

9. seminář: Separovatelné a lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Příklad 1:

- a) Ukažte, že $x(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t$ je pro libovolnou hodnotu konstanty C řešením diferenciální rovnice $\dot{x}(t) + x(t) = e^t$.
- b) Ukažte, že $x(t) = Ct^2$ je pro libovolnou hodnotu konstanty C řešením diferenciální rovnice $t\dot{x} = 2x$. Najděte partikulární řešení procházející bodem $(1, 2)$.

Příklad 2:

Rozhodněte, které z diferenciálních rovnic jsou separovatelné:

- a) $\dot{x} = x^2 - 1$ b) $\dot{x} = xt + t$ c) $\dot{x} = xt + t^2$
d) $x\dot{x} = e^{x+t}\sqrt{1+t^2}$ e) $\dot{x} = \sqrt[4]{t^2+x}$ f) $\dot{x} = F(t) + G(x)$

Příklad 3:

Řešte následující diferenciální rovnice:

- a) $\dot{x} = t^3 - t$ b) $\dot{x} = te^t - t$ c) $e^x\dot{x} = t + 1$

Příklad 4:

Najděte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic. Také najděte partikulární řešení procházející zadanými body.

- a) $t\dot{x} = x(1-t)$, $(t_0, x_0) = (1, 1/e)$
b) $(1+t^3)\dot{x} = t^2x$, $(t_0, x_0) = (0, 2)$
c) $x\dot{x} = t$, $(t_0, x_0) = (\sqrt{2}, 1)$
d) $e^{2t}\dot{x} - x^2 - 2x = 1$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$

Příklad 5:

Najděte obecné řešení rovnice. Určete rovnovážný stav rovnice a posuďte jeho stabilitu. Také načrtněte typickou integrální křivku.

- a) $\dot{x} + x = 10$ b) $\dot{x} - 3x = 27$
c) $\dot{x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$ d) $4\dot{x} + 5x = 100$

Příklad 6:

Nalezněte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic a pro každou z nich určete integrální křivku pro $(t_0, x_0) = (0, 1)$.

- a) $\dot{x} - 3x = 5$ b) $3\dot{x} + 2x + 16 = 0$
c) $\dot{x} = x + t$ d) $\dot{x} + 2x = t^2$

Příklad 7:

Najděte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic:

- a) $t\dot{x} + 2x + t = 0$, $t \neq 0$ b) $\dot{x} - \frac{1}{t}x = t$, $t > 0$
c) $\dot{x} - \frac{t}{t^2-1}x = t$, $t > 1$ d) $\dot{x} - \frac{2}{t}x + \frac{2a^2}{t^2} = 0$, $t > 0$