\frac{3}{4}\,x + 3$$

$algsubs(\ y = \%, \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ );$

$$12\,x\,\sqrt{-\frac{3}{4}\,x + 3}$$

$extrema(\%, \{\ \}, x, 'bod')$

$$\{32\}$$

bod

$$\left\{\left\{x = \frac{8}{3}\right\}\right\}$$

Příklad 3: Předpokládejme, že cena jednotky prvního výrobku je 2$ a že cena jednotky druhého výrobku je 4$. Osoba s užitkovou funkcí $u := (x, y) \to 100\,x\,y + x + 2$

$$(x, y) \to 100\,x\,y + x + 2$$

, kde x, y**jsou množství nakoupených výrobků, má rozpočet 1000$, který celý vynaloží na uvedené výrobky. Vyřešte problém maximalizace užitku.**

$extrema(\ u(x, y), \{2\ \ x + 4\,y\ = 1000\}, \{x, y\}, 'bod');$

$$\left\{\frac{625050401}{200}\right\}$$

bod

$$\left\{\left\{y=\frac{24999}{200}, x=\frac{25001}{100}\right\}\right\}$$

Příklad 4: Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů řešte problém:

a) max xy

za podmínky $x + 3y = 24$

$with(Student[MultivariateCalculus]) : LagrangeMultipliers(x\,y, [x + 3\,y - 24], [x, y], output = detailed);$

$$\left[x=12, y=4, \lambda_1=4, x\,y=48\right]$$

b) min $-40Q1 + Q1^2 - 2Q1\,Q2 - 20Q2 + Q2^2$

za podmínky $Q1 + Q2 = 15$

$LagrangeMultipliers(-40\,Q1 + Q1^2 - 2\,Q1\,Q2 - 20\,Q2 + Q2^2, [Q1 + Q2 - 15], [Q1, Q2], output = detailed);$

$$\left[Q1=10, Q2=5, \lambda_1=-30, -40\,Q1+Q1^2-2\,Q1\,Q2-20\,Q2+Q2^2=-475\right]$$

;

c) max $U(x1, x2)= ln(1 + x1)/2 + ln(1 + x2)/4$

za podmínky $2x1 + 3x2 = m$

$LagrangeMultipliers(\ln(1 + x1)/2 + \ln(1 + x2)/4, [2\,x1 + 3\,x2 - m], [x1, x2], output = detailed);$

$$\left[x1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}m, x2=-\frac{4}{9}+\frac{1}{9}m, \lambda_1=\frac{3}{4\,(5+m)}, \frac{1}{2}\ln(1+x1)+\frac{1}{4}\ln(1+x2)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}m\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}m\right)\right]$$

d) max $100 - x^2 - y^2 - z^2$

za podmínky $x + 2y + z = a$

```
LagrangeMultipliers(100 - x^2 - y^2 -z^2, [x + 2 y + z-a], [x,
    y, z], output = detailed);
```

$$\left[x=\frac{1}{6}a,\ y=\frac{1}{3}a,\ z=\frac{1}{6}a,\ \lambda_1=-\frac{1}{3}a,\ 100-x^2-y^2-z^2=100-\frac{1}{6}a^2\right]$$

Příklad 5: a) Řešte problémmax f(x, y) = 24x - x^2 + 16y - 2y^2

za podmínky

g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 44

```
with(Student[MultivariateCalculus]) : LagrangeMultipliers(24 x - x
    ^2 + 16 y - 2 y^2, [x^2 + 2 y^2 -44], [x, y], output
    = detailed);
```

$$\left[x=6,\ y=2,\ \lambda_1=1,\ 24x-x^2+16y-2y^2=132\right],\ \left[x=-6,\ y=-2,\ \lambda_1=-3,\ 24x-x^2+16y-2y^2=-220\right]$$

b) Jaká je přibližná změna v optimální hodnotě funkce f(x, y)**, zvýší-li se pravá strana omezení o 1?**

Optimální hodnota účelové funkce se změní přibližně o λ*1=1

Příklad 6: a) Řešte problémmax(min) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z

za podmínky

g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1

```
with(Student[MultivariateCalculus]) : LagrangeMultipliers(x^2 + y
    ^2 + z, [x^2 + 2 y^2 + 4 z^2 - 1], [x, y, z], output = detailed)
    ;
```

$$\left[x=0, y=0, z=\frac{1}{2}, \lambda_1=\frac{1}{4}, x^2+y^2+z=\frac{1}{2}\right], \left[x=0, y=0, z=-\frac{1}{2}, \lambda_1=-\frac{1}{4}, x^2+y^2+z=-\frac{1}{2}\right], \left[x=0, y=\frac{1}{2}\operatorname{RootOf}\left(-3+2\_Z^2, label=\_L4\right), z=\frac{1}{4}, \lambda_1=\frac{1}{2}, x^2+y^2+z=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\operatorname{RootOf}\left(-3+2\_Z^2, label=\_L4\right)^2\right], \left[x=\frac{1}{4}\operatorname{RootOf}\left(\_Z^2-15, label=\_L6\right), y=0, z=\frac{1}{8}, \lambda_1=1, x^2+y^2+z=\frac{1}{16}\operatorname{RootOf}\left(\_Z^2-15, label=\_L6\right)^2+\frac{1}{8}\right]$$

b) Předpokládané omezení je změněno na x^2 +2y^2 + 4z^2 = 1,02. Jaká je aproximace změny v maximální hodnotě f(x, y, z)?

Optimální hodnota účelové funkce se změní přibližně o λ*0,02=(-1/4)*0,02=-0,005 v případě minimalizace a λ*0,02=(1)*0,02=0,02 v případě maximalizace

$LagrangeMultipliers\,(x\verb|^|2+y\verb|^|2+z, [x\verb|^|2+2y\verb|^|2+4z\verb|^|2-1.02], [x,y,z], output=detailed);$

$$[x=0., y=0., z=0.5049752469, \lambda_1=0.2475368857, x^2+y^2+z=0.5049752469], [x=0., y=0., z=-0.5049752469, \lambda_1=-0.2475368857, x^2+y^2+z=-0.5049752469], [x=0., y=0.6204836823, z=0.2500000000, \lambda_1=0.5000000000, x^2+y^2+z=0.6350000000], [x=0., y=-0.6204836823, z=0.2500000000, \lambda_1=0.5000000000, x^2+y^2+z=0.6350000000], [x=0.9785192895, y=0., z=0.1250000000, \lambda_1=1., x^2+y^2+z=1.082500000], [x=-0.9785192895, y=0., z=0.1250000000, \lambda_1=1., x^2+y^2+z=1.082500000]$$

Příklad 7: Řešte problém

a) min(max) $g := (x,y,z) \to x+y$

$$(x,y,z) \to x+y$$

za podmínek $x\verb|^|2+2y\verb|^|2+z\verb|^|2=1$

$x+y+z=1$

$extrema(\ g(x,y,z), \{x\text{^}2 + 2\,y\text{^}2 + z\text{^}2 = 1, x + y + z = 1\}, \{x, y, z\}, 'bod');$

$$\left\{0, \frac{6}{5}\right\}$$

bod

$$\left\{\left\{z = -\frac{1}{5}, y = \frac{2}{5}, x = \frac{4}{5}\right\}, \{y = 0, x = 0, z = 1\}\right\}$$

b) max $g := (x, y, z) \rightarrow x + 4\,y + z$

$$(x, y, z) \rightarrow x + 4\,y + z$$

s podmínkami

$x\text{^}2 + y\text{^}2 + z\text{^}2 = 216$
$x + 2\,y + 3\,z = 0$

$extrema(\ g(x,y,z), \{x\text{^}2 + 2\,y\text{^}2 + z\text{^}2 = 216, x + 2\cdot y + 3\cdot z = 1\}, \{x, y, z\}, 'bod');$

$$\left\{\frac{1}{6}\sqrt{36274} + \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{36274} + \frac{2}{3}\right\}$$

bod

$$\left\{\left\{x = -\frac{1}{84}\sqrt{36274} + \frac{1}{12}, y = -\frac{1}{21}\sqrt{36274} + \frac{1}{12}, z = \frac{1}{28}\sqrt{36274} + \frac{1}{4}\right\}, \left\{x = \frac{1}{84}\sqrt{36274} + \frac{1}{12}, y = \frac{1}{21}\sqrt{36274} + \frac{1}{12}, z = -\frac{1}{28}\sqrt{36274} + \frac{1}{4}\right\}\right\}$$

c) max $g := (x, y, z) \rightarrow x\text{^}2 + y\text{^}2 + z\text{^}2$

$$(x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$$

s podmínkami

$x\text{^}2 + y\text{^}2 + 4\,z\text{^}2 = 1$
$x + 3\,y + 2\,z = 0$

$extrema(\ g(x,y,z), \{x\text{^}2 + 2\,y\text{^}2 + 4\ z\text{^}2 = 1, x + 3\cdot y + 2\cdot z = 1\}, \{x, y, z\}, 'bod');$

$$\left\{1, \frac{1}{4}\right\}$$

bod

$$\left\{\left\{y=0, x=0, z=\frac{1}{2}\right\}, \left\{x=-\frac{8213}{27482}+\frac{111}{27482}\sqrt{9097}, y=\frac{7032}{13741}+\frac{2}{13741}\sqrt{9097}, z=-\frac{6497}{54964}-\frac{123}{54964}\sqrt{9097}\right\}, \left\{y=\frac{7032}{13741}-\frac{2}{13741}\sqrt{9097}, z=-\frac{6497}{54964}+\frac{123}{54964}\sqrt{9097}, x=-\frac{8213}{27482}-\frac{111}{27482}\sqrt{9097}\right\}, \{y=0, z=0, x=1\}\right\}$$