6. seminář: Optimalizace s omezením ve tvaru nerovností, lineární programování

Příklad 1: Dokončení úloh z minulého cvičení

Příklad 2: Použitím grafické metody řešte problém lineárního programování:

a) $max\ \ 3x_1 + 4x_2$ s podmínkami $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

b) $min\ \ 10u_1 + 27u_2$ s podmínkami $\begin{cases} u_1 + 3u_2 & \geq & 11 \\ 2u_1 + 5u_2 & \geq & 20 \end{cases}$ $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$

Příklad 3: Použitím grafické metody řešte problém lineárního programování:

a) $max\ \ 2x_1 + 5x_2$ s podmínkami $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ 7x_1 - 2x_2 & \leq & 14 \\ x_1 + \ \ x_2 & \leq & 5 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

b) $max\ \ 8x_1 + 9x_2$ s podmínkami $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 13 \\ x_1 + \ \ x_2 & \leq & 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

c) $max\ \ -2x_1 + x_2$ s podmínkami $0 \leq x_1 - 3x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Příklad 4: Uvažujme množinu A všech $[x_1, x_2]$ splňujících

$$-2x_1 + x_2 \leq 2, \qquad x_1 + 2x_2 \leq 8, \qquad x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Řešte následující problémy s přípustnou množinou A:

a) $max\ x_2$ b) $max\ x_1$ c) $max\ 3x_1 + 2x_2$

d) $max\ x_1 - 2x_2$ e) $max\ 2x_1 + 4x_2$ f) $max\ -3x_1 - 2x_2$

Příklad 5: Existuje řešení následujícího problému?

$max\ \ x_1 + x_2$ s podmínkami $\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 + 3x_2 & \leq & 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Existuje řešení pro účelovou funkci $z = -x_1 - x_2$?

Příklad 6: Řešte následující problém graficky

$max\ \ 2x + 7y$ s podmínkami $\begin{cases} 4x + 5y & \leq & 20 \\ 3x + 7y & \leq & 21 \end{cases}$ $x \geq 0,\ y \geq 0$

a) Zapište duální problém a vyřešte ho graficky.

b) Jsou si hodnoty účelových funkcí rovny?

Příklad 7: Firma vyrábí malé a střední televizní sady. Zisk z malé sady je 400 a zisk ze střední sady je 500. Každý televizor při výrobě projde třemi divizemi. Každý malý televizor je při výrobě 2 hodiny v první oddělení, 1 hodinu v druhém oddělení a 1 hodinu ve třetím oddělení. Pro střední televizní sadu jsou tyto časy 1, 4 a 2, při zachovaném pořadí oddělení. Předpokládejme, že první dvě oddělení mají kapacitu nejvýše 16 hodin denně a třetí oddělení jen 11 hodin denně. Označme x_1 malé televizní sady a x_2 střední televizní sady, které jsou produkovány za den.

a) Ukažte, že pro maximální zisk musí firma řešit následující problém:

$$max\ \ 400x_1{+}500x_2 \qquad \text{s podmínkami} \qquad \begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 & \leq & 16 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 16 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 11 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

b) Řešte problém graficky.

c) V případě, že by firma mohla zvýšit svoji kapacitu o jednu hodinu denně v jednom ze tří oddělení, ve kterém by to mělo být?

Příklad 8: Firma vyrábí dva výrobky A a B. firma vydělává 300 za jednu jednotku výrobku A a 200 za jednu jednotku výrobku B. Existují tři fáze výrobního procesu. Výrobek A prochází 6 hodin procesem přípravy, 4 hodiny výrobním procesem a 5 hodin balícím procesem. Výrobek B prochází 3 hodin procesem přípravy, 6 hodiny výrobním procesem a 5 hodin balícím procesem. Firma má na výrobu k dispozici celkem 54 hodin v první fázi, 48 ve druhé a 50 ve třetí fázi.

a) Formulujte a řešte problém lineárního programování pro maximalizaci zisku, který je omezen danými limity.

b) Zapište duální problém.

Příklad 9: Řešte problém lineárního programování:

$$max\ \ x + 2y \qquad \text{s podmínkami} \qquad \begin{cases} x + y & \leq & 4 \\ -x + y & \leq & 1 \\ 2x - y & \leq & 3 \end{cases} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Zapište také duální problém.