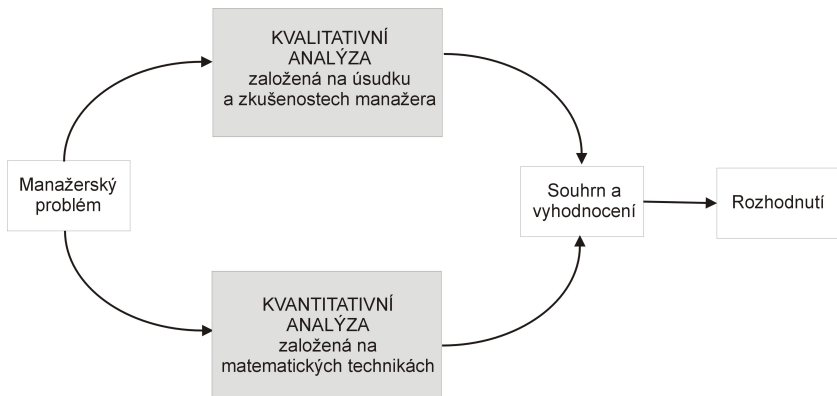


# Kvantitativní metody v rozhodování

Každý manažer je ve své denodenní praxi vystaven řadě rozhodovacích situací a problémů, které může analyzovat ze dvou hledisek:

- buď na základě znalostí a zkušeností (kvalitativní analýza)
- nebo pomocí údajů v numerické podobě a jejich exaktního matematického zpracování (kvantitativní analýza), viz schéma.



# Kvantitativní metody v rozhodování

Ve specifických situacích je samozřejmě možné provádět jen jednu ze zmíněných analýz. Spolehne-li se však pouze na kvalitativní analýzu bez číselných propočtů, závisí výsledek do značné míry na dobrém úsudku manažera. Naopak přílišná důvěra v numerické výsledky může být zavádějící: každé číselné řešení je přesné jen do té míry, jak přesně byl zkonstruován model. Navíc kvantitativní analýza problému může být zdlouhavá a neefektivní v situaci, kdy je třeba přijmout rozhodnutí rychle. Kdy by tedy měl manažer přizvat na pomoc kvantitativní metody?

# Kvantitativní metody v rozhodování

Ve specifických situacích je samozřejmě možné provádět jen jednu ze zmíněných analýz. Spolehne-li se však pouze na kvalitativní analýzu bez číselných propočtů, závisí výsledek do značné míry na dobrém úsudku manažera. Naopak přílišná důvěra v numerické výsledky může být zavádějící: každé číselné řešení je přesné jen do té míry, jak přesně byl zkonstruován model. Navíc kvantitativní analýza problému může být zdlouhavá a neefektivní v situaci, kdy je třeba přijmout rozhodnutí rychle.

Kdy by tedy měl manažer přizvat na pomoc kvantitativní metody? Zejména, je-li problém:

- **složitý**, kdy specialisté mohou manažerovi pomoci prostřednictvím simulace reality vhodným modelem
- **velmi důležitý**, například jde-li o velké peníze a manažer chce mít pro rozhodování solidní podklady
- **nový**, chybí zkušenosti s řešením obdobných problémů
- **opakovaný**, takže použití ověřených kvantitativních procedur šetří čas i prostředky

# Ekonomicko - matematický model

**Modelem** rozumíme určité zobrazení reálného systému. Nikdy nejde o dokonalý obraz skutečnosti, to ani není žádoucí! Správně zkonstruovaný model musí vystihovat pouze ty vlastnosti, které jsou z hlediska řešení problému důležité. Zahrneme-li do modelu všechny detaily, bude složitý, špatně řešitelný a nepřehledný. Na druhou stranu při přílišné snaze o zjednodušení můžou být opomenuty některé významné skutečnosti a vazby. Při modelování je klíčové právě dobré nastavení vztahu mezi reálným světem a modelem.

# Ekonomicko - matematický model

**Modelem** rozumíme určité zobrazení reálného systému. Nikdy nejde o dokonalý obraz skutečnosti, to ani není žádoucí! Správně zkonstruovaný model musí vystihovat pouze ty vlastnosti, které jsou z hlediska řešení problému důležité. Zahrneme-li do modelu všechny detaily, bude složitý, špatně řešitelný a nepřehledný. Na druhou stranu při přílišné snaze o zjednodušení můžou být opomenuty některé významné skutečnosti a vazby. Při modelování je klíčové právě dobré nastavení vztahu mezi reálným světem a modelem. Manažer by měl umět problém dobře

- **formulovat** tak, aby bylo možné k jeho řešení využít kvantitativních metod, a následně výsledky
- **interpretovat** a implementovat do praxe.

S vlastním řešením matematického modelu mohou pomoci experti či specializovaný software. I při možnosti využití výpočetní techniky je však dobré mít přehled o dostupných metodách, abychom v konkrétní situaci uměli vybrat vhodný algoritmus a nastavit jeho parametry.

# Co to je "optimalizace"?

Při optimalizaci řešíme problém výběru "nejlepšího řešení" mezi všemi "možnými řešeními". V každé konkrétní úloze je třeba pojmy uvedené v uvozovkách specifikovat. Všechna možná řešení budeme dále popisovat pomocí množiny  $M$ , kterou nazveme **množina přípustných řešení**, a míru kvality řešení budeme vyjadřovat prostřednictvím funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , která se označuje jako cílová nebo kriteriální nebo též **účelová funkce**. Zadání optimalizační úlohy pak zní:

Najděte prvek  $x^* \in M$  takový, že platí:  $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in M,$

# Co to je "optimalizace"?

Při optimalizaci řešíme problém výběru "nejlepšího řešení" mezi všemi "možnými řešeními". V každé konkrétní úloze je třeba pojmy uvedené v uvozovkách specifikovat. Všechna možná řešení budeme dále popisovat pomocí množiny  $M$ , kterou nazveme množina přípustných řešení, a míru kvality řešení budeme vyjadřovat prostřednictvím funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , která se označuje jako cílová nebo kriteriální nebo též účelová funkce. Zadání optimalizační úlohy pak zní:

Najděte prvek  $x^* \in M$  takový, že platí:  $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in M$ ,

**Pozn.:** Maximalizační úlohu " $f \rightarrow \max$ " lze snadno převést na minimalizační úlohu " $-f \rightarrow \min$ ".

# Co to je "optimalizace"?

Při optimalizaci řešíme problém výběru "nejlepšího řešení" mezi všemi "možnými řešeními". V každé konkrétní úloze je třeba pojmy uvedené v uvozovkách specifikovat. Všechna možná řešení budeme dále popisovat pomocí množiny  $M$ , kterou nazveme množina přípustných řešení, a míru kvality řešení budeme vyjadřovat prostřednictvím funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , která se označuje jako cílová nebo kriteriální nebo též účelová funkce. Zadání optimalizační úlohy pak zní:

Najděte prvek  $x^* \in M$  takový, že platí:  $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in M$ ,

**Pozn.:** Maximalizační úlohu " $f \rightarrow \max$ " lze snadno převést na minimalizační úlohu " $-f \rightarrow \min$ ".

Příklady optimalizačních úloh v ekonomii:



# Co to je "optimalizace"?

Při optimalizaci řešíme problém výběru "nejlepšího řešení" mezi všemi "možnými řešeními". V každé konkrétní úloze je třeba pojmy uvedené v uvozovkách specifikovat. Všechna možná řešení budeme dále popisovat pomocí množiny  $M$ , kterou nazveme množina přípustných řešení, a míru kvality řešení budeme vyjadřovat prostřednictvím funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , která se označuje jako cílová nebo kriteriální nebo též účelová funkce. Zadání optimalizační úlohy pak zní:

Najděte prvek  $x^* \in M$  takový, že platí:  $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in M$ ,

**Pozn.:** Maximalizační úlohu " $f \rightarrow \max$ " lze snadno převést na minimalizační úlohu " $-f \rightarrow \min$ ".

**Příklady optimalizačních úloh v ekonomii:**

- Optimalizace výrobního programu
- Optimalizace portfolia
- Optimální rozdělení práce a řazení pracovních operací
- Minimalizace distribučních nákladů, plánování rozvozních tras a umístění distribučních center
- Minimalizace doby realizace při řízení projektů
- Optimální řízení zásob

# Co je to "optimalizace"?

Z hlediska přípustné množiny rozlišujeme dva typy optimalizačních úloh:

- Je-li přípustným řešením každý bod  $x$   $n$ -rozměrného Euklidova prostoru  $\mathbb{R}^n$ , tj.  $M = \mathbb{R}^n$ , hovoříme o **nepodmíněné optimalizaci**, resp. o volných extrémech. Postup analytického řešení takových úloh je znám ze základního kurzu matematiky
- V opačném případě, tedy je-li  $M \subset \mathbb{R}^n$  hovoříme o **vázaných extrémech**. Jejich existenci pro spojitou funkci na omezené uzavřené množině zaručuje Weierstrassova věta.

Možnosti analytického řešení složitějších úloh (např. když je v úloze mnoho proměnných, komplikovaná hranice přípustné množiny nebo dostaneme nelineární rovnice pro určení stacionárního bodu) jsou však omezené. Proto byly vyvinuty speciální metody pro řešení určitých typů optimalizačních úloh.

# Matematické programování

Pojem **matematické programování** označuje souhrn metod sloužících k optimalizaci předem definovaného kritéria vyjádřeného jako funkce  $n$  proměnných při současném splnění omezujících podmínek zadaných zpravidla ve formě rovností a nerovností. Úlohy matematického programování můžeme rozdělit na úlohy

- **lineárního programování** (dále jen LP), kdy účelová funkce i omezující podmínky jsou lineárními funkcemi proměnných
- **nelineárního programování** (NLP), když výše uvedená podmínka není splněna. Speciálním případem NLP je **kvadratické programování**, kdy účelová funkce je polynom druhého stupně, ale omezující podmínky jsou lineární.

# Matematické programování

Pojem **matematické programování** označuje souhrn metod sloužících k optimalizaci předem definovaného kritéria vyjádřeného jako funkce  $n$  proměnných při současném splnění omezujících podmínek zadaných zpravidla ve formě rovností a nerovností. Úlohy matematického programování můžeme rozdělit na úlohy

- **lineárního programování** (dále jen LP), kdy účelová funkce i omezující podmínky jsou lineárními funkcemi proměnných
- **nelineárního programování** (NLP), když výše uvedená podmínka není splněna. Speciálním případem NLP je **kvadratické programování**, kdy účelová funkce je polynom druhého stupně, ale omezující podmínky jsou lineární.

Dále se zaměříme hlavně na modely LP, ty jsou jednoznačně nejrozšířenější. Proč? Hodně reálných problémů lze dobře formulovat jako úlohu LP, pro jejich rychlé řešení jsou dostupné programové prostředky, atp. V praxi se sice běžně vyskytují nelineární vztahy (např. **neproporcionalita**: když cena není konstantní, tak příjem není přímo úměrný prodanému množství, **neaditivita**: objem roztoku není roven součtu objemů výchozích látek, apod.), avšak kvůli nepoměrně větší složitosti postupů NLP bývá často výhodnější použít aproximaci lineárním modelem.

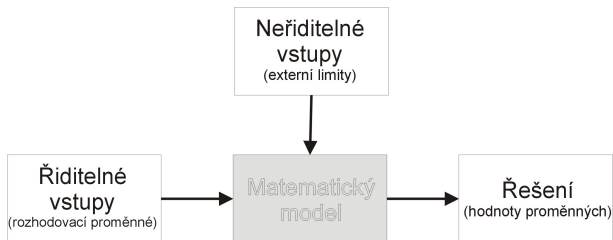
# Lineární programování

Při formulaci úlohy matematického programování je třeba vycházet z dobře popsaného ekonomického modelu.

# Lineární programování

Při formulaci úlohy matematického programování je třeba vycházet z dobře popsaného ekonomického modelu. Je tedy třeba znát:

- cíl, jehož chceme dosáhnout (tedy zvolit **kritérium**: zisk nebo náklady nebo objem výroby, atd. a určit, zda se jej budeme snažit minimalizovat nebo maximalizovat)
- říditelné vstupy, tj. jaké **proměnné** můžeme ovlivňovat za účelem dosažení cíle (počet vyrobených kusů různých typů produktu, velikost převáženého nákladu, atd.)
- neříditelné vstupy neboli **omezení**, která nás limitují (ceny nakupovaných surovin, dispoziční množství zdrojů, kapacita zařízení, atd.)



# Úloha LP - Optimalizace výrobního programu

Veškerý další výklad problematiky lineárního programování bude ilustrován na následující optimalizační úloze převzaté z knihy Josefa Jablonského "Operační výzkum, Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování":

Balírný a pražírny kávy DE, a.s. plánují výrobu dvou směsí *Mocca* a *Standard*. Od dodavatelů mají k dispozici tři druhy kávových bobů  $K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$  v kapacitě 40, 60 a 25 tun. Technologický postup určující skladbu směsí shrňme v tabulce.

Komponenta	<i>Mocca</i>	<i>Standard</i>	Kapacita [t]
$K_1$	0,5	0,25	40
$K_2$	0,5	0,5	60
$K_3$		0,25	25

Vzhledem k výrobním nákladům a prodejní ceně směsí byl vykalkulován zisk, který činí 20000 Kč resp. 14000 Kč na jednu tunu směsi *Mocca* resp. *Standard*. Management firmy chce naplánovat produkci tak, aby její zisk byl maximální.

# Formulace úlohy optimalizace výrobního programu

Označíme - li  $x_1$  množství tun směsi *Mocca* a  $x_2$  množství tun směsi *Standard*, můžeme problém formulovat matematicky jako úlohu maximalizovat účelovou funkci:

$$z = 20000x_1 + 14000x_2$$

za podmínek

$$0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 40$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 \leq 60$$

$$0,25x_2 \leq 25$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Formulace úlohy optimalizace výrobního programu

Označíme - li  $x_1$  množství tun směsi *Mocca* a  $x_2$  množství tun směsi *Standard*, můžeme problém formulovat matematicky jako úlohu maximalizovat účelovou funkci:

$$z = 20000x_1 + 14000x_2$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcll} 0,5x_1 & + & 0,25x_2 & \leq 40 \\ 0,5x_1 & + & 0,5x_2 & \leq 60 \\ & & 0,25x_2 & \leq 25 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Je možný též maticový zápis úlohy:

$$z = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \rightarrow \max \quad \text{za podmínek} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  je vektor strukturních proměnných,  $\mathbf{c} = (20, 14)^T$  je vektor cenových koeficientů v účelové funkci,  $\mathbf{b} = (40, 60, 25)^T$  je vektor kapacitních

omezení a  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$  je matice strukturních koeficientů.

# Matematická formulace obecné úlohy LP

Obecnou úlohu LP pro  $n$  proměnných a  $m$  omezení můžeme zapsat takto:  
minimalizuj (maximalizuj) funkci

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \text{ ? } b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

kde na místě symbolů ? mohou být libovolná relační znaménka  $\leq, =, \geq$ .  
Omezení se uvádějí v takové podobě, aby pravé strany  $b_i$  byly nezáporné.

# Matematická formulace obecné úlohy LP

Obecnou úlohu LP pro  $n$  proměnných a  $m$  omezení můžeme zapsat takto: minimalizuj (maximalizuj) funkci

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \text{ ? } b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

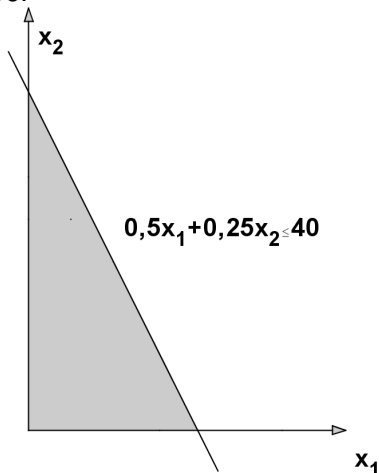
kde na místě symbolů ? mohou být libovolná relační znaménka  $\leq, =, \geq$ .  
Omezení se uvádějí v takové podobě, aby pravé strany  $b_i$  byly nezáporné.

Je dobré si uvědomit, že jednu úlohu lze formulovat různými způsoby. Snadno lze převést úlohu minimalizační na úlohu maximalizace funkce

$-z = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$ . Omezení ve formě rovnosti lze přepsat jako dvě nerovnice typu  $\leq$  a  $\geq$  s týmiž koeficienty i pravou stranou jako původní rovnice. Převod omezení ve formě nerovnosti na rovnici se zase řešení zavedením dodatečných proměnných, jak si dále ukážeme.

# Grafické řešení úlohy LP

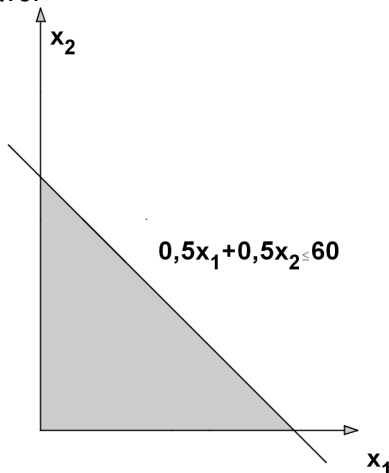
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Kvůli nezápornosti proměnných se omezíme pouze na první kvadrant. Znázorníme zde polorovinu tvořenou body splňujícími první omezující podmínku.

# Grafické řešení úlohy LP

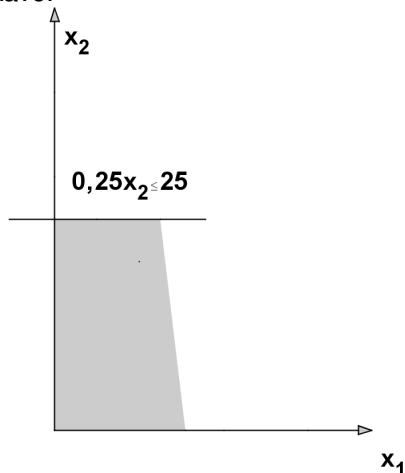
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Znázorníme také polorovinu tvořenou body splňujícími druhou omezující podmínku.

# Grafické řešení úlohy LP

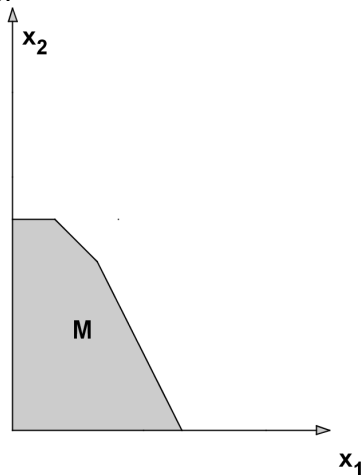
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Znázorníme ještě polorovinu tvořenou body splňujícími třetí omezující podmínku.

# Grafické řešení úlohy LP

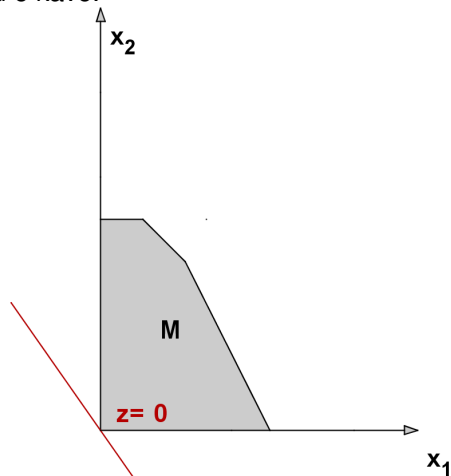
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Množina přípustných řešení  $M$  je tvořena body, které vyhovují všem omezením.

# Grafické řešení úlohy LP

Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.

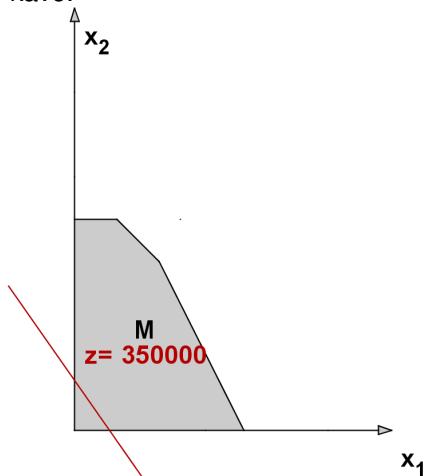


Izokvanta účelové funkce  $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 0$



# Grafické řešení úlohy LP

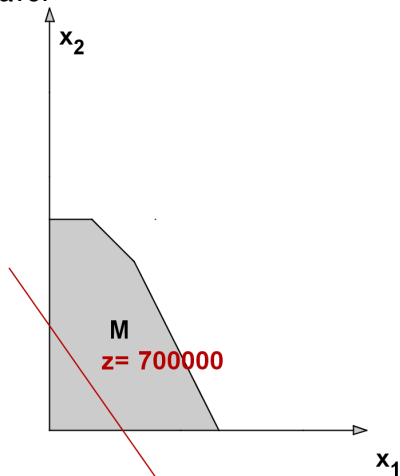
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce  $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 350000$

# Grafické řešení úlohy LP

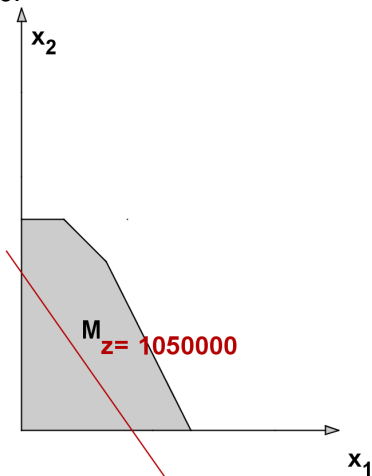
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce  $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 700000$

# Grafické řešení úlohy LP

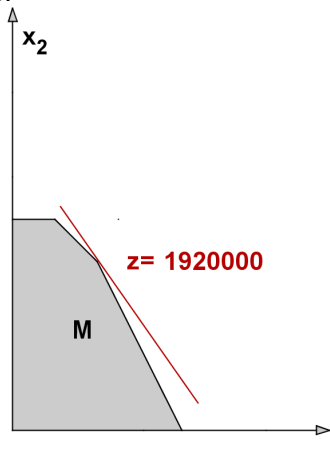
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce  $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 1050000$

# Grafické řešení úlohy LP

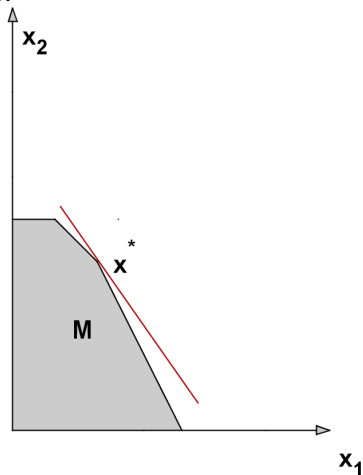
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Izokvanta účelové funkce  $z = 20000x_1 + 14000x_2 = 1920000$

# Grafické řešení úlohy LP

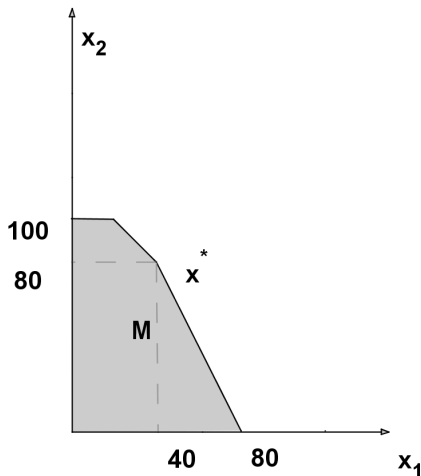
Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Nejvyšší izokvanta se dotýká množiny  $M$  v bodě  $x^*$

# Grafické řešení úlohy LP

Úlohy obsahující pouze dvě proměnné lze řešit graficky. Ukažme si postup pro naši úlohu o kávě.



Bod  $x^* = [40, 80]$  je optimálním řešením.

# Základní věta lineárního programování

Přípustná množina  $M$  je vymezena **obligátními** podmínkami (nezápornost) a omezujícími podmínkami  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Ty lze vyjádřit pomocí rovností:

$$0,5x_1 + 0,25x_2 + x_3 = 40$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 60$$

$$0,25x_2 + x_5 = 25$$

# Základní věta lineárního programování

Přípustná množina  $M$  je vymezena **obligátními** podmínkami (nezápornost) a omezujícími podmínkami  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Ty lze vyjádřit pomocí rovností:

$$0,5x_1 + 0,25x_2 + x_3 = 40$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 60$$

$$0,25x_2 + x_5 = 25$$

Proměnné  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  označujeme jako **přídavné** a lze je ekonomicky interpretovat jako nevyužitou kapacitu jednotlivých surovin.



# Základní věta lineárního programování

Přípustná množina  $M$  je vymezena **obligátními** podmínkami (nezápornost) a omezujícími podmínkami  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Ty lze vyjádřit pomocí rovností:

$$0,5x_1 + 0,25x_2 + x_3 = 40$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 60$$

$$0,25x_2 + x_5 = 25$$

Proměnné  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  označujeme jako **přídavné** a lze je ekonomicky interpretovat jako nevyužitou kapacitu jednotlivých surovin. Soustava obsahuje  $m$  rovnic pro  $m + n$  proměnných, může mít obecně nekonečně mnoho řešení. Takové řešení soustavy, pro které je  $n$  proměnných rovno nule, nazýváme **základní** (Ve 2D odpovídají základní řešení průsečíkům hraničních přímk jednotlivých nerovností.) Nenulové proměnné pak označujeme jako základní, nulové jako nezákladní.

# Základní věta lineárního programování

Přípustná množina  $M$  je vymezena **obligátními** podmínkami (nezápornost) a omezujícími podmínkami  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Ty lze vyjádřit pomocí rovností:

$$0,5x_1 + 0,25x_2 + x_3 = 40$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 60$$

$$0,25x_2 + x_5 = 25$$

Proměnné  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  označujeme jako **přídavné** a lze je ekonomicky interpretovat jako nevyužitou kapacitu jednotlivých surovin. Soustava obsahuje  $m$  rovnic pro  $m + n$  proměnných, může mít obecně nekonečně mnoho řešení. Takové řešení soustavy, pro které je  $n$  proměnných rovno nule, nazýváme **základní** (Ve 2D odpovídají základní řešení průsečíkům hraničních přímk jednotlivých nerovností.) Nenulové proměnné pak označujeme jako základní, nulové jako nezákladní. **Pozor!** Ne každé základní řešení je přípustné. Přípustná základní řešení odpovídají "krajním bodům"  $M$ . V našem příkladě je  $m = 3$ ,  $n = 2$ ; celkem dostaneme ? základních řešení, z toho ? přípustných.

# Základní věta lineárního programování

Přípustná množina  $M$  je vymezena **obligátními** podmínkami (nezápornost) a omezujícími podmínkami  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Ty lze vyjádřit pomocí rovností:

$$0,5x_1 + 0,25x_2 + x_3 = 40$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 60$$

$$0,25x_2 + x_5 = 25$$

Proměnné  $x_3, x_4, x_5$  označujeme jako **přídavné** a lze je ekonomicky interpretovat jako nevyužitou kapacitu jednotlivých surovin. Soustava obsahuje  $m$  rovnic pro  $m + n$  proměnných, může mít obecně nekonečně mnoho řešení. Takové řešení soustavy, pro které je  $n$  proměnných rovno nule, nazýváme **základní** (Ve 2D odpovídají základní řešení průsečíkům hraničních přímk jednotlivých nerovností.) Nenulové proměnné pak označujeme jako základní, nulové jako nezákladní. **Pozor!** Ne každé základní řešení je přípustné. Přípustná základní řešení odpovídají "krajním bodům"  $M$ . V našem příkladě je  $m = 3, n = 2$ ; celkem dostaneme ? základních řešení, z toho ? přípustných.

**Hlavní věta lineárního programování:**

Jestliže má úloha optimální řešení, pak má také optimální základní řešení.

# Simplexová tabulka

Uvedenou soustavu rovnic můžeme zapsat maticově jako

$(\mathbf{A}, \mathbf{I}) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top = \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice řádu  $m = 3$ .

Každou takovou soustavu  $m$  rovnic pro  $m + n$  neznámých, kde matice levé strany obsahuje všechny sloupce jednotkové matice řádu  $m$ , nazveme soustavou v **kanonickém tvaru**.

# Simplexová tabulka

Uvedenou soustavu rovnic můžeme zapsat maticově jako

$(\mathbf{A}, \mathbf{I}) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice řádu  $m = 3$ .

Každou takovou soustavu  $m$  rovnic pro  $m + n$  neznámých, kde matice levé strany obsahuje všechny sloupce jednotkové matice řádu  $m$ , nazveme soustavou v **kanonickém tvaru**. Snadno vidíme jedno z řešení takové soustavy:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = b_1 = 40$ ,  $x_4 = b_2 = 60$ ,  $x_5 = b_3 = 25$ , jde dokonce o řešení základní. Znázorníme vše do přehledné tabulky:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$
$x_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	40
$x_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	60
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$Z_j$	-20	-14	0	0	0	0

# Simplexová tabulka

Uvedenou soustavu rovnic můžeme zapsat maticově jako

$(\mathbf{A}, \mathbf{I}) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice řádu  $m = 3$ .

Každou takovou soustavu  $m$  rovnic pro  $m + n$  neznámých, kde matice levé strany obsahuje všechny sloupce jednotkové matice řádu  $m$ , nazveme soustavou v **kanonickém tvaru**. Snadno vidíme jedno z řešení takové soustavy:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = b_1 = 40$ ,  $x_4 = b_2 = 60$ ,  $x_5 = b_3 = 25$ , jde dokonce o řešení základní. Znázorníme vše do přehledné tabulky:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b_i$
$x_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	40
$x_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	60
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	-20	-14	0	0	0	0

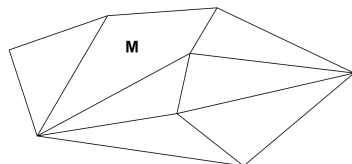
Poslední řádek odpovídá účelové funkci v tzv. **anulovaném tvaru**, původní vyjádření  $z = 20x_1 + 14x_2$  [v tis. Kč] jsme převedli na tvar  $z - 20x_1 - 14x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5$ , pro výchozí základní řešení dostaneme hodnotu účelové funkce  $z = 0$ , viz pravý dolní roh tabulky. Uvedené schéma nazveme výchozí **simplexovou tabulkou** úlohy.

# Simplexová metoda

**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přídatným proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje.

# Simplexová metoda

**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přidáním proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.

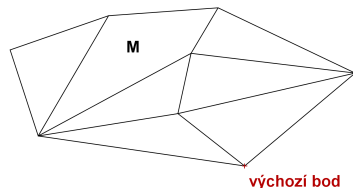


Množina přípustných řešení



# Simplexová metoda

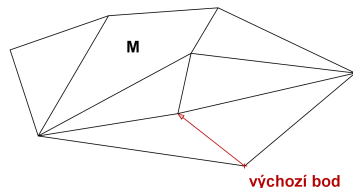
**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přidatným proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Výchozí základní řešení

# Simplexová metoda

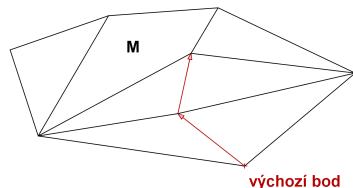
**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přidáním proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Přesuneme se do sousedního vrcholu s lepší hodnotou účelové funkce

# Simplexová metoda

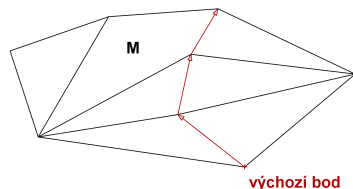
**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přidatným proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Přesuneme se do sousedního vrcholu s ještě lepší hodnotou účelové funkce

# Simplexová metoda

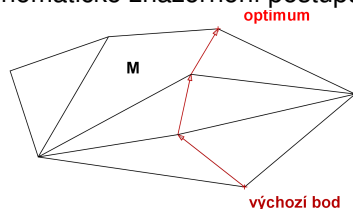
**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přidatným proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Zase se přesuneme do sousedního vrcholu s lepší hodnotou účelové funkce

# Simplexová metoda

**Simplexová metoda** je iterační postup k nalezení optimálního řešení úlohy LP. Úvodním krokem je nalezení výchozího základního řešení. U úloh obsahujících pouze nerovnice typu " $\leq$ " je tento krok díky přídatným proměnným jednoduchý, u jiných typů úloh jej získáme řešením počáteční úlohy minimalizace pomocných proměnných vyjadřujících porušení omezujících podmínek, hovoříme pak o **dvoufázové simplexové metodě**. Dále metoda v jednotlivých krocích vypočte nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků se nalezne řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce (podle základní věty LP jde pak o optimální řešení celé úlohy) nebo se zjistí, že takové řešení neexistuje. Na obrázku ukažme schematické znázornění postupu ve 3D.



Nelze se přesunout do žádného lepšího bodu, byl nalezen bod optima

# Iterační krok simplexové metody

Čísla  $z_j$  v spodním řádku simplexové tabulky nazýváme **redukované ceny**. Ukazují, jak se změní účelová funkce při přechodu k novému základnímu řešení. Stane-li se nezákladní proměnná  $x_k$  proměnnou základní, tj. změní-li hodnotu z 0 na  $t > 0$ , bude přírůstek účelové funkce  $\Delta z = -t \cdot z_k$ .

# Iterační krok simplexové metody

Čísla  $z_j$  v spodním řádku simplexové tabulky nazýváme **redukované ceny**. Ukazují, jak se změní účelová funkce při přechodu k novému základnímu řešení. Stane-li se nezákladní proměnná  $x_k$  proměnnou základní, tj. změní-li hodnotu z 0 na  $t > 0$ , bude přírůstek účelové funkce  $\Delta z = -t \cdot z_k$ . Při maximalizaci chceme, aby toto  $\Delta z$  bylo kladné, tj. aby  $z_k < 0$ . Pokud jsou **všechny redukované ceny nezáporné**, již nejde zvýšit hodnotu účelové funkce, řešení je **optimální**.

# Iterační krok simplexové metody

Čísla  $z_j$  v spodním řádku simplexové tabulky nazýváme **redukované ceny**. Ukazují, jak se změní účelová funkce při přechodu k novému základnímu řešení. Stane-li se nezákladní proměnná  $x_k$  proměnnou základní, tj. změní-li hodnotu z 0 na  $t > 0$ , bude přírůstek účelové funkce  $\Delta z = -t \cdot z_k$ . Při maximalizaci chceme, aby toto  $\Delta z$  bylo kladné, tj. aby  $z_k < 0$ . Pokud jsou **všechny redukované ceny nezáporné**, již nejde zvýšit hodnotu účelové funkce, řešení je **optimální**. Jinak vybereme  $x_k$ , pro které je  $z_k$  nejmenší (říkáme mu **vstupující** proměnná), a nahradíme s ním některou základní (**vystupující**) proměnnou.



# Iterační krok simplexové metody

Čísla  $z_j$  v spodním řádku simplexové tabulky nazýváme **redukované ceny**. Ukazují, jak se změní účelová funkce při přechodu k novému základnímu řešení. Stane-li se nezákladní proměnná  $x_k$  proměnnou základní, tj. změní-li hodnotu z 0 na  $t > 0$ , bude přírůstek účelové funkce  $\Delta z = -t \cdot z_k$ . Při maximalizaci chceme, aby toto  $\Delta z$  bylo kladné, tj. aby  $z_k < 0$ . Pokud jsou všechny redukované ceny nezáporné, již nejde zvýšit hodnotu účelové funkce, řešení je **optimální**. Jinak vybereme  $x_k$ , pro které je  $z_k$  nejmenší (říkáme mu **vstupující** proměnná), a nahradíme s ním některou základní (**vystupující**) proměnnou. Tedy pro naši simplexovou tabulku

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	40
$x_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	60
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	-20	-14	0	0	0	0

bude vstupující proměnnou  $x_1$ , protože -20 je nejmenší hodnota na posledním řádku.

# Iterační krok simplexové metody

Volba vystupující proměnné vychází z nutnosti zachovat přípustnost řešení, tedy nezápornost všech základních proměnných. Zapišme tuto podmínku pro nové hodnoty původních základních proměnných  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ , jestliže nově

$x_1 = t$ . Z platnosti rovnic:

$$x_3 = 40 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_4 = 60 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_5 = 25 - 0 \geq 0$$

Zřejmě největší možné takové  $t$  je  $t = 80$ , pro ně dostaneme  $x_3 = 0$ . To se nyní stane vystupující proměnnou. Tabulku přepočteme elementárními úpravami tak, abychom vlevo nahoře dostali jedničku a pod ní samé nuly.

# Iterační krok simplexové metody

Volba vystupující proměnné vychází z nutnosti zachovat přípustnost řešení, tedy nezápornost všech základních proměnných. Zapišme tuto podmínku pro nové hodnoty původních základních proměnných  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ , jestliže nově

$x_1 = t$ . Z platnosti rovnic:

$$x_3 = 40 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_4 = 60 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_5 = 25 - 0 \geq 0$$

Zřejmě největší možné takové  $t$  je  $t = 80$ , pro ně dostaneme  $x_3 = 0$ . To se nyní stane vystupující proměnnou. Tabulku přepočteme elementárními úpravami tak, abychom vlevo nahoře dostali jedničku a pod ní samé nuly.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	40
$x_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	60
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	-20	-14	0	0	0	0

První řádek vynásobíme dvojkou

# Iterační krok simplexové metody

Volba vystupující proměnné vychází z nutnosti zachovat přípustnost řešení, tedy nezápornost všech základních proměnných. Zapišme tuto podmínku pro nové hodnoty původních základních proměnných  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ , jestliže nově

$x_1 = t$ . Z platnosti rovnic:

$$x_3 = 40 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_4 = 60 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_5 = 25 - 0 \geq 0$$

Zřejmě největší možné takové  $t$  je  $t = 80$ , pro ně dostaneme  $x_3 = 0$ . To se nyní stane vystupující proměnnou. Tabulku přepočteme elementárními úpravami tak, abychom vlevo nahoře dostali jedničku a pod ní samé nuly.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	60
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	-20	-14	0	0	0	0

Odečteme jeho polovinu od druhého

# Iterační krok simplexové metody

Volba vystupující proměnné vychází z nutnosti zachovat přípustnost řešení, tedy nezápornost všech základních proměnných. Zapišme tuto podmínku pro nové hodnoty původních základních proměnných  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ , jestliže nově

$x_1 = t$ . Z platnosti rovnic:

$$x_3 = 40 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_4 = 60 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_5 = 25 - 0 \geq 0$$

Zřejmě největší možné takové  $t$  je  $t = 80$ , pro ně dostaneme  $x_3 = 0$ . To se nyní stane vystupující proměnnou. Tabulku přepočteme elementárními úpravami tak, abychom vlevo nahoře dostali jedničku a pod ní samé nuly.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	-20	-14	0	0	0	0

Nakonec přičteme jeho dvacetinásobek k poslednímu.

# Iterační krok simplexové metody

Volba vystupující proměnné vychází z nutnosti zachovat přípustnost řešení, tedy nezápornost všech základních proměnných. Zapišme tuto podmínku pro nové hodnoty původních základních proměnných  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ , jestliže nově

$x_1 = t$ . Z platnosti rovnic:

$$x_3 = 40 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_4 = 60 - \frac{1}{2}t \geq 0$$

$$x_5 = 25 - 0 \geq 0$$

Zřejmě největší možné takové  $t$  je  $t = 80$ , pro ně dostaneme  $x_3 = 0$ . To se nyní stane vystupující proměnnou. Tabulku přepočteme elementárními úpravami tak, abychom vlevo nahoře dostali jedničku a pod ní samé nuly.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Dostali jsme novou tabulku.

## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Nejvyšší hodnotou  $t$ , pro kterou můžeme položit  $x_2 = t$ , je  $\min\{2.80, 4.20, 4.25\} = 80$ . Vyjdou nám pak nové hodnoty základních proměnných  $x_1 = 80 - \frac{1}{2}t = 40$ ,  $x_4 = 20 - \frac{1}{4}t = 0$ ,  $x_5 = 25 - \frac{1}{4}t = 5$ . Tedy  $x_4$  se stane nezákladní, je vystupující proměnnou.



## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Nejvyšší hodnotou  $t$ , pro kterou můžeme položit  $x_2 = t$ , je  $\min\{2 \cdot 80, 4 \cdot 20, 4 \cdot 25\} = 80$ . Vyjdou nám pak nové hodnoty základních proměnných  $x_1 = 80 - \frac{1}{2}t = 40$ ,  $x_4 = 20 - \frac{1}{4}t = 0$ ,  $x_5 = 25 - \frac{1}{4}t = 5$ . Tedy  $x_4$  se stane nezákladní, je vystupující proměnnou.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Vynásobíme druhý řádek 4.

## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	<b>-4</b>	40	0	0	1600

Nejvyšší hodnotou  $t$ , pro kterou můžeme položit  $x_2 = t$ , je  $\min\{2 \cdot 80, 4 \cdot 20, 4 \cdot 25\} = 80$ . Vyjdou nám pak nové hodnoty základních proměnných  $x_1 = 80 - \frac{1}{2}t = 40$ ,  $x_4 = 20 - \frac{1}{4}t = 0$ ,  $x_5 = 25 - \frac{1}{4}t = 5$ . Tedy  $x_4$  se stane nezákladní, je vystupující proměnnou.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	<b>1</b>	<b><math>\frac{1}{2}</math></b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>80</b>
$x_2$	0	1	-4	4	0	80
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Odečteme jeho polovinu od prvního.

## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Nejvyšší hodnotou  $t$ , pro kterou můžeme položit  $x_2 = t$ , je  $\min\{2 \cdot 80, 4 \cdot 20, 4 \cdot 25\} = 80$ . Vyjdou nám pak nové hodnoty základních proměnných  $x_1 = 80 - \frac{1}{2}t = 40$ ,  $x_4 = 20 - \frac{1}{4}t = 0$ ,  $x_5 = 25 - \frac{1}{4}t = 5$ . Tedy  $x_4$  se stane nezákladní, je vystupující proměnnou.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	4	0	0	40
$x_2$	0	1	-4	4	0	80
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Odečteme jeho čtvrtinu od třetího.

## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Nejvyšší hodnotou  $t$ , pro kterou můžeme položit  $x_2 = t$ , je  $\min\{2 \cdot 80, 4 \cdot 20, 4 \cdot 25\} = 80$ . Vyjdou nám pak nové hodnoty základních proměnných  $x_1 = 80 - \frac{1}{2}t = 40$ ,  $x_4 = 20 - \frac{1}{4}t = 0$ ,  $x_5 = 25 - \frac{1}{4}t = 5$ . Tedy  $x_4$  se stane nezákladní, je vystupující proměnnou.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	4	0	0	40
$x_2$	0	1	-4	4	0	80
$x_5$	0	0	1	-1	1	5
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Nakonec přičteme jeho čtyřnásobek k poslednímu.

## Další iterační krok

Redukovaná cena  $z_2 = -4$  naznačuje, že lze ještě zvýšit účelovou funkci, jestliže zvolíme  $x_2$  jako vstupující.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	2	0	0	80
$x_4$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	0	20
$x_5$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	25
$z_j$	0	-4	40	0	0	1600

Nejvyšší hodnotou  $t$ , pro kterou můžeme položit  $x_2 = t$ , je  $\min\{2 \cdot 80, 4 \cdot 20, 4 \cdot 25\} = 80$ . Vyjdou nám pak nové hodnoty základních proměnných  $x_1 = 80 - \frac{1}{2}t = 40$ ,  $x_4 = 20 - \frac{1}{4}t = 0$ ,  $x_5 = 25 - \frac{1}{4}t = 5$ . Tedy  $x_4$  se stane nezákladní, je vystupující proměnnou.

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	4	0	0	40
$x_2$	0	1	-4	4	0	80
$x_5$	0	0	1	-1	1	5
$z_j$	0	0	24	16	0	1920

Dostali jsme novou tabulku.

# Ukončení výpočtu

Ve výsledné tabulce jsou již všechny redukované ceny nezáporné:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_j$
$x_1$	1	0	4	0	0	40
$x_2$	0	1	-4	4	0	80
$x_5$	0	0	1	-1	1	5
$z_j$	0	0	24	16	0	1920

Nelze tedy již zvýšit hodnotu účelové funkce, maximální zisk je 1920 tisíc. Nezákladní proměnné jsou  $x_3$ ,  $x_4$ , ty budou tedy nulové. Hodnoty základních proměnných vyčteme z tabulky:  $x_1 = 40$ ,  $x_2 = 80$ ,  $x_5 = 5$ . To nám říká, že optimálně máme vyrobit 40 tun směsi *Mocca* a 80 tun směsi *Standard*, přičemž zcela spotřebujeme první dvě suroviny a zbyde nám pět tun třetí suroviny.

# Ukončení výpočtu

Ve výsledné tabulce jsou již všechny redukované ceny nezáporné:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_j$
$x_1$	1	0	4	0	0	40
$x_2$	0	1	-4	4	0	80
$x_5$	0	0	1	-1	1	5
$z_j$	0	0	24	16	0	1920

Nelze tedy již zvýšit hodnotu účelové funkce, maximální zisk je 1920 tisíc. Nezákladní proměnné jsou  $x_3$ ,  $x_4$ , ty budou tedy nulové. Hodnoty základních proměnných vyčteme z tabulky:  $x_1 = 40$ ,  $x_2 = 80$ ,  $x_5 = 5$ . To nám říká, že optimálně máme vyrobit 40 tun směsi *Mocca* a 80 tun směsi *Standard*, přičemž zcela spotřebujeme první dvě suroviny a zbyde nám pět tun třetí suroviny.

**Pozn.:** Pro minimalizační úlohu by se obrátila role znamének v dolním řádku - vybírali bychom vstupující proměnnou podle nejvyšší redukované ceny a výpočet bychom ukončili až by všechny redukované ceny byly  $\leq 0$ .

# Dvofázová simplexová metoda

Vyskytují-li se v úloze i jiná omezení než nerovnosti typu " $\leq$ ", je nutné nejprve najít výchozí přípustné základní řešení. K tomu slouží **první fáze** simplexové metody. Ukažme si ji na ilustračním příkladě.

$$z = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

za podmínek

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \geq 2$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 50$$



# Dvofázová simplexová metoda

Vyskytují-li se v úloze i jiná omezení než nerovnosti typu " $\leq$ ", je nutné nejprve najít výchozí přípustné základní řešení. K tomu slouží **první fáze** simplexové metody. Ukažme si ji na ilustračním příkladě.

$$z = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 2 \\ x_2 & \geq & 2 \\ 5x_1 + 10x_2 & \leq & 50 \end{array}$$

Omezující podmínky lze opět zavedením nezáporných přídavných proměnných převést na rovnosti:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & -x_3 & & & & = & 2 \\ x_2 & & -x_4 & & & = & 2 \\ 5x_1 + 10x_2 & & & +x_5 & & = & 50 \end{array}$$

# Dvofázová simplexová metoda

Vyskytují-li se v úloze i jiná omezení než nerovnosti typu " $\leq$ ", je nutné nejprve najít výchozí přípustné základní řešení. K tomu slouží **první fáze** simplexové metody. Ukažme si ji na ilustračním příkladě.

$$z = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

za podmínek

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 2 \\ x_2 & \geq & 2 \\ 5x_1 + 10x_2 & \leq & 50 \end{array}$$

Omezující podmínky lze opět zavedením nezáporných přídatných proměnných převést na rovnosti:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -x_3 & & & = 2 \\ x_2 & & -x_4 & & = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 & & & +x_5 & = 50 \end{array}$$

Bohužel nejde o soustavu v kanonickém tvaru, protože koeficienty u  $x_3$  a  $x_4$  nejsou  $= 1$ . Proto přičteme k levým stranám příslušných omezení ještě nezáporné **pomocné proměnné**  $y_1, y_2$  a tyto proměnné již budou spolu s  $x_5$  základními. Pro výchozí bod platí  $y_1 = y_2 = 2, x_5 = 50$ , což však není přípustné pro původní úlohu.

# Dvoufázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

# Dvofázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$\beta_i$
$y_1$	1	0	-1	0	0	1	0	2
$y_2$	0	1	0	-1	0	0	1	2
$x_5$	5	10	0	0	1	0	0	50
$z'_j$	1	1	-1	-1	0	0	0	4

Jako vstupující proměnnou můžeme zvolit  $x_1$  nebo  $x_2$ , zvolme např. tu druhou.

# Dvoufázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$\beta_i$
$y_1$	1	0	-1	0	0	1	0	2
$y_2$	0	1	0	-1	0	0	1	2
$x_5$	5	10	0	0	1	0	0	50
$z'_j$	1	1	-1	-1	0	0	0	4

Od třetího řádku odečteme desetinasobek druhého.

# Dvoufázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$\beta_i$
$y_1$	1	0	-1	0	0	1	0	2
$y_2$	0	1	0	-1	0	0	1	2
$x_5$	5	0	0	10	1	0	-10	30
$z'_j$	1	1	-1	-1	0	0	0	4

Od čtvrtého řádku odečteme druhý.

# Dvofázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$\beta_i$
$y_1$	1	0	-1	0	0	1	0	2
$x_2$	0	1	0	-1	0	0	1	2
$x_5$	5	0	0	10	1	0	-10	30
$z'_j$	1	0	-1	0	0	0	-1	2

Získali jsme novou tabulku, vstupující proměnnou bude  $x_1$ . Od třetího řádku odečteme pětkrát první.

# Dvofázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$\beta_i$
$y_1$	1	0	-1	0	0	1	0	2
$x_2$	0	1	0	-1	0	0	1	2
$x_5$	0	0	5	10	1	-5	-10	20
$z'_j$	1	0	-1	0	0	0	-1	2

Od posledního řádku odečteme první.



# Dvofázová simplexová metoda

K získání přípustného řešení původní úlohy je třeba zajistit, aby  $y_1 = y_2 = 0$ . To lze pomocí minimalizace pomocné účelové funkce  $z' = y_1 + y_2$ . (jestliže má tato funkce minimum  $>0$ , pak výchozí úloha nemá žádné přípustné řešení). Vyjádřeme  $z'$  pomocí nezákladních proměnných a výsledné redukované ceny zapišme do simplexové tabulky:

$$z' = (2 - x_1 + x_3) + (2 - x_2 + x_4) = 4 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	-1	0	0	1	0	2
$x_2$	0	1	0	-1	0	0	1	2
$x_5$	0	0	5	10	1	-5	-10	20
$z'_j$	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Nalezli jsme minimum pomocné fce  $z' = 0$ , můžeme tedy zahájit **2. fázi**: vynecháme  $y_1, y_2$  a z bodu  $[2, 2, 0, 0, 20]$  minimalizujeme funkci  $z = x_1 - x_2 = (2 - x_3) - (2 - x_4) = -x_3 + x_4$ , jejíž redukované ceny přidáme do tabulky.

**Pozn.:** kdyby vyšlo  $z'_{opt} \neq 0$ , nemá výchozí úloha žádné přípustné řešení.

# Dvoufázová simplexová metoda

Druhou fázi již dořešíme běžným způsobem:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	-1	0	0	2
$x_2$	0	1	0	-1	0	2
$x_5$	0	0	5	10	1	20
$z_j$	0	0	-1	1	0	0

Jako vstupující volíme  $x_4$ .

# Dvufázová simplexová metoda

Druhou fázi již dořešíme běžným způsobem:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	-1	0	0	2
$x_2$	0	1	0	-1	0	2
$x_5$	0	0	5	10	1	20
$z_j$	0	0	-1	1	0	0

Třetí řádek vydělíme 10.

# Dvufázová simplexová metoda

Druhou fázi již dořešíme běžným způsobem:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	-1	0	0	2
$x_2$	0	1	0	-1	0	2
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	2
$z_j$	0	0	-1	1	0	0

Přičteme třetí k druhému.

# Dvufázová simplexová metoda

Druhou fázi již dořešíme běžným způsobem:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	-1	0	0	2
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	4
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	2
$z_j$	0	0	-1	1	0	0

Odečteme třetí od posledního.

# Dvoufázová simplexová metoda

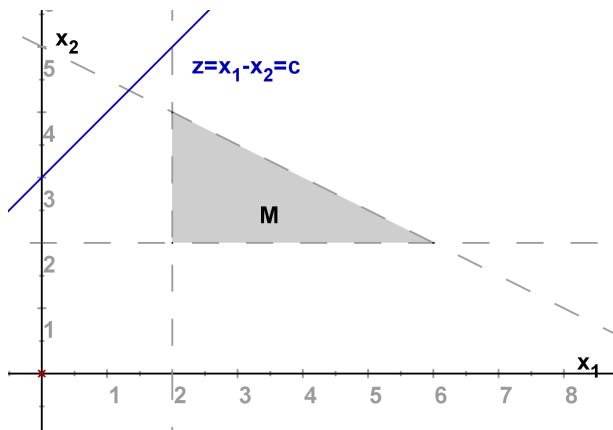
Druhou fázi již dořešíme běžným způsobem:

zákl. prom.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta_i$
$x_1$	1	0	-1	0	0	2
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	4
$x_4$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	2
$z_j$	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{10}$	-2

Dostali jsme optimální tabulku, je tedy  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $z_{opt} = -2$ .

# Dvofázová simplexová metoda

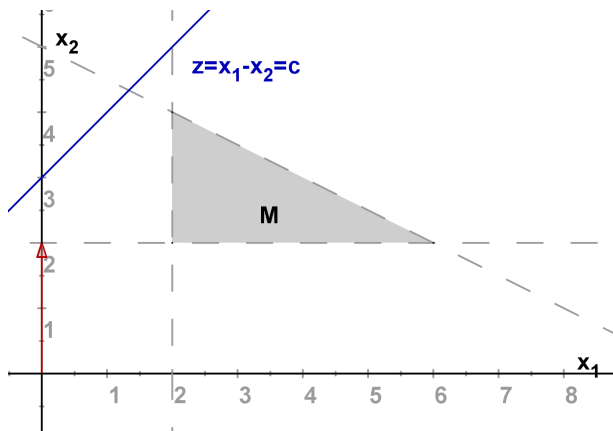
Celý postup v grafickém znázornění:



Množina přípustných řešení  $M$ . Při zahájení první fáze jsou obě proměnné  $x_1, x_2$  nezákladní, vycházíme tedy z počátku.

# Dvofázová simplexová metoda

Celý postup v grafickém znázornění:

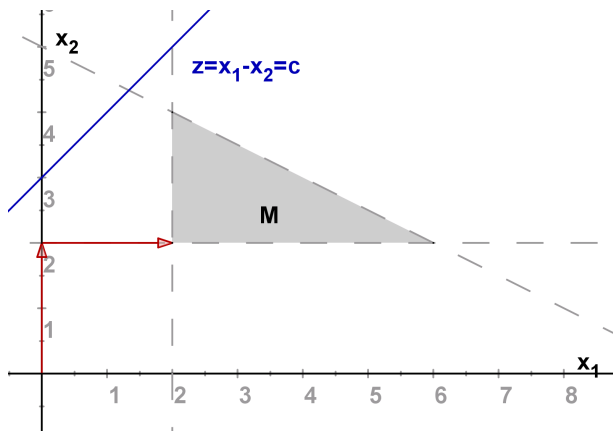


Po prvním kroku se proměnná  $x_2$  stala základní s hodnotou  $x_2 = 2$ .



# Dvoufázová simplexová metoda

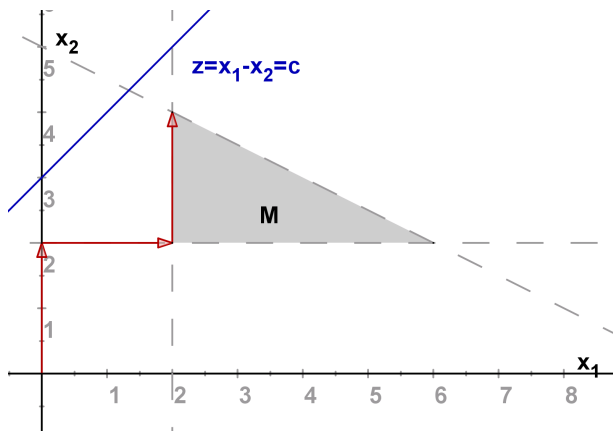
Celý postup v grafickém znázornění:



V dalším kroku se i proměnná  $x_1$  stala základní s hodnotou  $x_1 = 2$ , dosáhli jsme přípustné množiny a startujeme druhou fází.

# Dvoufázová simplexová metoda

Celý postup v grafickém znázornění:



Po jednom kroku dosáhneme optima v bodě  $[x_1, x_2] = [2, 4]$ .

# Úskalí simplexové metody - degenerace

Je-li bázická souřadnice řešení rovna 0 (tj. nulová příslušná pravá strana), řekneme že došlo k **degeneraci**. Hrozí pak nebezpečí zacyklení (po několika krocích se vrátíme do stejného vrcholu přípustné množiny). Degenerace je způsobena tím, že některé omezení je nadbytečné.

# Úskalí simplexové metody - degenerace

Je-li bázická souřadnice řešení rovna 0 (tj. nulová příslušná pravá strana), řekneme že došlo k **degeneraci**. Hrozí pak nebezpečí zacyklení (po několika krocích se vrátíme do stejného vrcholu přípustné množiny). Degenerace je způsobena tím, že některé omezení je nadbytečné.

Degeneraci lze odstranit několika způsoby

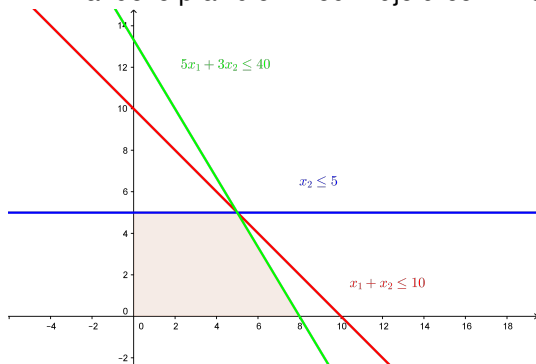
- Modifikace testu optima
- Charnesova metoda - upraví nulové pravé strany na kladné
- Blandovo pravidlo - modifikuje určení klíčového sloupce i klíčového řádku

# Úskalí simplexové metody - degenerace

Je-li bázická souřadnice řešení rovna 0 (tj. nulová příslušná pravá strana), řekneme že došlo k **degeneraci**. Hrozí pak nebezpečí zacyklení (po několika krocích se vrátíme do stejného vrcholu přípustné množiny). Degenerace je způsobena tím, že některé omezení je nadbytečné.

Degeneraci lze odstranit několika způsoby

- Modifikace testu optima
- Charnesova metoda - upraví nulové pravé strany na kladné
- Blandovo pravidlo - modifikuje určení klíčového sloupce i klíčového řádku

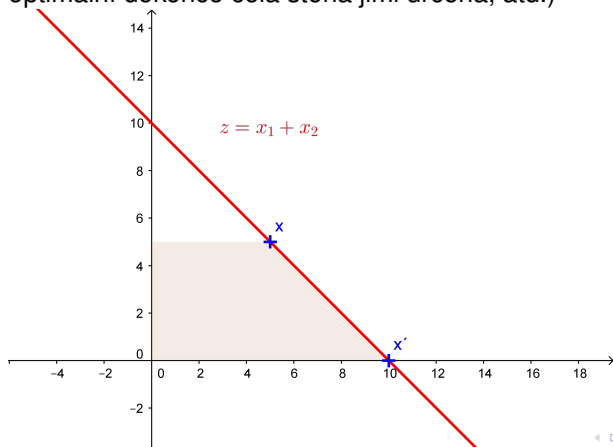


# Úskalí - případ více optimálních řešení

Je-li ve výstupní tabulce odpovídající optimálnímu řešení  $\mathbf{x}$  některý nebazický (nezákladní) koeficient v řádku  $z$  roven 0, pak pokud s proměnnou příslušnou tomuto koeficientu vstoupíme do báze, dostaneme řešení  $\mathbf{x}'$ , které bude rovněž optimální. Optimum pak nenastává pouze v obou vrcholech  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}'$ , ale také v každém bodě hrany mezi nimi. (v případě tří optimálních sousedů je optimální dokonce celá stěna jimi určená, atd.)

# Úskalí - případ více optimálních řešení

Je-li ve výstupní tabulce odpovídající optimálnímu řešení  $\mathbf{x}$  některý nebazický (nezákladní) koeficient v řádku z roven 0, pak pokud s proměnnou příslušnou tomuto koeficientu vstoupíme do báze, dostaneme řešení  $\mathbf{x}'$ , které bude rovněž optimální. Optimum pak nenastává pouze v obou vrcholech  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}'$ , ale také v každém bodě hrany mezi nimi. (v případě tří optimálních sousedů je optimální dokonce celá stěna jimi určená, atd.)



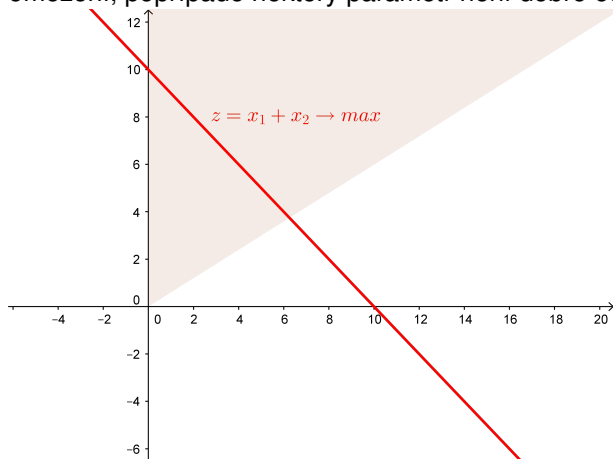
# Úskalí - neomezená přípustná množina

Jsou-li všechny hodnoty ve vstupním sloupci v některém optimalizačním kroku  $\leq 0$ , tj. neexistuje žádná kladná změna pro daný sloupec, znamená to, že množina přípustných řešení je **neomezená** (ve směru optimalizace). V praxi je to většinou způsobeno chybnou formulací úlohy (chybí určité omezení, popřípadě některý parametr není dobře odhadnut).



# Úskalí - neomezená přípustná množina

Jsou-li všechny hodnoty ve vstupním sloupci v některém optimalizačním kroku  $\leq 0$ , tj. neexistuje žádná kladná změna pro daný sloupec, znamená to, že množina přípustných řešení je **neomezená** (ve směru optimalizace). V praxi je to většinou způsobeno chybnou formulací úlohy (chybí určité omezení, popřípadě některý parametr není dobře odhadnut).

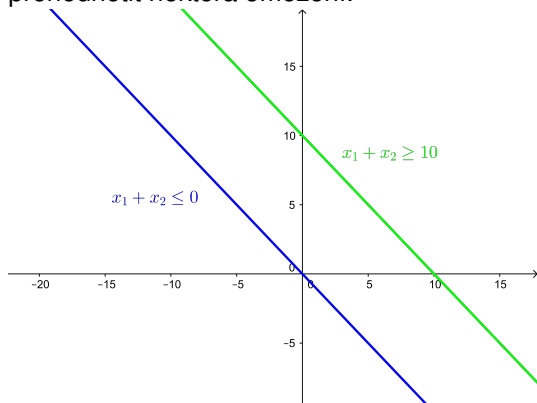


# Úskalí - prázdná přípustná množina

Neexistence přípustného řešení se pozná podle toho, že v 1.fázi dvoufázové metody vyjde kladná optimální hodnota. Je to způsobeno tím, že omezení si odporují. V podobných situacích lze využít **cílové programování** nebo přehodnotit některá omezení.

# Úskalí - prázdná přípustná množina

Neexistence přípustného řešení se pozná podle toho, že v 1.fázi dvoufázové metody vyjde kladná optimální hodnota. Je to způsobeno tím, že omezení si odporují. V podobných situacích lze využít **cílové programování** nebo přehodnotit některá omezení.



# Dualita úloh LP

Na původní úlohu lze nahlížet i jiným způsobem. Předpokládejme, že bychom suroviny nezpracovávali, ale rovnou prodali. Otázka zní, kdy se nám tento přímý prodej zdrojů vyplatí. To bude samozřejmě záviset na zisku z prodeje jednotlivých zdrojů - vyjádříme jej pomocí tzv. **duálních proměnných**, které označíme  $w_i$  (v naší úloze máme tři druhy kávových bobů, tedy  $i = 1, 2, 3$ ). Můžeme pak formulovat tzv. **duální úlohu** k výchozímu problému: Jaký je minimální zisk z prodeje zdrojů, při kterém se nám nevyplatí vyrábět ani jeden výrobek?

# Dualita úloh LP

Na původní úlohu lze nahlížet i jiným způsobem. Předpokládejme, že bychom suroviny nezpracovávali, ale rovnou prodali. Otázka zní, kdy se nám tento přímý prodej zdrojů vyplatí. To bude samozřejmě záviset na zisku z prodeje jednotlivých zdrojů - vyjádříme jej pomocí tzv. **duálních proměnných**, které označíme  $w_i$  (v naší úloze máme tři druhy kávových bobů, tedy  $i = 1, 2, 3$ ).

Můžeme pak formulovat tzv. **duální úlohu** k výchozímu problému:

Jaký je minimální zisk z prodeje zdrojů, při kterém se nám nevyplatí vyrábět ani jeden výrobek? Tedy minimalizujeme zisk z prodeje zdrojů

$g(\mathbf{w}) = 40w_1 + 60w_2 + 25w_3$  za omezení, že se nevyplatí vyrábět ani směs

Mocca ani Standard, tedy, že platí nerovnosti  $0,5w_1 + 0,5w_2 \geq 20$ ,

$0,5w_1 + 0,25w_2 + 0,5w_3 \geq 14$ .

# Dualita úloh LP

Na původní úlohu lze nahlížet i jiným způsobem. Předpokládejme, že bychom suroviny nezpracovávali, ale rovnou prodali. Otázka zní, kdy se nám tento přímý prodej zdrojů vyplatí. To bude samozřejmě záviset na zisku z prodeje jednotlivých zdrojů - vyjádříme jej pomocí tzv. **duálních proměnných**, které označíme  $w_i$  (v naší úloze máme tři druhy kávových bobů, tedy  $i = 1, 2, 3$ ).

Můžeme pak formulovat tzv. **duální úlohu** k výchozímu problému:

Jaký je minimální zisk z prodeje zdrojů, při kterém se nám nevyplatí vyrábět ani jeden výrobek? Tedy minimalizujeme zisk z prodeje zdrojů

$g(\mathbf{w}) = 40w_1 + 60w_2 + 25w_3$  za omezení, že se nevyplatí vyrábět ani směs

Mocca ani Standard, tedy, že platí nerovnosti  $0,5w_1 + 0,5w_2 \geq 20$ ,

$0,5w_1 + 0,25w_2 + 0,5w_3 \geq 14$ . Při použití označení zavedeného výše, kde

$\mathbf{c} = (20, 14)$  je vektor zisků z prodeje směsí,  $\mathbf{b} = (40, 60, 25)^\top$  je vektor kapacit surovin a  $\mathbf{A}$  strukturní matice, můžeme porovnat maticový zápis původní, tzv. **primární úlohy** a úlohy duální:

primární úloha

maximalizovat  $z = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$

za podm.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ,

duální úloha

minimalizovat  $g(\mathbf{w}) = \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{w}$

za podm.  $\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{w} \geq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$

# Dualita úloh LP

Obecně lze pro formulaci duální úlohy k úloze LP použít následující pravidla:

Maximalizační úloha	↔	Minimalizační úloha
primární	↔	duální
duální	↔	primární
omezení typu $\leq$	↔	nezáporná proměnná
omezení typu $\geq$	↔	nekladná proměnná
omezení typu rovnice	↔	proměnná neomezená
nezáporná proměnná	↔	omezení typu $\geq$
nekladná proměnná	↔	omezení typu $\leq$
proměnná neomezená	↔	omezení typu rovnice

# Dualita úloh LP

Vztah mezi vzájemně duálními úlohami lze vyjádřit **větou o dualitě**:

Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje i optimální řešení druhé úlohy a navíc optimální hodnoty účelových funkcí se sobě rovnají!



# Dualita úloh LP

Vztah mezi vzájemně duálními úlohami lze vyjádřit **větou o dualitě**:

Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje i optimální řešení druhé úlohy a navíc optimální hodnoty účelových funkcí se sobě rovnají!

Z této věty logicky plyne, že pokud jedna ze sdružených úloh optimální řešení nemá, tak jej nemůže mít ani úloha druhá, lze ukázat, že pokud jedna úloha nemá žádné přípustné řešení, tak druhá úloha je neomezená a naopak. Dalším důsledkem je tzv. **slabá věta o dualitě**:

Hodnota účelové funkce maximalizační úlohy je vždy menší nebo rovna hodnotě účelové funkce minimalizační úlohy.

# Dualita úloh LP

Vztah mezi vzájemně duálními úlohami lze vyjádřit **větou o dualitě**:

Existuje-li optimální řešení jedné z duálně sdružených úloh, potom existuje i optimální řešení druhé úlohy a navíc optimální hodnoty účelových funkcí se sobě rovnají!

Z této věty logicky plyne, že pokud jedna ze sdružených úloh optimální řešení nemá, tak jej nemůže mít ani úloha druhá, lze ukázat, že pokud jedna úloha nemá žádné přípustné řešení, tak druhá úloha je neomezená a naopak. Dalším důsledkem je tzv. **slabá věta o dualitě**:

Hodnota účelové funkce maximalizační úlohy je vždy menší nebo rovna hodnotě účelové funkce minimalizační úlohy.

Dále platí tzv. **věta o rovnováze**:

Je-li  $k$ -tá proměnná v řešení primární úlohy nenulová (tedy kladná), pak je  $k$ -tá podmínka v řešení duální úlohy splněna jako rovnost. Říkáme, že je  $k$ -tá podmínka **aktivní**.

# Postoptimalizační analýza

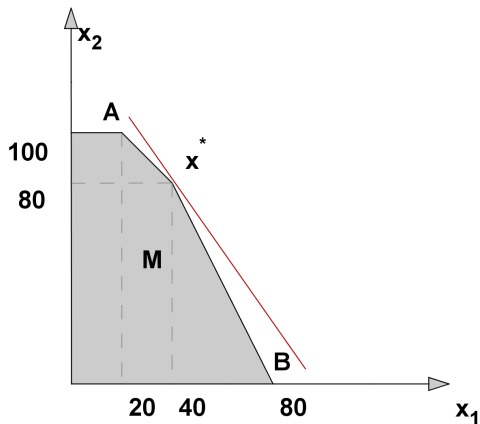
**Analýza citlivosti** primární úlohy zkoumá, do jaké míry ovlivní případné změny vstupních údajů původní optimální řešení. Zejména nás zajímají efekt při změně zisku z jednotlivého výrobku, případně při změně v jednotlivém kapacitním omezení. To lze zjistit bez nutnosti přepočítávat celou úlohu znovu. Určíme tzv. **interval stability**, a to pro:

- koeficienty účelové funkce  $c_k$ , kdy zjistíme, v jakém rozmezí hodnot můžeme měnit jednotlivé  $c_k$  (při zachování hodnot ostatních koeficientů) tak, aby nedošlo ke změně optimálního řešení,
- kapacitní omezení  $b_i$ , kdy zjistíme v jakém rozmezí se může jednotlivé  $b_i$  pohybovat, aby nedošlo ke změně množiny základních proměnných, tedy byla zachována množina aktivních omezení.

Pro manažerské rozhodování je důležité zjistit, jaký je vliv změny kapacitního omezení na hodnotu účelové funkce. To nám prozradí optimální hodnoty duálních proměnných  $w_i$ . Tyto hodnoty se nazývají **stínové ceny** a vyjadřují hodnotu, o kterou se změní hodnota účelové funkce, jestliže zvýšíme kapacitu  $i$  - tého zdroje  $b_i$  o jednotku (za předpokladu že se touto změnou nedostaneme mimo interval stability).

# Postoptimalizační analýza - intervaly stability pro ceny

Vlastní určení intervalů stability není složité a bývá nedílnou součástí softwarových výstupů. Dále si ukážeme grafickou interpretaci a odvození intervalů stability pro koeficienty účelové funkce v našem jednoduchém příkladě optimalizace výroby kávy. Na obrázku je vidět, jak lze optimální izokvantu účelové funkce naklánět, aby stále bylo optimálním řešením  $x^*$ .



# Postoptimalizační analýza - intervaly stability pro ceny

Mezní hodnoty naklonění určíme tak, že přímka bude procházet body  $x^* = [40, 80]$ ,  $A = [20, 100]$  resp.  $x^* = [40, 80]$ ,  $B = [80, 0]$ . Pro její směrnici  $q$  tedy musí platit nerovnosti

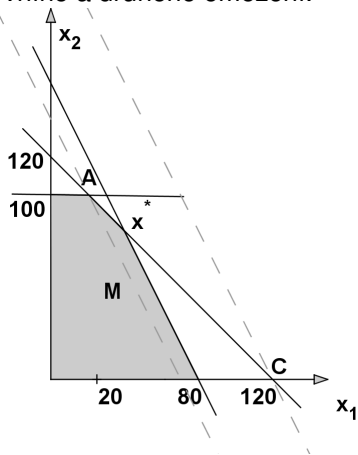
$$-2 = \frac{80 - 0}{40 - 80} \leq q \leq \frac{80 - 100}{40 - 20} = -1$$

Směrnici původní izokvanty  $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$  vyjádříme jako  $q = \frac{-c_1}{c_2}$ , přičemž původní hodnoty koeficientů jsou  $c_1 = 20$ ,  $c_2 = 14$ . Interval stability pro  $c_1$  tedy zjistíme po dosazení  $q = \frac{-c_1}{14}$  do nerovností:  $-2 \leq \frac{-c_1}{14} \leq -1$ , tj.

$c_1 \in \langle 14, 28 \rangle$ . Analogicky pro  $c_2$  získáme interval stability dosazením  $q = \frac{-20}{c_2}$  do nerovností:  $-2 \leq \frac{-20}{c_2} \leq -1$  a dostaneme  $c_2 \in \langle 10, 20 \rangle$ .

# Postoptimalizační analýza - intervaly stability pro kapacity

Ještě si ukažme ve stejné úloze grafické odvození intervalů stability pro pravé strany omezení. Na obrázku je vidět, jak můžeme posunout hranici prvního omezení, aby stále optimální řešení leželo v průsečíku hraničních přímek prvního a druhého omezení.



# Postoptimalizační analýza - intervaly stability pro kapacity

Původní rovnice hraniční přímky prvního omezení byla  $0,5x_1 + 0,25x_2 = 40$ .  
Její pravou stranu  $b_1$  můžeme změnit maximálně tak, že by přímka procházela bodem  $A$ , resp. bodem  $C$ .

Dosazením souřadnic bodu  $A = [20, 100]$  do levé strany omezení dostaneme  $0,5 \cdot 20 + 0,25 \cdot 100 = 35$ , což je dolní hranice pro  $b_1$ .

Dosazením souřadnic bodu  $C = [120, 0]$  do levé strany omezení dostaneme  $0,5 \cdot 120 + 0,25 \cdot 0 = 60$ , což je horní hranice pro  $b_1$ .

# Postoptimalizační analýza - intervaly stability pro kapacity

Původní rovnice hraniční přímky prvního omezení byla  $0,5x_1 + 0,25x_2 = 40$ . Její pravou stranu  $b_1$  můžeme změnit maximálně tak, že by přímka procházela bodem  $A$ , resp. bodem  $C$ .

Dosazením souřadnic bodu  $A = [20, 100]$  do levé strany omezení dostaneme  $0,5 \cdot 20 + 0,25 \cdot 100 = 35$ , což je dolní hranice pro  $b_1$ .

Dosazením souřadnic bodu  $C = [120, 0]$  do levé strany omezení dostaneme  $0,5 \cdot 120 + 0,25 \cdot 0 = 60$ , což je horní hranice pro  $b_1$ .

Dostáváme tedy interval stability  $b_1: \in \langle 35, 60 \rangle$ . Podobně obdržíme intervaly stability pro ostatní omezení. Tyto intervaly jsou důležité při rozhodování o nákupu dalších zdrojů: pokud je stínová cena daného omezení větší než nákupní cena příslušné suroviny, vyplatí se v rozmezí intervalu stability navyšovat kapacitu. A jak určíme stínovou cenu pro  $b_1$ ? Změnou na  $b_1 + \Delta$  dostaneme nový bod optima jako průsečík přímek o rovnicích

$0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 + \Delta$ ,  $0,5x_1 + 0,5x_2 = 60$ , tedy bod o souřadnicích  $[40 + 4\Delta, 80 - 4\Delta]$ . V tomto bodě je pak hodnota účelové funkce

$z = 20(40 + 4\Delta) + 14(80 - 4\Delta) = 1920 + 24\Delta$ . Stínová cena je  $w_1 = 24$ .

Stínové ceny najdeme v optimální tabulce pod sloupci přídatných proměnných!



# Speciální úlohy lineárního programování

Mezi typickými úlohami LP lze najít úlohy s nějakými speciálními vlastnostmi. Tyto vlastnosti se mohou týkat struktury modelu, zejména strukturní matice, typu proměnných, dále způsobů řešení, apod. Významnou skupinu takových speciálních úloh tvoří **distribuční úlohy**. Z těchto úloh představíme dopravní problém, přiřazovací problém a okružní dopravní problém. Další problémy (kontejnerový či vícestupňový dopravní problém, úloha o pokrytí, stanovení rezných plánů apod.) viz literatura. Úlohy, ve kterých některé proměnné mohou nabývat pouze hodnot z množiny celých čísel souhrně nazýváme úlohami **celočíselného programování**. Proměnné v těchto úlohách zpravidla vyjadřují počty nedělitelných kusů, případně nabývají pouze hodnot 0 a 1, kterými se kóduje absence či přítomnost určitého spojení mezi zadanými objekty. Specifikům celočíselných úloh a základním přístupům k jejich řešení se budeme později také věnovat.

# Dopravní problém - formulace

V dopravní úloze se typicky řeší rozvržení rozvozu z dodavatelských míst k odběratelům tak, aby byly minimalizovány náklady související s rozvozem. Je definováno  $m$  dodavatelských míst - zdrojů  $V_1, V_2, \dots, V_m$  s omezenými **kapacitami**  $a_1, a_2, \dots, a_m$  a dále máme  $n$  cílových míst - odběratelů  $S_1, S_2, \dots, S_n$  se stanovenými **požadavky**  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Každá dvojice zdroj-cíl je nějak ohodnocena, typicky například náklady na přepravu jednotky zboží. Tyto **náklady** označíme  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Cílem je naplánovat objemy přepravy mezi jednotlivými zdroji a cíli ( označíme je  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) tak, aby byly uspokojeny požadavky odběratelů a nebyly překročeny kapacity zdrojů.

# Dopravní problém - formulace

V dopravní úloze se typicky řeší rozvržení rozvozu z dodavatelských míst k odběratelům tak, aby byly minimalizovány náklady související s rozvozem. Je definováno  $m$  dodavatelských míst - zdrojů  $V_1, V_2, \dots, V_m$  s omezenými **kapacitami**  $a_1, a_2, \dots, a_m$  a dále máme  $n$  cílových míst - odběratelů  $S_1, S_2, \dots, S_n$  se stanovenými **požadavky**  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Každá dvojice zdroj-cíl je nějak ohodnocena, typicky například náklady na přepravu jednotky zboží. Tyto **náklady** označíme  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Cílem je naplánovat objemy přepravy mezi jednotlivými zdroji a cíli ( označíme je  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) tak, aby byly uspokojeny požadavky odběratelů a nebyly překročeny kapacity zdrojů. Úloha tedy obsahuje  $m \cdot n$  proměnných  $x_{ij}$ , pro něž minimalizujeme účelovou funkci

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \text{ za podmínek}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Účelová funkce i omezení jsou lineární, jde tedy o úlohu LP.

# Dopravní problém - metody řešení

I když jde o úlohu LP, kterou lze řešit simplexovou metodou, vzhledem k velkému počtu proměnných a speciální struktuře matice omezení jsou většinou praktičtější jiné metody (jde o tzv. řídkou matici - obsahuje hodně nul, navíc zbylé jedničky mají blokovou strukturu).

# Dopravní problém - metody řešení

I když jde o úlohu LP, kterou lze řešit simplexovou metodou, vzhledem k velkému počtu proměnných a speciální struktuře matice omezení jsou většinou praktičtější jiné metody (jde o tzv. řídkou matici - obsahuje hodně nul, navíc zbylé jedničky mají blokovou strukturu).

Příklad: Pro reálnou úlohu s 20 zdroji a 300 zákazníky máme ? proměnných a ? omezení, to znamená 1920000 polí v simplexové tabulce, což zabere cca 11 MB operační paměti

# Dopravní problém - metody řešení

I když jde o úlohu LP, kterou lze řešit simplexovou metodou, vzhledem k velkému počtu proměnných a speciální struktuře matice omezení jsou většinou praktičtější jiné metody (jde o tzv. řídkou matici - obsahuje hodně nul, navíc zbylé jedničky mají blokovou strukturu).

Příklad: Pro reálnou úlohu s 20 zdroji a 300 zákazníky máme ? proměnných a ? omezení, to znamená 1920000 polí v simplexové tabulce, což zabere cca 11 MB operační paměti

Ze simplexové metody vychází **modifikovaná distribuční metoda** (MODI). Pro rychlé získání přibližného řešení bez záruky optimality lze využít **heuristické** metody, z nichž si ukážeme tři: metodu severozápadního rohu, metodu maticového minima (zvanou též indexní) a Vogelovu aproximační metodu (VAM).

# Dopravní problém - vyrovnání úlohy

Zřejmě není možné uspokojit všechny spotřebitele, jestliže celková poptávka  $\sum_{j=1}^n b_j$  převyšuje celkovou kapacitu  $\sum_{i=1}^n a_i$ , úloha pak nemá přípustné řešení. Úlohu, ve které platí rovnost  $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n a_i$  označujeme jako **vyrovnaný dopravní problém**. Problém pak má přípustné řešení i pokud u omezení pro kapacity zdrojů nahradíme nerovnosti rovnostmi, spotřebují se tedy všechny jednotky. Nadále budeme pracovat jen s takovými vyrovnanými úlohami.

# Dopravní problém - vyrovnání úlohy

Zřejmě není možné uspokojit všechny spotřebitele, jestliže celková poptávka  $\sum_{j=1}^n b_j$  převyšuje celkovou kapacitu  $\sum_{i=1}^n a_i$ , úloha pak nemá přípustné řešení. Úlohu, ve které platí rovnost  $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n a_i$  označujeme jako **vyrovnaný dopravní problém**. Problém pak má přípustné řešení i pokud u omezení pro kapacity zdrojů nahradíme nerovnosti rovnostmi, spotřebují se tedy všechny jednotky. Nadále budeme pracovat jen s takovými vyrovnanými úlohami.

Nevyrovnaná úloha s převisem poptávky se převede na vyrovnanou pomocí zavedení **fiktivního** zdroje s kapacitou  $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^n a_i$ . V případě převisu nabídky se naopak zavede fiktivní zákazník s požadavkem  $\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ .

Pozor! **Přepravní náklady do fiktivních míst jsou vždy nulové.**



# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1$ ,  $V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky				
		$x_{ij}$	3	6	4	5
zbývá	5					
	7					
	6					

$S_1$  dostane z prvního zdroje 3 jednotky, ve zdroji pak zůstanou 2.

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1$ ,  $V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky				
		$x_{ij}$	0	6	4	5
zbyvá	2	3				
	7					
	6					

Dvě zbylé jednotky z  $V_1$  dostane  $S_2$ , přesuneme se na další zdroj.

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1$ ,  $V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky			
		0	4	4	5
zbyvá	$x_{ij}$	0	4	4	5
	0	3	2		
	7				
	6				

Čtyři zbylé jednotky pro  $S_2$  dodá  $V_2$ , zbydou mu tři jednotky.

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1$ ,  $V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky			
$x_{ij}$		0	0	4	5
zbývá	0	3	2		
	3		4		
	6				

Tři zbylé jednotky  $V_2$  se dodají spotřebiteli  $S_3$ .

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1$ ,  $V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky			
$x_{ij}$		0	0	1	5
zbývá	0	3	2		
	0		4	3	
	6				

Jednu chybějící jednotku dodá spotřebiteli  $S_3$  zdroj  $V_3$ .

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1$ ,  $V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky			
		0	0	0	5
zbývá	$x_{ij}$	0	2	3	
	0	3	4	1	
	5				

Posledních pět jednotek ve  $V_3$  zbyde pro spotřebitele  $S_4$ .

# Dopravní problém - metoda SZ rohu

**Metoda severozápadního rohu** je zřejmě nejjednodušší metodou získání přípustného řešení dopravní úlohy, začíná se v levém horním rohu tabulky a požadavky zákazníků se uspokojují zleva doprava. Pokud je již zdroj vyčerpán, přejde se na další zdroj, tj. o řádek níž. Končí se v pravém dolním rohu. Metoda nebere v úvahu přepravní náklady.

Ukažme si metodu pro úlohu z "M. Plevný, M. Žižka: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování": Najděte přípustné řešení DÚ s požadavky odběratelů  $S_1, S_2, S_3$  a  $S_4$  postupně 3, 6, 4 a 5 jednotek zboží a zdroji  $V_1, V_2$  a  $V_3$  s kapacitou po řadě 5, 7 a 6 jednotek.

		požadavky			
	$x_{ij}$	0	0	0	0
zbývá	0	3	2		
	0		4	3	
	0			1	5

Dostali jsme přípustné řešení.



# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy)

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
zbývá	5				
	7				
	6				

	přepravní náklady			
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$	2	1	3	4
$V_2$	6	2	6	1
$V_3$	7	3	3	3

Nejnižší náklady jsou  $c_{12} = c_{24} = 1$ . Vyberme například první z nich,  $V_1$  může dodat  $S_2$  nejvýše 5 jednotek. Tím se zcela vyčerpá a tudíž již dále neuvažujeme první řádek ani v matici nákladů.

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		3	1	4	5
zbývá	$x_{ij}$		5		
	0				
	7				
	6				

přepravní náklady				
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$				
$V_2$	6	2	6	1
$V_3$	7	3	3	3

Nejnižší náklady jsou  $c_{24} = 1$ .  $S_4$  může odebrat od  $V_2$  nejvýše 5 jednotek, je plně spokojen a čtvrtý sloupec tudíž už dál nebereme v úvahu.

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		3	1	4	0
zbývá	$x_{ij}$		5		5
	0				
	2				
6					

přepravní náklady				
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$				
$V_2$	6	2	6	
$V_3$	7	3	3	

Nejnižší náklady jsou  $c_{22} = 2$ .  $S_2$  může odebrat od  $V_2$  nejvýše 1 jednotku, druhý sloupec je tím vyčerpán.

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		3	0	4	0
zbývá	$x_{ij}$				
	0		5		
	1		1		5
	6				

přepravní náklady				
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$				
$V_2$	6		6	
$V_3$	7		3	

Nejnižší náklady jsou  $c_{33} = 3$ .  $S_3$  může odebrat od  $V_3$  nejvýše 4 jednotky, třetí sloupec je tím vyčerpán.

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky				
		$x_{ij}$	3	0	0	0
zbývá	0		5			
	1		1		5	
	2			4		

přepravní náklady				
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$				
$V_2$	6			
$V_3$	7			

Nejnižší náklady jsou  $c_{33} = 3$ .  $S_3$  může odebrat od  $V_3$  nejvýše 4 jednotky, třetí sloupec je tím vyčerpán.

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		3	0	0	0
zbývá	$x_{ij}$		5		
	0		1		5
	1				
	2			4	

přepravní náklady				
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$				
$V_2$	6			
$V_3$	7			

Nejnižší náklady jsou  $c_{21} = 6$ .  $V_2$  může dodat  $S_1$  nejvýše 1 jednotku, třetí řádek je tím vyčerpán.

# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
	$x_{ij}$	2	0	0	0
zbývá	0		5		
	0	1	1		5
	2			4	

	přepravní náklady			
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$				
$V_2$				
$V_3$	7			

V posledním kroku dodá  $V_3$  spotřebiteli  $S_1$  zbylé dvě jednotky.



# Dopravní problém - indexová metoda

**Indexová metoda** dává většinou řešení s nižšími přepravními náklady než předchozí metoda. Jde o tzv. hladový algoritmus, vybíráme postupně vždy trasy s nejnižším cenovým ohodnocením. (vynecháme případné fiktivní trasy) Ukažme si postup metody pro již dříve řešený dopravní problém, přidáme tabulku s přepravními náklady  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		$x_{1j}$	$x_{2j}$	$x_{3j}$	$x_{4j}$
zbývá	$x_{11}$	0	5		
	$x_{12}$	0	1	1	5
	$x_{13}$	0	2		4
	$x_{14}$				

přepravní náklady				
$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$V_1$	2	1	3	4
$V_2$	6	2	6	1
$V_3$	7	3	3	3

Výsledné přepravní náklady jsou

$$x_{12} \cdot c_{12} + x_{21} \cdot c_{21} + x_{22} \cdot c_{22} + x_{24} \cdot c_{24} + x_{31} \cdot c_{31} + x_{33} \cdot c_{33} = 5 + 6 + 2 + 5 + 14 + 12 = 44.$$

Pro předchozí metodu bychom dostali náklady ve výši

$$6 + 2 + 6 + 2 + 5 + 14 + 12 = 47.$$

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí.

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  a  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
zbývá	5				
	7				
	6				

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$	2	1	3	4	1
$V_2$	6	2	6	1	1
$V_3$	7	3	3	3	0
$d_j$	4	1	0	2	

N největší difference je v prvním sloupečku, vybereme tedy jeho nejmenší náklad, což je  $c_{11} = 2$ .

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  a  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		0	6	4	5
zbývá	$x_{ij}$				
	2	3			
	7				
	6				

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$		1	3	4	2
$V_2$		2	6	1	1
$V_3$		3	3	3	0
$d_j$		1	0	2	

Největší difference je v prvním řádku, vybereme tedy jeho nejmenší náklad, což je  $c_{12} = 1$ .

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i, i = 1, \dots, 3$  a  $d_j, j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		0	4	4	5
zbývá	$x_{ij}$	0	3	2	
	0	3	2		
	7				
	6				

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$					
$V_2$		2	6	1	1
$V_3$		3	3	3	0
$d_j$		1	3	2	

Největší difference je v třetím sloupci, vybereme tedy jeho nejmenší náklad, což je  $c_{33} = 3$ .

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i, i = 1, \dots, 3$  a  $d_j, j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
	$x_{ij}$	0	4	0	5
zbývá	0	3	2		
	7				
	2			4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$					
$V_2$		2		1	1
$V_3$		3		3	0
$d_j$		1		2	

Největší difference je ve čtvrtém sloupci, vybereme tedy jeho nejmenší náklad, což je  $c_{24} = 1$ .

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  a  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky				
		$x_{ij}$	0	4	0	0
zbývá	0	3	2			
	2					5
	2			4		
	2					

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$					
$V_2$		2			
$V_3$		3			
$d_j$		1			

Největší difference je ve druhém sloupci, vybereme tedy jeho nejmenší náklad, což je  $c_{22} = 2$ .

# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i, i = 1, \dots, 3$  a  $d_j, j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
	$x_{ij}$	0	2	0	0
zbývá	0	3	2		
	0		2		5
	2			4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$					
$V_2$					
$V_3$					
$d_j$					

Zbývá přepravit dvě jednotky z  $V_3$  zákazníkovi  $S_2$ .



# Dopravní problém - VAM

**Vogelova aproximační metoda** je třetí heuristickou metodou a její výhoda oproti metodě indexační spočívá v tom, že bere v každém kroku v úvahu "alternativní náklady" při volbě nejlevnější trasy. Pracuje s **diferencemi**, tedy rozdíly druhé nejlepší oproti nejlepší variantě v každém řádku a sloupci. Volí se pak vždy nejlevnější jízda v řádku či sloupci s největší diferencí. Použijme metodu pro náš známý příklad. K matici nákladů doplníme řádkové a sloupcové difference  $d_i, i = 1, \dots, 3$  a  $d_j, j = 1, \dots, 4$ .

		požadavky			
		0	0	0	0
zbývá	$x_{ij}$	0	2		5
		3	2		
			2		
			2	4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$d_i$
$V_1$	2	1	3	4	1
$V_2$	6	2	6	1	1
$V_3$	7	3	3	3	0
$d_j$	4	1	0	2	

Výsledné přepravní náklady jsou

$x_{11} \cdot c_{11} + x_{12} \cdot c_{12} + x_{22} \cdot c_{22} + x_{24} \cdot c_{24} + x_{32} \cdot c_{32} + x_{33} \cdot c_{33} = 35$ , což je výrazně méně než u předchozích metod.

# Dopravní problém - MODI

Modifikovaná distribuční metoda řešení vyrovnaných úloh spočívá ve využití duality. Duální úlohu k problému  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$  za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

formulujeme pomocí duálních proměnných  $u_i, v_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max$$

za omezení  $u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$

# Dopravní problém - MODI

Modifikovaná distribuční metoda řešení vyrovnaných úloh spočívá ve využití duality. Duální úlohu k problému  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$  za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

formulujeme pomocí duálních proměnných  $u_i, v_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max$$

za omezení  $u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

Z teorie duality plyne, že pro všechny základní proměnné primární úlohy ( $x_{ij} > 0$ ) je příslušné omezení splněno jako rovnost. ( $u_i + v_j = c_{ij}$ ). Pokud se nejedná o řešení degenerované, je v bázi právě  $m + n - 1$  proměnných, a tedy dostaneme soustavu  $m + n - 1$  rovnic pro  $m + n$  duálních proměnných. Zvolíme-li libovolně hodnotu jedné duální proměnné, lze ostatní dopočítat. Ověřením duální přípustnosti zjistíme, zda je nalezené **řešení optimální**, tj. zda  $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

# Dopravní problém - MODI

Určení hodnot duálních proměnných a ověření optimality lze provést přímo v tabulce, vraťme se k příkladu vyřešenému metodou VAM:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5	3	2		
	7		2		5
	6		2	4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_j$
$V_1$	2	1	3	4	
$V_2$	6	2	6	1	
$V_3$	7	3	3	3	
$v_j$					

Volíme  $u_i, v_j$  tak, aby jejich součty byly rovny číslům v červených polích. Jednu proměnnou volíme libovolně, tedy pro jednoduchost např.  $v_2 = 0$ . Ostatní postupně dopočítáme.

# Dopravní problém - MODI

Určení hodnot duálních proměnných a ověření optimality lze provést přímo v tabulce, vraťme se k příkladu vyřešenému metodou VAM:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5	3	2		
	7		2		5
	6		2	4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_j$
$V_1$	2	1	3	4	1
$V_2$	6	2	6	1	2
$V_3$	7	3	3	3	3
$v_j$	1	0	0	-1	

Volíme  $u_i, v_j$  tak, aby jejich součty byly rovny číslům v červených polích. Jednu proměnnou volíme libovolně, tedy pro jednoduchost např.  $v_2 = 0$ . Ostatní postupně dopočítáme. Tabulka je optimální, součty duálních proměnných nepřesahují čísla uvnitř tabulky.

# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5		5		
	7	1	1		5
	6	2		4	
	6				

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_j$
$V_1$	2	1	3	4	
$V_2$	6	2	6	1	
$V_3$	7	3	3	3	
$v_j$					

# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky			
		$x_{1j}$	$x_{2j}$	$x_{3j}$	$x_{4j}$
kapacita	$x_{1j}$	3	6	4	5
	$x_{2j}$	5	5		
	$x_{3j}$	7	1	1	5
	$x_{4j}$	6	2	4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_j$
$V_1$	2	1	3	4	-1
$V_2$	6	2	6	1	0
$V_3$	7	3	3	3	1
$v_j$	6	2	2	1	

Volíme  $u_i, v_j$  tak, aby jejich součty byly rovny číslům v červených polích. Požadovných hodnot dosáhneme např. volbou  $u_2 = 0$ . Ostatní opět dopočítáme.

# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5		5		
	7	1	1		5
	6	2		4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_j$
$V_1$	2	1	3	4	-1
$V_2$	6	2	6	1	0
$V_3$	7	3	3	3	1
$v_j$	6	2	2	1	

Je vidět, že v levém horním rohu je porušena podmínka optimality:

$$u_1 + v_1 = 5 > c_{11} = 2.$$



# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5	+	5 -		
	7	1 -	1 +		5
	6	2		4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_i$
$V_1$	2	1	3	4	-1
$V_2$	6	2	6	1	0
$V_3$	7	3	3	3	1
$v_j$	6	2	2	1	

Je vidět, že v levém horním rohu je porušena podmínka optimality:

$$u_1 + v_1 = 5 > c_{11} = 2.$$

K základnímu řešení s lepší hodnotou primární účelové funkce přejdeme volbou  $x_{11}$  jako vstupující proměnné, pomocí které nahradíme některou z proměnných  $x_{12}$ ,  $x_{22}$ ,  $x_{21}$  ležících na tzv. **Dantzigově uzavřeném obvodu** vycházejícím z  $x_{11}$ . Vybíráme tak, aby se neporušily podmínky primární přípustnosti. Je vidět, že lze o 1 zmenšit a tudíž vyhodit z báze  $x_{21}$ . Současně musíme zvětšit  $x_{22}$  a zmenšit  $x_{12}$  (viz znaménka + a - v levé tabulce). Dostaneme nové základní řešení.

# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky				
		$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5	1	4			
	7	0	2		5	
	6	2		4		

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_i$
$V_1$	2	1	3	4	-1
$V_2$	6	2	6	1	0
$V_3$	7	3	3	3	4
$v_j$	3	2	-1	1	

Znovu doplníme  $u_i$ ,  $v_j$  a zkontrolujeme podmínku optimality. Ta je porušena pro  $c_{32}$  a  $c_{34}$ .

# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5	1 +	4 -		
	7	0	2		5
	6	2 -	+	4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_i$
$V_1$	2	1	3	4	-1
$V_2$	6	2	6	1	0
$V_3$	7	3	3	3	4
$v_j$	3	2	-1	1	

Znovu doplníme  $u_i$ ,  $v_j$  a zkontrolujeme podmínku optimality. Ta je porušena pro  $c_{32}$  a  $c_{34}$ .

Protože větší rozdíl je mezi  $(u_3 + v_2) - c_{32} = 6 - 3 = 3$  než mezi  $(u_3 + v_4) - c_{34} = 5 - 3 = 2$ , získáme volbou  $x_{32}$  jako vstupující větší zlepšení účelové funkce. Musíme k ní doplnit Dantzigův obvod, budou jej tvořit  $x_{31}$ ,  $x_{11}$  a  $x_{12}$ . Z báze vystoupí  $x_{31}$ , jehož 2 jednotky se přesunou do  $x_{32}$ . (na obvodu tudíž též o 2 zvětšíme  $x_{11}$  a zmenšíme  $x_{12}$ . Dostaneme novou tabulku.

# Dopravní problém - MODI

Kritérium optimality však není splněno pro přípustné řešení nalezené indexovou metodou:

		požadavky			
	$x_{ij}$	3	6	4	5
kapacita	5	3	2		
	7		2		5
	6	0	2	4	

$c_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$u_j$
$V_1$	2	1	3	4	1
$V_2$	6	2	6	1	2
$V_3$	7	3	3	3	3
$v_j$	1	0	0	-1	

Nalezené řešení je již optimální jak jsme ověřili dříve, při výpočtu metodou VAM. Hodnota účelové funkce  $z = 35$  již dále nejde zlepšit. Při postupu metodou MODI se někdy setkáme s **degenerací**, kdy v bázi je méně než  $m + n - 1$  proměnných. Pak se některé nulové  $x_{ij}$  uměle nahradí malou hodnotou  $\varepsilon > 0$ .

# Dopravní problém - použití

Příklady možných aplikací dopravního problému ilustruje následující přehled.

<b>druh činnosti</b>	<b>zdroje</b>	<b>cílová místa</b>
rozvoz pohonných hmot	rafinérie, sklady	čerpací stanice
svoz poštovních zásilek	přepravní uzly	třídící centra
sběr fotozakázek	fotosběrny	spádová centra
distribuce léčiv	sklady distribučních firem	lékárny, nemocnice
zpracování cukrové řepy	produkční střediska	cukrovary

Vyjímečně se u dopravních úloh setkáme i s maximalizací účelové funkce.  
Kdy?

# Přiřazovací problém

**Přiřazovací úlohu** můžeme charakterizovat jako problém vytvoření párů z objektů ze dvou různých skupin, tak aby toto spárování přineslo co největší efekt. Typicky jde o přidělení jednotlivých projektů pracovníkům či pracovních činností strojům tak abychom minimalizovali náklady nebo maximalizovali zisk. Jde o úlohu příbuznou s dopravním problémem.

Ukažme příklad takové úlohy z knihy "M. Kavan: Výrobní a provozní management": Optimalizujte přidělení prací 1, 2, 3 strojům A, B, C, D, přičemž výrobní náklady jsou dány tabulkou:

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	15	19	17	12
	2	12	10	15	9
	3	18	14	11	14

Musíme tedy vybrat jedno číslo v každém řádku, tak aby jejich součet byl minimální a přitom žádná dvě čísla neležela ve stejném sloupci.

# Přiřazovací problém - matematická formulace

Přidělení  $i$ -tého úkolu  $j$ -tému pracovnímu místu můžeme reprezentovat zápisem  $x_{ij} = 1$ , ostatním proměnným přiřadíme hodnotu 0. Pokud by bylo úkolů více než pracovních míst ( $m > n$ ), je úloha neřešitelná. V případě opačné nerovnosti dorovnáme úlohu zavedením fiktivních prací s nulovými náklady, tak aby  $m = n$ . Nadále předpokládejme, že je úloha vyrovnaná. Matematický model přiřazovacího problému zahrnuje podmínky, že řádkové a sloupcové součty v tabulce jsou rovny jedné, s tím že proměnné nabývají pouze hodnot 0 nebo 1. Úlohu můžeme zapsat takto:  
Minimalizujme účelovou funkci

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, j = 1, \dots, n$$

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy.



# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	15	19	17	12
	2	12	10	15	9
	3	18	14	11	14

Přidáme tedy jednu fiktivní činnost s nulovými náklady.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	15	19	17	12
	2	12	10	15	9
	3	18	14	11	14
	4	0	0	0	0

Zredukujeme řádky odečtením řádkového minima, v každém pak bude aspoň jedna nula.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	3	7	5	0
	2	3	1	6	0
	3	7	3	0	3
	4	0	0	0	0

Nyní bychom totéž provedli i pro sloupce, aby v každém byla jedna nula. To už ale nemusíme dělat díky přidané činnosti.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	3	7	5	0
	2	3	1	6	0
	3	7	3	0	3
	4	0	0	0	0

K pokrytí všech nul stačí tři čáry, takže tabulka není optimální. Krok metody spočívá v přičtení nejmenšího nepokrytého prvku k hodnotám v průsečících čar a současně jeho odečtení od všech nepokrytých prvků.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	2	6	5	0
	2	2	0	6	0
	3	6	2	0	3
	4	0	0	1	1

Po provedení kroku metody jsme dostali novou nepokrytou nulu a zbavili se dvojitě pokrytých nul. Musíme setrojit nové pokrytí.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	2	6	5	0
	2	2	0	6	0
	3	6	2	0	3
	4	0	0	1	1

Ověřme, zda je nová tabulka optimální. K pokrytí všech nul jsou potřeba minimálně čtyři čáry. Výpočet končí, jinak bychom zopakovali krok.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	2	6	5	0
	2	2	0	6	0
	3	6	2	0	3
	4	0	0	1	1

Mezi těmi, které nejsou pokryty dvojitě vybereme nezávislé nuly. Ty nám říkají, které práce kterým strojům přiřadit. Tedy 1-D, 2-B, 3-C. Stroji A se přiřadí fiktivní práce, tedy se nevyužije.

# Přiřazovací problém - řešení

Přiřazovací problém je možné řešit tzv. **mad'arskou metodou**. Jejím principem je převedení původní úlohy na úlohu redukovanou tak, aby v každé řadě (řadou označujeme souhrně řádky a sloupce) byla aspoň jedna nula a přitom ostatní sazby zůstaly kladné. Optimální tabulka je taková, která obsahuje  $n$  "nezávislých nul" (nezávislé jsou tehdy, když žádné dvě neleží ve stejné řadě - jako v sudoku). To poznáme podle toho, že nelze "přeškrtnout" všechny nuly pomocí méně než  $n$  vodorovných a svislých čar. Metodu ukážeme na řešení úvodní úlohy. Původní zadání je třeba vyrovnat, protože počet strojů je větší než počet prací.

		stroje			
	$c_{ij}$	A	B	C	D
práce	1	15	19	17	12
	2	12	10	15	9
	3	18	14	11	14

Optimální řešení znovu vyznačme v původní tabulce. Celkové náklady jsou  $12 + 10 + 11 = 33$ . Úloha nemusí mít jediné řešení - pokud je možné volit čáry pokrytí či vybírat nezávislé nuly více způsoby, všechna výsledná řešení budou mít stejnou hodnotu účelové funkce.



# Okružní dopravní problém

Problém se často též nazývá jako **Úloha obchodního cestujícího** a připomíná přiřazovací úlohu. Cílem je vyjít z nějakého výchozího stanoviště (označme jej  $A_1$ ), navštívit postupně každé jednou místa  $A_2, \dots, A_n$  a nakonec se vrátit zpět tak, aby délka trasy byla co nejmenší. Úloha má velké množství reálných aplikací - pravidelný rozvoz či svoz různých produktů (pekárny, mlékárny, popeláři, atd.).

# Okružní dopravní problém

Problém se často též nazývá jako **Úloha obchodního cestujícího** a připomíná přiřazovací úlohu. Cílem je vyjít z nějakého výchozího stanoviště (označme jej  $A_1$ ), navštívit postupně každé jednou místa  $A_2, \dots, A_n$  a nakonec se vrátit zpět tak, aby délka trasy byla co nejmenší. Úloha má velké množství reálných aplikací - pravidelný rozvoz či svoz různých produktů (pekárny, mlékárny, popeláři, atd.).

V matematickém modelu se také zavádějí **bivalentní proměnné**  $x_{ij}$  nabývající hodnoty 1 nebo 0 podle toho, zda cesta  $A_i, A_j$  bude na okružní trase zařazena či ne. Protože se každé místo projede právě jednou, tj. právě jednou bude koncovým a právě jednou výchozím bodem, máme stejně jako u přiřazovacího problému omezení ve formě jednotkových řádkových i sloupcových součtů. Okružní úloha je však o mnoho složitější, protože navíc obsahuje další omezení, které má zabránit tomu, aby se řešení rozpadlo do více samostatných cyklů (příklad viz tabulky).

# Okružní dopravní problém

Problém se často též nazývá jako **Úloha obchodního cestujícího** a připomíná přiřazovací úlohu. Cílem je vyjít z nějakého výchozího stanoviště (označme jej  $A_1$ ), navštívit postupně každé jednou místa  $A_2, \dots, A_n$  a nakonec se vrátit zpět tak, aby délka trasy byla co nejmenší. Úloha má velké množství reálných aplikací - pravidelný rozvoz či svoz různých produktů (pekárny, mlékárny, popeláři, atd.).

V matematickém modelu se také zavádějí **bivalentní proměnné**  $x_{ij}$  nabývající hodnoty 1 nebo 0 podle toho, zda cesta  $A_i, A_j$  bude na okružní trase zařazena či ne. Protože se každé místo projede právě jednou, tj. právě jednou bude koncovým a právě jednou výchozím bodem, máme stejně jako u přiřazovacího problému omezení ve formě jednotkových řádkových i sloupcových součtů. Okružní úloha je však o mnoho složitější, protože navíc obsahuje další omezení, které má zabránit tomu, aby se řešení rozpadlo do více samostatných cyklů (příklad viz tabulky).

Pro velká  $n$  je prakticky nemožné použití standartních optimalizačních algoritmů (s běžně dostupnou výpočetní technikou nenajdeme v reálném čase optimální řešení už pro 30 uzlů).

# Okružní dopravní problém - přípustnost řešení

Ilustrujme si rozdíl mezi přiřazovací a okružní úlohou na následujícím příkladě. Cílem je najít nějakou okružní trasu (pro jednoduchost neuvádíme tabulku nákladů a tedy nepožadujeme optimalitu) mezi městy  $A_1, \dots, A_5$ , může se nám tedy zdát, že je to stejné jako výběr dvojic měst, mezi kterými povede trasa. Znázorníme nějaký takový výběr v tabulce:

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	0	0	1	0	0
$A_2$	0	0	0	1	0
$A_3$	0	1	0	0	0
$A_4$	0	0	0	0	1
$A_5$	1	0	0	0	0

Jedná se o přípustné řešení okružní úlohy, reprezentuje trasu  $A_1 - A_3 - A_2 - A_4 - A_5 - A_1$ .

# Okružní dopravní problém - přípustnost řešení

Ilustrujme si rozdíl mezi přiřazovací a okružní úlohou na následujícím příkladě. Cílem je najít nějakou okružní trasu (pro jednoduchost neuvádíme tabulku nákladů a tedy nepožadujeme optimalitu) mezi městy  $A_1, \dots, A_5$ , může se nám tedy zdát, že je to stejné jako výběr dvojic měst, mezi kterými povede trasa. Znázorněme nějaký takový výběr v tabulce:

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	0	1	0	0	0
$A_2$	0	0	1	0	0
$A_3$	1	0	0	0	0
$A_4$	0	0	0	0	1
$A_5$	0	0	0	1	0

Jedná se o nepřípustné řešení okružní úlohy, reprezentuje dva samostatné cykly  $A_1 - A_2 - A_3 - A_1$  a  $A_4 - A_5 - A_4$ .

# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

K nalezení přibližného řešení lze využít heuristické metody, např. **hladový algoritmus**. Na úloze z knihy "J. Pelikán, V. Chýna: Kvantitativní management", ukážeme **metodu nejbližšího souseda**.

Pekárna v Kralupech vypravuje každé ráno dodávku, která zásobuje prodejny potravin v okolních městech a poté se vrací zpět. Doporučte, v jakém pořadí má města projet, aby ujel co nejméně km. Tabulka vzdáleností je následující:

# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

K nalezení přibližného řešení lze využít heuristické metody, např. **hladový algoritmus**. Na úloze z knihy "J. Pelikán, V. Chýna: Kvantitativní management", ukážeme **metodu nejbližšího souseda**.

Pekárna v Kralupech vypravuje každé ráno dodávku, která zásobuje prodejny potravin v okolních městech a poté se vrací zpět. Doporučte, v jakém pořadí má města projet, aby ujel co nejméně km. Tabulka vzdáleností je následující:

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13
Slaný	16	20	0	12	7	14	17
Velvary	8	12	12	0	10	17	10
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10
Vraný	25	28	14	17	7	0	15
Bříza	17	13	17	10	10	15	0

# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

K nalezení přibližného řešení lze využít heuristické metody, např. **hladový algoritmus**. Na úloze z knihy "J. Pelikán, V. Chýna: Kvantitativní management", ukážeme **metodu nejbližšího souseda**.

Pekárna v Kralupech vypravuje každé ráno dodávku, která zásobuje prodejny potravin v okolních městech a poté se vrací zpět. Doporučte, v jakém pořadí má města projet, aby ujel co nejméně km. Tabulka vzdáleností je následující:

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13
Slaný	16	20	0	12	7	14	17
Velvary	8	12	12	0	10	17	10
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10
Vraný	25	28	14	17	7	0	15
Bříza	17	13	17	10	10	15	0

Dle metody ze stávajícího města jedeme vždy do nejbližšího tak, aby se cesta nezacyklila. Dostaneme okruh Kralupy - Veltrusy - Velvary - Zlonice - Slaný - Vraný - Bříza - Kralupy o celkové délce  $4+12+10+7+14+15+17 = 79$  km.



# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

K nalezení přibližného řešení lze využít heuristické metody, např. **hladový algoritmus**. Na úloze z knihy "J. Pelikán, V. Chýna: Kvantitativní management", ukážeme **metodu nejbližšího souseda**.

Pekárna v Kralupech vypravuje každé ráno dodávku, která zásobuje prodejny potravin v okolních městech a poté se vrací zpět. Doporučte, v jakém pořadí má města projet, aby ujel co nejméně km. Tabulka vzdáleností je následující:

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13
Slaný	16	20	0	12	7	14	17
Velvary	8	12	12	0	10	17	10
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10
Vraný	25	28	14	17	7	0	15
Bříza	17	13	17	10	10	15	0

Metodu je dobré zkusit nastartovat i odjinud. Start z Veltrus dává okruh Veltrusy - Kralupy - Velvary - Zlonice - Slaný - Vraný - Bříza - Veltrusy o celkové délce  $4+8+10+7+14+15+13 = 71$  km.

# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

K nalezení přibližného řešení lze využít heuristické metody, např. **hladový algoritmus**. Na úloze z knihy "J. Pelikán, V. Chýna: Kvantitativní management", ukážeme **metodu nejbližšího souseda**.

Pekárna v Kralupech vypravuje každé ráno dodávku, která zásobuje prodejny potravin v okolních městech a poté se vrací zpět. Doporučte, v jakém pořadí má města projet, aby ujel co nejméně km. Tabulka vzdáleností je následující:

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13
Slaný	16	20	0	12	7	14	17
Velvary	8	12	12	0	10	17	10
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10
Vraný	25	28	14	17	7	0	15
Bříza	17	13	17	10	10	15	0

Start z Vraného dá okruh Vraný - Zlonice - Slaný - Velvary - Kralupy - Veltrusy - Bříza - Vraný o celkové délce  $7+7+12+8+4+13+15 = 66$  km, což je dokonce nejkratší možná trasa.

# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

Další heuristikou je **metoda výhodnostních čísel**. Je založena na srovnání délky trasy mezi městy  $1 - i - j - 1$  a součtu délek cest  $1 - i - 1, 1 - j - 1$ .

Výhodnostní číslo  $S_{ij}$  pak definujeme jako rozdíl těchto délek, neboli výhodnost propojení  $i$  a  $j$ :  $S_{ij} = c_{1i} + c_{1j} - c_{ij}$ .

Spočtěme matici výhodnostních čísel pro úlohu o pekařství:

# Okružní dopravní problém - přibližné řešení

Další heuristikou je **metoda výhodnostních čísel**. Je založena na srovnání délky trasy mezi městy  $1 - i - j - 1$  a součtu délek cest  $1 - i - 1, 1 - j - 1$ . Výhodnostní číslo  $S_{ij}$  pak definujeme jako rozdíl těchto délek, neboli výhodnost propojení  $i$  a  $j$ :  $S_{ij} = c_{1i} + c_{1j} - c_{ij}$ .

Spočtíme matici výhodnostních čísel pro úlohu o pekařství:

	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza
Veltrusy	X	0	0	0	1	8
Slaný	0	X	12	27	27	16
Velvary	0	12	X	16	16	15
Zlonice	0	27	16	X	36	25
Vraný	1	27	16	36	X	27
Bříza	8	16	15	25	27	X

Trasu tvoříme postupně (hladově) od největších výhodnostních čísel, přičemž se bráníme předčasnému uzavření okruhu. Dostaneme trasu Slaný - Zlonice - Vraný - Bříza - Velvary - Veltrusy. Startovní a koncové zůstávají Kralupy, dohromady tedy máme  $16+7+7+15+10+12+4 = 71$  km.

# Úloha celočíselného programování

Mezi speciální úlohy lineárního programování patří i úlohy celočíselného programování (integer programming, IP). Jedná se o standardní úlohy LP doplněné o podmínky celočíselnosti u některých ( **smíšené úlohy IP** ), případně všech proměnných ( **ryze celočíselné úlohy** ). Tyto podmínky zpravidla plynou přímo z ekonomického modelu, kdy proměnné vyjadřují počty kusů nedělitelných produktů, počty opakování nějaké aktivity, apod. U řady úloh se pracuje dokonce jen s proměnnými, které vyjadřují určité rozhodnutí nebo alternativu, nabývají hodnot  $\{0, 1\}$  a pak hovoříme o **bivalentních úlohách** .

# Úloha celočíselného programování

Mezi speciální úlohy lineárního programování patří i úlohy celočíselného programování (integer programming, IP). Jedná se o standardní úlohy LP doplněné o podmínky celočíselnosti u některých ( **smíšené úlohy IP** ), případně všech proměnných ( **ryze celočíselné úlohy** ). Tyto podmínky zpravidla plynou přímo z ekonomického modelu, kdy proměnné vyjadřují počty kusů nedělitelných produktů, počty opakování nějaké aktivity, apod. U řady úloh se pracuje dokonce jen s proměnnými, které vyjadřují určité rozhodnutí nebo alternativu, nabývají hodnot  $\{0, 1\}$  a pak hovoříme o **bivalentních úlohách** . Typickými představiteli takových úloh jsou například přiřazovací či okružní dopravní problém nebo též tzv. **"úloha o batohu"**:

Máme  $n$  různě cenných věcí s různou hmotností a batoh o omezené kapacitě. Úkolem je vybrat věci, které vložíme do batohu tak, aby nebyl přetížen a cena jeho obsahu byla co nejvyšší. (Řešení úlohy bez podmínky celočíselnosti by bylo triviální: Seřadili bychom věci dle klesajícího poměru cena/hmotnost a plnili batoh v tomto pořadí. U první věci, která by se nevešla celá, bychom vzali jen její poměrnou část do výše kapacity batohu.)

# Celočíselné programování- příklad

Příklad: Oděvní firma Styl, s.r.o. se zabývá se výrobou pánské módy. Za týden pracovníce ušijí  $x_1$  modelů "Marcel" a  $x_2$  modelů "Filip", Přitom na výrobu jednoho modelu "Marcel" je potřeba 10 hodin a náklady na materiál jsou 400 Kč. Pro model "Filip" je to 20 hodin, materiál 300 Kč. Firma dostala nabídku na účast na zahraničním prodejním veletrhu, který se koná za týden. Očekávaný zisk z prodeje je 20 Euro, resp. 30 Euro pro jednotlivé modely. Navrhněte optimální plán výroby, jestliže firma má k dispozici jednu pracovníci na plný a jednu na poloviční úvazek (celkem 60 h) a zásobu materiálu za 1300Kč.

# Celočíselné programování- příklad

Příklad: Oděvní firma Styl, s.r.o. se zabývá se výrobou pánské módy. Za týden pracovníce ušijí  $x_1$  modelů "Marcel" a  $x_2$  modelů "Filip", Přitom na výrobu jednoho modelu "Marcel" je potřeba 10 hodin a náklady na materiál jsou 400 Kč. Pro model "Filip" je to 20 hodin, materiál 300 Kč. Firma dostala nabídku na účast na zahraničním prodejním veletrhu, který se koná za týden. Očekávaný zisk z prodeje je 20 Euro, resp. 30 Euro pro jednotlivé modely. Navrhněte optimální plán výroby, jestliže firma má k dispozici jednu pracovníci na plný a jednu na poloviční úvazek (celkem 60 h) a zásobu materiálu za 1300Kč.

Matematický zápis úlohy z uvedeného příkladu je následující: Maximalizovat účelovou funkci

$$z = 20x_1 + 30x_2$$

za podmínek

$$400x_1 + 300x_2 \leq 1300$$

$$10x_1 + 20x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

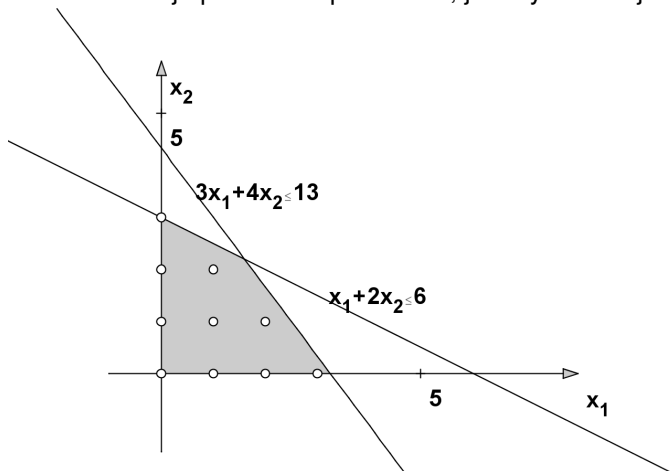


# Celočíselné programování- grafické znázornění

Úloha obsahuje pouze dvě proměnné, je tedy možné ji řešit graficky.

# Celočíselné programování- grafické znázornění

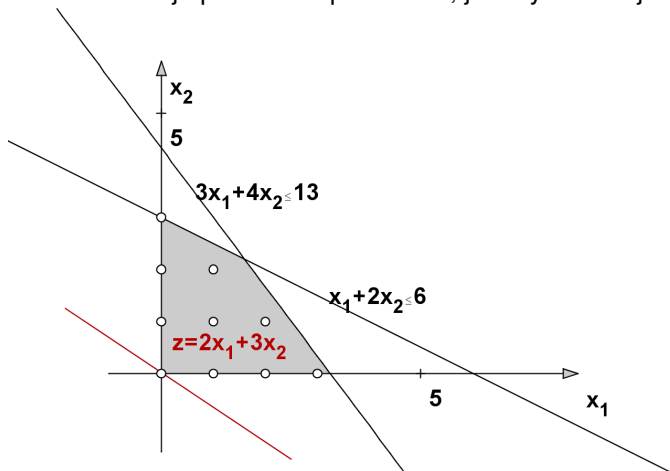
Úloha obsahuje pouze dvě proměnné, je tedy možné ji řešit graficky.



Znázorněme přípustnou množinu. Jsou to body o celočíselných souřadnicích ležící uvnitř čtyřúhelníka.

# Celočíselné programování- grafické znázornění

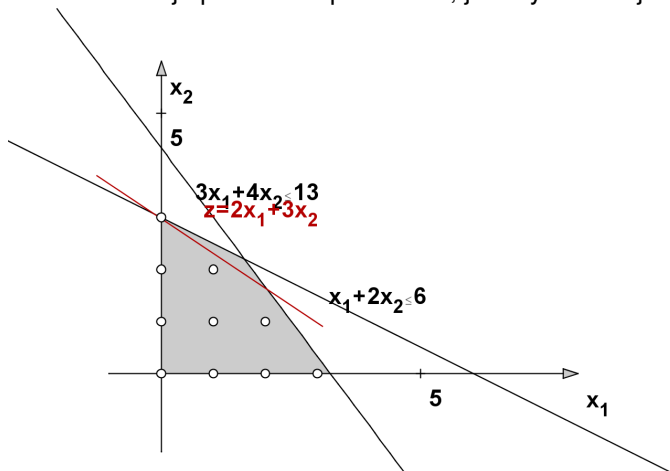
Úloha obsahuje pouze dvě proměnné, je tedy možné ji řešit graficky.



Přidáme nulovou izokvantu účelové funkce, vyjadřujeme v desítkách Eur.

# Celočíselné programování- grafické znázornění

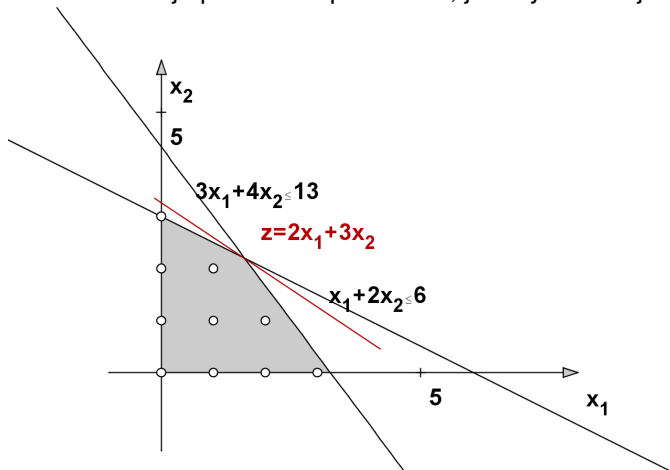
Úloha obsahuje pouze dvě proměnné, je tedy možné ji řešit graficky.



Nejvyšší izokvanta účelové funkce prochází bodem  $[0, 3]$ , což je hledané optimální řešení  $x^*$ . Získáme  $3 \cdot 30 = 90$  Euro.

# Celočíselné programování- grafické znázornění

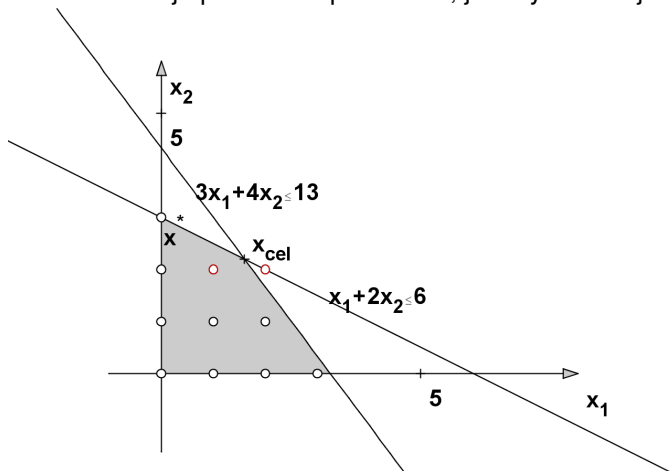
Úloha obsahuje pouze dvě proměnné, je tedy možné ji řešit graficky.



Optimální řešení úlohy bez omezení celočíselnosti je  $x_{cel} = [1, 6; 2, 2]$ , hodnota účelové funkce v tomto bodě je  $Z_{cel} = 98$  Euro.

# Celočíselné programování- grafické znázornění

Úloha obsahuje pouze dvě proměnné, je tedy možné ji řešit graficky.



Zakrouhlením  $x_{cel} = [1, 6; 2, 2]$  dostaneme bod  $[2, 2]$ , který není přípustný. Při zakrouhlení dolů na  $[1, 2]$  dostaneme neoptimální řešení, dává pouze  $20 + 2 \cdot 30 = 80$  Euro oproti 90 Euro v bodě  $x^*$ .

# Celočíselné programování- metody

V předchozím příkladě jsme viděli, že intuitivní přístup k řešení celočíselné úlohy zanedbat podmínky celočíselnosti, vyřešit získanou úlohu LP, tzv. **zrelaxovanou úlohu** a výsledné řešení zaokrouhlit, není vždy vhodný. Proto se používají jiné postupy vyvinuté speciálně pro celočíselné úlohy. Bývají však výpočetně náročnější, na běžných počítačích může výpočet zkolabovat i při počtu proměnných a omezení v řádu desítek.

# Celočíselné programování- metody

V předchozím příkladě jsme viděli, že intuitivní přístup k řešení celočíselné úlohy zanedbat podmínky celočíselnosti, vyřešit získanou úlohu LP, tzv. **zrelaxovanou úlohu** a výsledné řešení zaokrouhlit, není vždy vhodný. Proto se používají jiné postupy vyvinuté speciálně pro celočíselné úlohy. Bývají však výpočetně náročnější, na běžných počítačích může výpočet zkolabovat i při počtu proměnných a omezení v řádu desítek.

**Metody řezných nadrovin** (např. Gomoryho algoritmus) spočívají v hledání optima zrelaxované úlohy a následném přidání dalšího omezení, které toto optimum "odřízne", ale přitom mu budou vyhovovat všechna přípustná řešení původní úlohy. Tyto metody jsou starší a méně používané.



# Celočíselné programování- metody

V předchozím příkladě jsme viděli, že intuitivní přístup k řešení celočíselné úlohy zanedbat podmínky celočíselnosti, vyřešit získanou úlohu LP, tzv. **zrelaxovanou úlohu** a výsledné řešení zaokrouhlit, není vždy vhodný. Proto se používají jiné postupy vyvinuté speciálně pro celočíselné úlohy. Bývají však výpočetně náročnější, na běžných počítačích může výpočet zkolabovat i při počtu proměnných a omezení v řádu desítek.

**Metody řezných nadrovin** (např. Gomoryho algoritmus) spočívají v hledání optima zrelaxované úlohy a následném přidání dalšího omezení, které toto optimum "odřízne", ale přitom mu budou vyhovovat všechna přípustná řešení původní úlohy. Tyto metody jsou starší a méně používané.

**Kombinatorické metody** jsou založeny na efektivním prohledávání přípustné množiny, která pro ryze celočíselnou úlohu obsahuje konečně, avšak zpravidla velmi mnoho prvků. V programových systémech se nejčastěji využívá metody **větví a mezí** (též Branch and Bound, tj. B & B), kterou si blíže popíšeme.

# Celočíselné programování- metody

V předchozím příkladě jsme viděli, že intuitivní přístup k řešení celočíselné úlohy zanedbat podmínky celočíselnosti, vyřešit získanou úlohu LP, tzv. **zrelaxovanou úlohu** a výsledné řešení zaokrouhlit, není vždy vhodný. Proto se používají jiné postupy vyvinuté speciálně pro celočíselné úlohy. Bývají však výpočetně náročnější, na běžných počítačích může výpočet zkolabovat i při počtu proměnných a omezení v řádu desítek.

**Metody řezných nadrovin** (např. Gomoryho algoritmus) spočívají v hledání optima zrelaxované úlohy a následném přidání dalšího omezení, které toto optimum "odřízne", ale přitom mu budou vyhovovat všechna přípustná řešení původní úlohy. Tyto metody jsou starší a méně používané.

**Kombinatorické metody** jsou založeny na efektivním prohledávání přípustné množiny, která pro ryze celočíselnou úlohu obsahuje konečně, avšak zpravidla velmi mnoho prvků. V programových systémech se nejčastěji využívá metody **větví a mezí** (též Branch and Bound, tj. B & B), kterou si blíže popíšeme.

**Speciální metody** se používají pro úlohy se speciální strukturou, jde např. o různé heuristiky pro okružní dopravní problém nebo Maďarskou metodu.

# Celočíselné programování- metoda B & B

Množina přípustných řešení se postupně dělí na menší části (branching), kde sledujeme horní, (při minimalizaci dolní) hranici hodnot účelové funkce (bounding). To nám umožní vytipovat podmnožinu, kde nejpravděpodobněji nastane optimum a také podmnožiny, kde optimum určitě nebude.

# Celočíselné programování- metoda B & B

Množina přípustných řešení se postupně dělí na menší části (branching), kde sledujeme horní, (při minimalizaci dolní) hranici hodnot účelové funkce (bounding). To nám umožní vytipovat podmnožinu, kde nejpravděpodobněji nastane optimum a také podmnožiny, kde optimum určitě nebude.

**Větvení** je možné provést pomocí řešení klasické úlohy LP získané relaxací celočíselné úlohy - přípustnou množinu označme  $M_0$ . Je-li její bod optima  $x^0$  celočíselný, našli jsme již optimální řešení původní úlohy. Jinak vybereme nějaké  $i$ , pro něž je  $i$ -tá složka řešení  $x_i^0$  necelá, a přidáme dodatečné omezení  $x_i \leq a$ , resp.  $x_i \geq b$ , kde  $a$ ,  $b$  jsou celá čísla obklopující  $x_i$ . Tím rozdělíme množinu  $M_0$  na podmnožiny  $M_1$  a  $M_2$ .

# Celočíselné programování- metoda B & B

Množina přípustných řešení se postupně dělí na menší části (branching), kde sledujeme horní, (při minimalizaci dolní) hranici hodnot účelové funkce (bounding). To nám umožní vytipovat podmnožinu, kde nejpravděpodobněji nastane optimum a také podmnožiny, kde optimum určitě nebude.

**Větvení** je možné provést pomocí řešení klasické úlohy LP získané relaxací celočíselné úlohy - přípustnou množinu označme  $M_0$ . Je-li její bod optima  $x^0$  celočíselný, našli jsme již optimální řešení původní úlohy. Jinak vybereme nějaké  $i$ , pro něž je  $i$ -tá složka řešení  $x_i^0$  necelá, a přidáme dodatečné omezení  $x_i \leq a$ , resp.  $x_i \geq b$ , kde  $a$ ,  $b$  jsou celá čísla obklopující  $x_i$ . Tím rozdělíme množinu  $M_0$  na podmnožiny  $M_1$  a  $M_2$ .

Na každé z nich zase najdeme optimum účelové funkce  $x^1$  a  $x^2$  a určíme jejich hodnoty účelové funkce  $z^1$  a  $z^2$ . Celé části těchto hodnot nám dávají **horní mez** pro účelovou funkci na množinách  $M_1$  a  $M_2$ . Celý proces pokračuje tak dlouho, dokud se všechny větve neuzavřou tak, že:

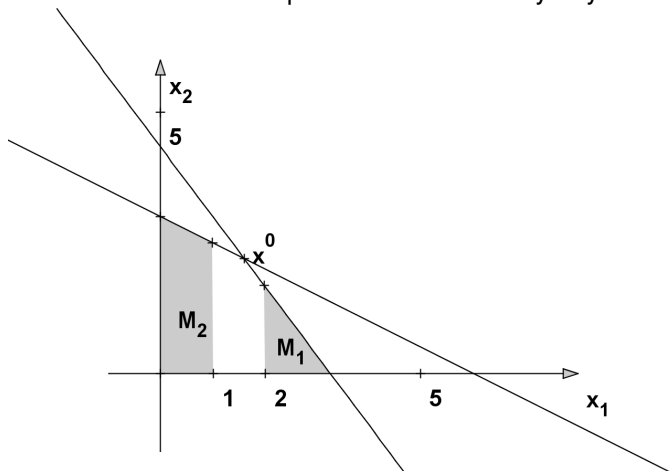
- Ve větvi je nalezeno celočíselné řešení nebo
- ve větvi neexistuje přípustné řešení nebo
- ve větvi je nalezeno necelé řešení, jehož hodnota je menší než hodnota celočíselného řešení z jiné větve

# Celočíselné programování- použití metody B & B

Ukažme metodu B & B pro úlohu rozvržení výroby textilu

# Celočíselné programování- použití metody B & B

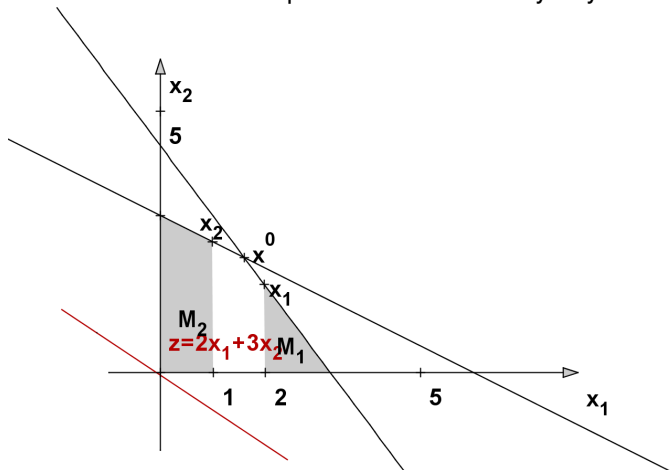
Ukažme metodu B & B pro úlohu rozvržení výroby textilu



Již máme řešení relaxace úvodní úlohy  $x^0 = x_{cel} = [1, 6; 2, 2]$  Jeho první složka je necelá, přidáme tedy omezení  $x_1 \geq 2$ , resp.  $x_1 \leq 1$ , čímž vytvoříme množiny  $M_1$  a  $M_2$ .

# Celočíselné programování- použití metody B & B

Ukažme metodu B & B pro úlohu rozvržení výroby textilu

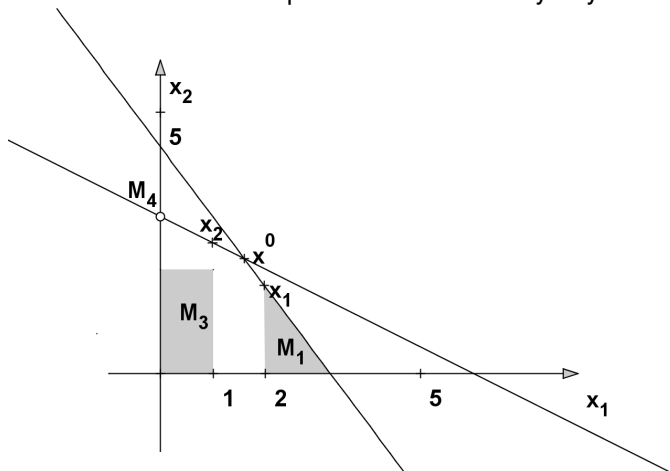


Na množině  $M_1$  dostaneme optimum  $x^1 = [2; \frac{5}{3}]$  a na  $M_2$  řešení  $x^2 = [1; \frac{5}{2}]$ . Jejich hodnoty jsou  $z^1 = 90$  a  $z^2 = 95$ , což dává horní meze pro  $M_1$  a  $M_2$ .



# Celočíselné programování- použití metody B & B

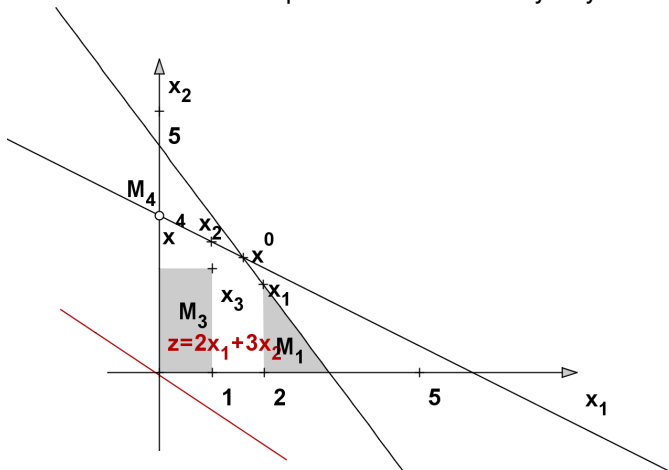
Ukažme metodu B & B pro úlohu rozvržení výroby textilu



Množina  $M_2$  má vyšší horní mez, takže s dělením pokračujeme na ní. Druhá složka  $x^2$  je rovna  $\frac{5}{2}$ , přidáme tedy omezení  $x_2 \leq 2$ , resp.  $x_2 \geq 3$ , čímž vytvoříme množiny  $M_3$  a  $M_4$  (ta je jen jednobodová).

# Čeločíselné programování- použití metody B & B

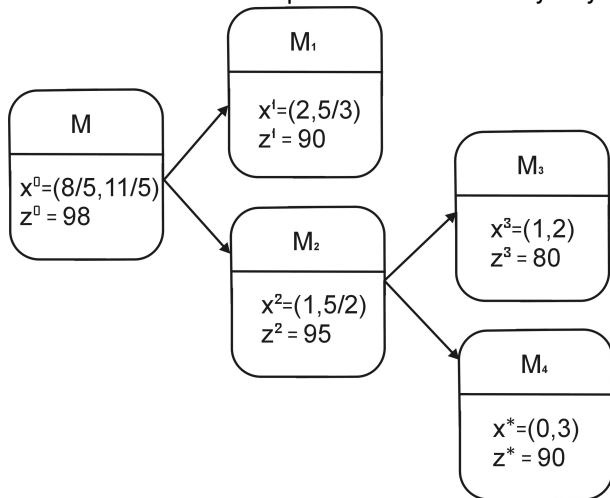
Ukažme metodu B & B pro úlohu rozvržení výroby textilu



Řešení  $x^3$  a  $x^4$  jsou již obě celočíselná, hodnoty účelové funkce v nich jsou  $z^3 = 80$  a  $z^4 = 90$ . Výpočet končí, na žádné větvi (ani  $M_1$ ) už nemůžeme dostat více než 90 Euro v bodě optima  $x^4 = [0, 3]$ .

# Celočíselné programování- použití metody B & B

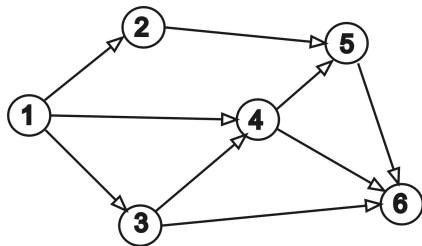
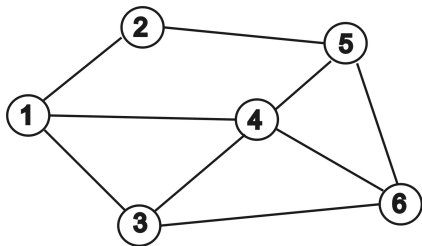
Ukažme metodu B & B pro úlohu rozvržení výroby textilu



Postup řešení můžeme znázornit schematicky.

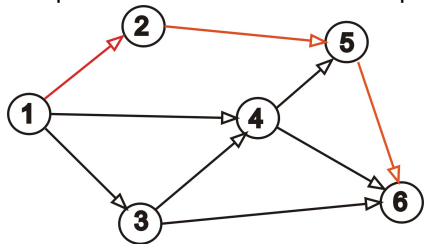
# Optimalizace v grafech - základní pojmy

Řadu reálných systémů (např. distribuční síť) lze modelovat rovinnými grafy. Graf je tvořen **uzly**, které budeme značit  $u_1, \dots, u_n$  a **hranami**, přičemž hranu mezi uzly  $u_i$  a  $u_j$  označíme  $h_{ij}$ . V rovině můžeme znázornit graf pomocí bodů (koleček) a spojnic mezi nimi. Hranu, které umožňují pohyb v obou směrech nazýváme **neorientované**. Je-li povolen pouze jeden směr pohybu, znázorníme to na grafu šipkou a takové "jednosměrné"hrany nazýváme **orientované**. Neorientovaným grafem nazveme graf obsahující pouze neorientované hrany, jinak jej nazveme orientovaným. Na obrázku je znázorněn neorientovaný a orientovaný graf.



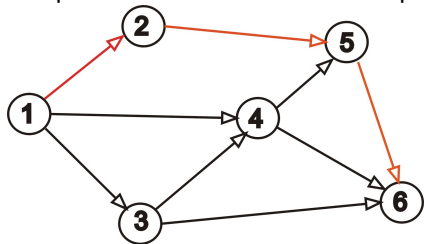
# Optimalizace v grafech - základní pojmy

**Cestou** z uzlu  $u_i$  do uzlu  $u_j$  nazveme posloupnost na sebe navazujících hran, z nichž první začíná v  $u_i$  a poslední končí v  $u_j$ . Pokud cesta respektuje orientaci hran, nazývá se orientovaná (v opačném případě neorientovaná). Na obrázku je znázorněna jedna z orientovaných cest z uzlu 1 do uzlu 6. Naopak z uzlu 6 do uzlu 1 vedou pouze neorientované cesty.



# Optimalizace v grafech - základní pojmy

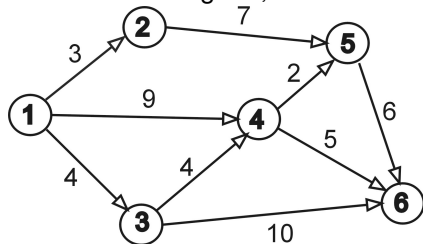
**Cestou** z uzlu  $u_i$  do uzlu  $u_j$  nazveme posloupnost na sebe navazujících hran, z nichž první začíná v  $u_i$  a poslední končí v  $u_j$ . Pokud cesta respektuje orientaci hran, nazývá se orientovaná (v opačném případě neorientovaná). Na obrázku je znázorněna jedna z orientovaných cest z uzlu 1 do uzlu 6. Naopak z uzlu 6 do uzlu 1 vedou pouze neorientované cesty.



Cestu, pro kterou  $u_i = u_j$ , nazveme **cyklus**, v případě neorientovaného grafu **kružnice**. Zobrazený graf obsahuje například kružnici 1 – 3 – 4 – 1. Graf, ve kterém mezi libovolnými dvěma uzly existuje aspoň jedna neorientovaná cesta, se nazývá **souvislý**. Každý souvislý neorientovaný graf, který neobsahuje kružnici, se nazývá **strom**.

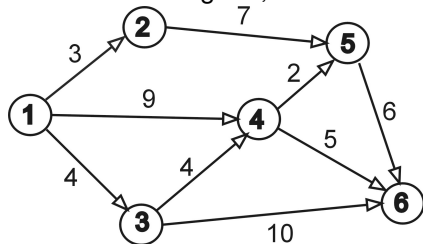
# Optimalizace v grafech - základní pojmy

Při řešení optimalizačních úloh zpravidla pracujeme s **hranově ohodnocenými** grafy. Hranám jsou přiřazeny hodnoty  $y_{ij}$  podle ekonomického významu (např. vzdálenosti mezi distribučními centry či náklady na přepravu mezi centry, apod.) Souvislý orientovaný a nezáporně ohodnocený graf se dvěma speciálními uzly (vstupem a výstupem) nazveme **síť**. Přidáme-li ohodnocení hran do našeho grafu, získáme síť se vstupním uzlem 1 a výstupním uzlem 6.



# Optimalizace v grafech - základní pojmy

Při řešení optimalizačních úloh zpravidla pracujeme s **hranově ohodnocenými** grafy. Hranám jsou přiřazeny hodnoty  $y_{ij}$  podle ekonomického významu (např. vzdálenosti mezi distribučními centry či náklady na přepravu mezi centry, apod.) Souvislý orientovaný a nezáporně ohodnocený graf se dvěma speciálními uzly (vstupem a výstupem) nazveme **sít'**. Přidáme-li ohodnocení hran do našeho grafu, získáme síť se vstupním uzlem 1 a výstupním uzlem 6.



**Délkou cesty** nazveme součet ohodnocení jejích hran. Například mezi délka orientované cesty 1-2-5-6 je  $3+7+6=16$ . **Pozor!** Graf je definován pomocí množiny uzlů a množiny hran, nikoliv zakreslením. Délky spojnic nemusí a často ani nemohou odpovídat ohodnocení hran.



# Optimalizace v grafech - úlohy

Na grafech se řeší řada úloh:

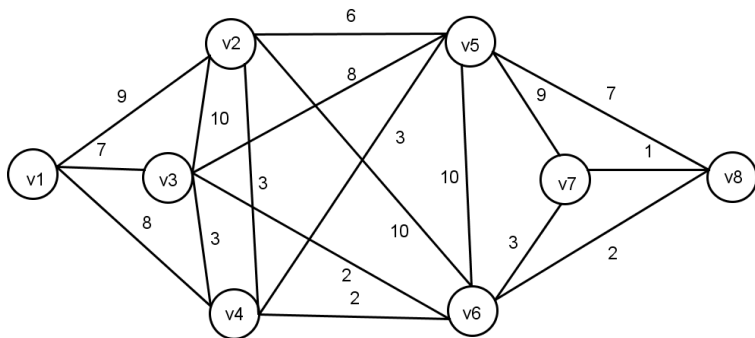
- Standartní optimalizační úlohou je hledání **nejkratší cesty** mezi dvěma uzly. Úloha se řeší v orientovaných i neorientovaných grafech. existuje více algoritmů, některé k určení celé matice vzdáleností. Jeden z nejznámějších algoritmů je Dijkstrův algoritmus.
- Hledání **minimální kostry** grafu - úkolem je vybrat takovou podmnožinu hran, aby mezi každými dvěma uzly existovala cesta a aby celkové ohodnocení bylo minimální (kostra nesmí obsahovat cyklus).
- Určení **maximálního toku** v síti (propustnosti sítě): Představuje - li ohodnocení v síti přepravní kapacitu hran, pak úkolem je určení maximálního počtu jednotek, které je možné přepravit ze vstupního do výstupního uzlu.
- Další úlohy, jako problém barvení grafu, problém čínského pošťáka, problém obchodního cestujícího, medián grafu, centr grafu, atd.

# Optimalizace v grafech - minimální kostra

Pro nalezení kostry grafu s minimálním celkovým ohodnocením hran lze použít hladový (Kruskalův) algoritmus: do kostry postupně zařazujeme hrany s nejnižší hodnotou tak dlouho, dokud nejsou propojeny všechny uzly. Přitom nesmíme dopustit vznik cyklu: takové hrany, které by uzavřely okruh, do kostry nezahrneme. Nalezněme minimální kostru v grafu z knihy T. Šubrt: Ekonomicko-matematické metody:

# Optimalizace v grafech - minimální kostra

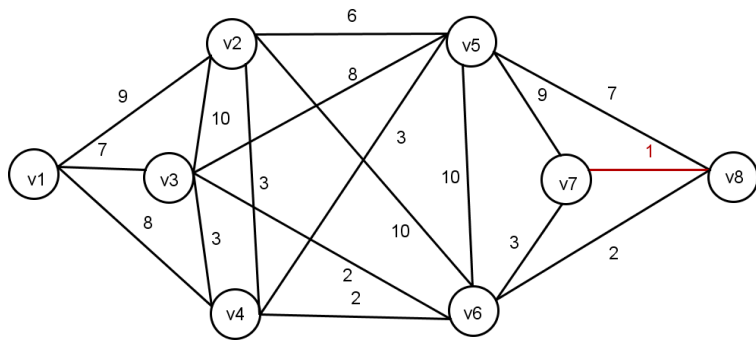
Pro nalezení kostry grafu s minimálním celkovým ohodnocením hran lze použít hladový (Kruskalův) algoritmus: do kostry postupně zařazujeme hrany s nejnižší hodnotou tak dlouho, dokud nejsou propojeny všechny uzly. Přitom nesmíme dopustit vznik cyklu: takové hrany, které by uzavřely okruh, do kostry nezahrneme. Nalezneme minimální kostru v grafu z knihy T. Šubrt: Ekonomicko-matematické metody:



Nejprve přidáme hranu s hodnotou 1.

# Optimalizace v grafech - minimální kostra

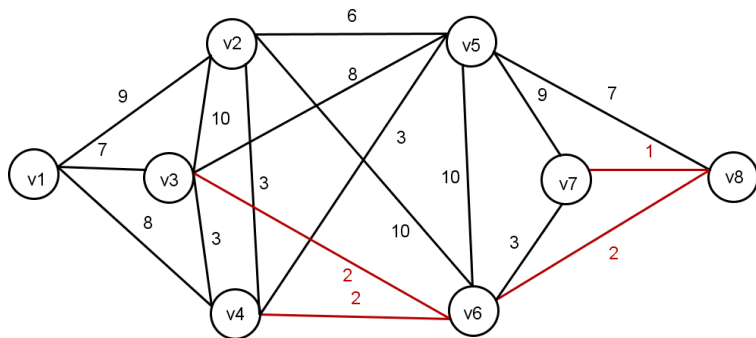
Pro nalezení kostry grafu s minimálním celkovým ohodnocením hran lze použít hladový (Kruskalův) algoritmus: do kostry postupně zařazujeme hrany s nejnižší hodnotou tak dlouho, dokud nejsou propojeny všechny uzly. Přitom nesmíme dopustit vznik cyklu: takové hrany, které by uzavřely okruh, do kostry nezahrneme. Nalezněme minimální kostru v grafu z knihy T. Šubrt: Ekonomicko-matematické metody:



Dále vybereme všechny hrany s hodnotou 2.

# Optimalizace v grafech - minimální kostra

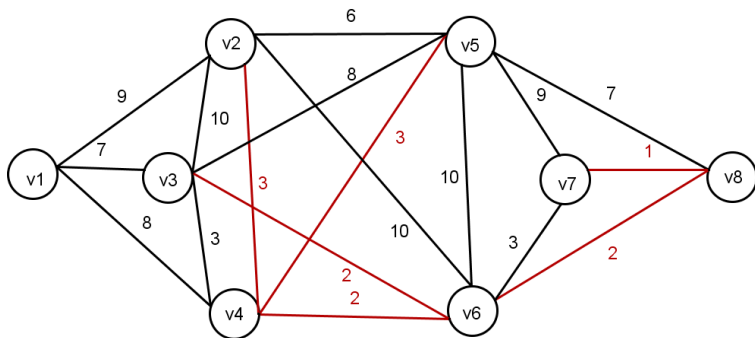
Pro nalezení kostry grafu s minimálním celkovým ohodnocením hran lze použít hladový (Kruskalův) algoritmus: do kostry postupně zařazujeme hrany s nejnižší hodnotou tak dlouho, dokud nejsou propojeny všechny uzly. Přitom nesmíme dopustit vznik cyklu: takové hrany, které by uzavřely okruh, do kostry nezahrneme. Nalezneme minimální kostru v grafu z knihy T. Šubrt: Ekonomicko-matematické metody:



Přidáme hrany s hodnotou 3 kromě v3-v4, která by uzavřela okruh.

# Optimalizace v grafech - minimální kostra

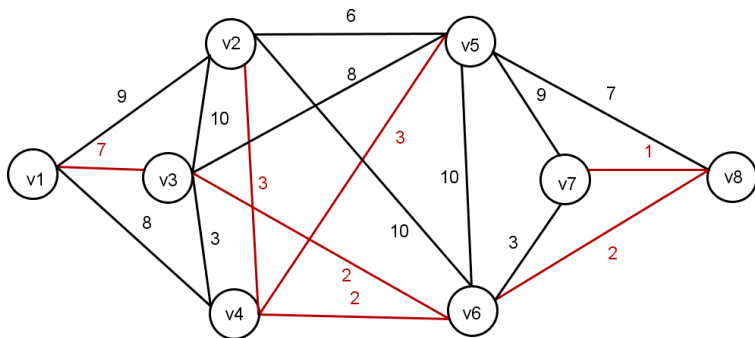
Pro nalezení kostry grafu s minimálním celkovým ohodnocením hran lze použít hladový (Kruskalův) algoritmus: do kostry postupně zařazujeme hrany s nejnižší hodnotou tak dlouho, dokud nejsou propojeny všechny uzly. Přitom nesmíme dopustit vznik cyklu: takové hrany, které by uzavřely okruh, do kostry nezahrneme. Nalezneme minimální kostru v grafu z knihy T. Šubrt: Ekonomicko-matematické metody:



Hrana s hodnotou 6 nemůže být do kostry zahrnuta, přidáme tedy hranu s hodnotou 7.

# Optimalizace v grafech - minimální kostra

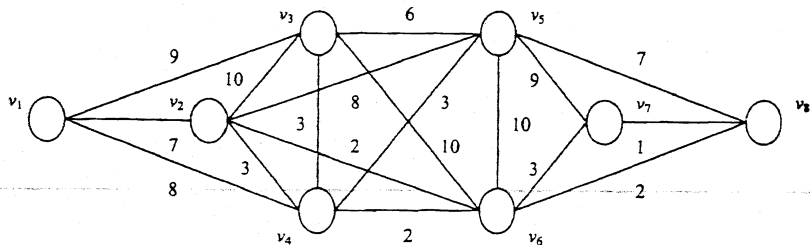
Pro nalezení kostry grafu s minimálním celkovým ohodnocením hran lze použít hladový (Kruskalův) algoritmus: do kostry postupně zařazujeme hrany s nejnižší hodnotou tak dlouho, dokud nejsou propojeny všechny uzly. Přitom nesmíme dopustit vznik cyklu: takové hrany, které by uzavřely okruh, do kostry nezahrneme. Nalezneme minimální kostru v grafu z knihy T. Šubrt: Ekonomicko-matematické metody:



Dostali jsem již souvislý podgraf, tedy kostru, celková hodnota jejích hran je 20.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

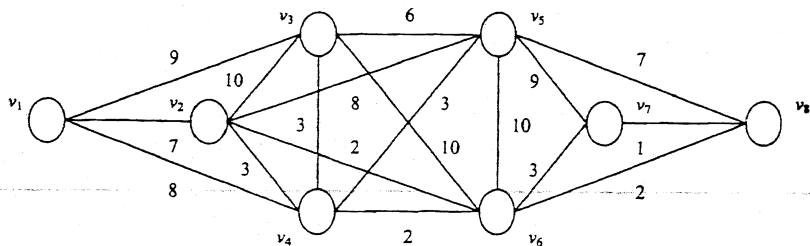
Pro hledání nejkratší cesty z uzlu  $v_1$  do ostatních uzlů lze použít **Dijkstrův algoritmus**: předvedme na grafu z předchozího příkladu:





# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Pro hledání nejkratší cesty z uzlu  $v_1$  do ostatních uzlů lze použít **Dijkstrův algoritmus**: předvedme na grafu z předchozího příkladu:



Algoritmus rozděljuje uzly podle toho, zda už do nich nejkratší cestu známe nebo ne. Začínáme s cestou délky 0 z  $v_1$  do  $v_1$ . Nejkratší cestu prodloužíme vždy o jednu hranu. Projdeme všechny uzly se známou délkou cesty z  $v_1$ , sečteme tyto délky postupně s hodnotami hran z uzlů vycházejících a vybereme ze všech součtů nejmenší, tak získáme délku cesty do nějakého nového uzlu a postup dále opakujeme.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	v2 (2)	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	v2 (10)	v2 (3)	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	v4 (8)	v4 (3)	v4 (3)	v3 (3)	v4 (3)	v4 (2)	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0							

V prvním kroku známe jen vzdálenost do v1, projdeme jeho sousedy a vybereme hranu s nejmenší hodnotou, což je v1-v2 s délkou 7. Vrchol v2 tedy zařadíme do skupiny se známou vzdáleností z v1.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	<del>v2 (2)</del>	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	<del>v2 (10)</del>	<del>v2 (3)</del>	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	v4 (8)	v4 (3)	v4 (3)	v3 (3)	v4 (3)	v4 (2)	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0	7						

V druhém kroku procházíme kromě sousedů v1 také sousedy v2, délky cest přes v2 jsou 7+10, 7+3, 7+8, 7+2, takže nejkratší novou cestou bude v1-v4 délky 8. Přidáme v4 mezi uzly, do nichž nejkratší cestu známe.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	<del>v2 (2)</del>	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	<del>v2 (10)</del>	<del>v2 (3)</del>	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	<del>v4 (8)</del>	<del>v4 (3)</del>	<del>v4 (3)</del>	v3 (3)	<del>v4 (3)</del>	<del>v4 (2)</del>	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0	7		8				

V dalším kroku procházíme dosud nezařazené sousedy uzlů v1, v2 a v4. Nejmenší celková délka cest přes tyto uzly do jejich sousedů je v1-v3 s hodnotou 9. To bude tedy vzdálenost do uzlu v3.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	v2 (2)	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	v2 (10)	v2 (3)	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	v4 (8)	v4 (3)	v4 (3)	v3 (3)	v4 (3)	v4 (2)	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0	7	9	8				

Stejnou vzdálenost (také 9) má cesta přes v2 do v6.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	v2 (2)	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	v2 (10)	v2 (3)	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	v4 (8)	v4 (3)	v4 (3)	v3 (3)	v4 (3)	v4 (2)	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0	7	9	8		9		

Z dosud nezařazených uzlů má nejmenší celkovou vzdálenost přes jednu hranu z již vytvořených cest uzel v5, který napojíme z v4, jeho vzdálenost z v1 je 11.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	v2 (2)	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	v2 (10)	v2 (3)	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	v4 (8)	v4 (3)	v4 (3)	v3 (3)	v4 (3)	v4 (2)	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0	7	9	8	11	9		

Stejně vzdálenosti 11 dosáhneme napojením uzlu v8 přes v6.

# Optimalizace v grafech - nejkratší cesta

Postup algoritmu se lépe sleduje v tabulce sousedů (v závorkách jsou uvedeny hodnoty hran):

sousedí	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
	v2 (7)	v1 (7)	v1 (9)	v1 (8)	v2 (8)	v2 (2)	v5 (10)	v5 (7)
	v3 (9)	v3 (10)	v2 (10)	v2 (3)	v3 (6)	v3 (10)	v6 (3)	v6 (2)
	v4 (8)	v4 (3)	v4 (3)	v3 (3)	v4 (3)	v4 (2)	v8 (1)	v7 (1)
		v5 (8)	v5 (6)	v5 (3)	v6 (10)	v5 (10)		
		v6 (2)	v6 (10)	v6 (2)	v7 (9)	v7 (3)		
					v8 (7)	v8 (2)		
vzd. z v1	0	7	9	8	11	9		11

Nakonec připojíme uzel v7, nejkratší možnost je přes v6, celková vzdálenost do něj je 12.



# Optimalizace v grafech - medián grafu

**Medián grafu** minimalizuje součet vzdáleností od ostatních uzlů. Spočítejme ho pro úlohu o umístění skladu pro města uvažovaná ve výše řešené okružní úloze.

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza	SUMA
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17	88
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13	99
Slaný	16	20	0	12	7	14	17	86
Velvary	8	12	12	0	10	17	10	69
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10	74
Vraný	25	28	14	17	7	0	15	106
Bříza	17	13	17	10	10	15	0	82

# Optimalizace v grafech - medián grafu

**Medián grafu** minimalizuje součet vzdáleností od ostatních uzlů. Spočítejme ho pro úlohu o umístění skladu pro města uvažovaná ve výše řešené okružní úloze.

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza	SUMA
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17	88
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13	99
Slaný	16	20	0	12	7	14	17	86
Velvary	8	12	12	0	10	17	10	69
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10	74
Vraný	25	28	14	17	7	0	15	106
Bříza	17	13	17	10	10	15	0	82

Aby se do skladu nejezdilo celkem co nejméně kilometrů, je nejlepší jej umístit ve Velvarech.

Pozn.: Při umístění dvou skladů hovoříme o dvoumediánu, atd.

# Optimalizace v grafech - centr grafu

**Centr grafu** minimalizuje maximum vzdáleností od ostatních uzlů. Spočítejme ho pro úlohu o umístění hasičské stanice pro města uvažovaná ve výše řešené okružní úloze.

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza	MAX
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17	25
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13	28
Slaný	16	20	0	12	7	14	17	20
Velvary	8	12	12	0	10	17	10	17
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10	22
Vraný	25	28	14	17	7	0	15	28
Bříza	17	13	17	10	10	15	0	17

# Optimalizace v grafech - centr grafu

**Centr grafu** minimalizuje maximum vzdáleností od ostatních uzlů. Spočítejme ho pro úlohu o umístění hasičské stanice pro města uvažovaná ve výše řešené okružní úloze.

	Kralupy	Veltrusy	Slaný	Velvary	Zlonice	Vraný	Bříza	MAX
Kralupy	0	4	16	8	18	25	17	25
Veltrusy	4	0	20	12	22	28	13	28
Slaný	16	20	0	12	7	14	17	20
Velvary	8	12	12	0	10	17	10	17
Zlonice	18	22	7	10	0	7	10	22
Vraný	25	28	14	17	7	0	15	28
Bříza	17	13	17	10	10	15	0	17

Aby města byla pro hasiče co nejrychleji dostupná, nejlepší je umístit stanici ve Velvarech nebo Bříze.

Pozn.: Při umístění dvou stanic hovoříme o dvoucentru, atd.

# Optimalizace v síťových grafech

Nejznámější úlohou je hledání maximálního toku v síti (např. vodovodní potrubí, silniční či datová síť,...). Pro řešení potřebujeme znát:

- popis potrubí (graf, zpravidla orientovaný)
- odkud voda vytéká (speciální uzel: zdroj)
- kam voda teče (speciální uzel: cíl, spotřebič)
- kolik vody může danou hranou protéct (kapacita = nazáporné ohodnocení hran)

Graf s vyjmenovanými vlastnostmi označujeme jako **síť**.

# Optimalizace v síťových grafech

Nejznámější úlohou je hledání maximálního **toku v síti** (např. vodovodní potrubí, silniční či datová síť,...). Pro řešení potřebujeme znát:

- popis potrubí (graf, zpravidla orientovaný)
- odkud voda vytéká (speciální uzel: zdroj)
- kam voda teče (speciální uzel: cíl, spotřebič)
- kolik vody může danou hranou protéct (kapacita = nazáporné ohodnocení hran)

Graf s vyjmenovanými vlastnostmi označujeme jako **síť**.

**Tokem** nazveme funkci přiřazující každé hraně nezáporné číslo nepřesahující kapacitu splňující tzv. Kirchhoffovy zákony: **součet toků na hranách vstupujících je stejný jako na vystupujících**. Tyto podmínky musí platit ve všech uzlech kromě zdroje a cíle. **Velikost toku** je součet toků vycházejících ze zdroje. Pokud ze zdroje nic nevytéká, jde o nulový tok.

# Optimalizace v síťových grafech

Pro hledání maximálního toku v síti se používají zlepšovací algoritmy: začne se zpravidla s nulovým tokem a hledá se cesta, na níž mají všechny hrany nenulovou rezervu (rozdíl kapacity a skutečného toku). Tok lze navýšit na dané cestě o minimální hodnotu rezervy. Postupujeme dále prohledáváním grafu a hledáním další zlepšující cesty. Prostou aplikací tohoto postupu bychom ale nemuseli nalézt nejlepší řešení, někdy je potřeba na některých hranách naopak tok zmenšit, aby se mohl vést lepší cestou a celková velikost toku se zvýšila.

# Optimalizace v síťových grafech

Pro hledání maximálního toku v síti se používají zlepšovací algoritmy: začne se zpravidla s nulovým tokem a hledá se cesta, na níž mají všechny hrany nenulovou rezervu (rozdíl kapacity a skutečného toku). Tok lze navýšit na dané cestě o minimální hodnotu rezervy. Postupujeme dále prohledáváním grafu a hledáním další zlepšující cesty. Prostou aplikací tohoto postupu bychom ale nemuseli nalézt nejlepší řešení, někdy je potřeba na některých hranách naopak tok zmenšit, aby se mohl vést lepší cestou a celková velikost toku se zvýšila. Vylepšený algoritmus (**Ford-Fulkerson**) je následující:

- U každé hrany evidujeme její rezervu i "rezervu v protisměru" (o kolik lze tok snížit). Na začátku u výchozího nulového toku jsou rezervy rovny kapacitám (rezervy v protisměru u orientovaných hran nulové)
- Vybereme zlepšující cestu a navýšíme tok o její rezervu. Současně o stejnou hodnotu snížíme rezervy všech hran na cestě a navýšíme jejich rezervy v protisměru.
- Postupujeme takto dál, dokud lze nalézt cestu s nenulovou rezervou.

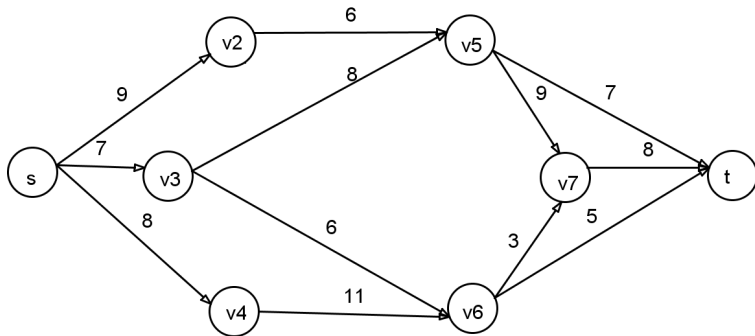


# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

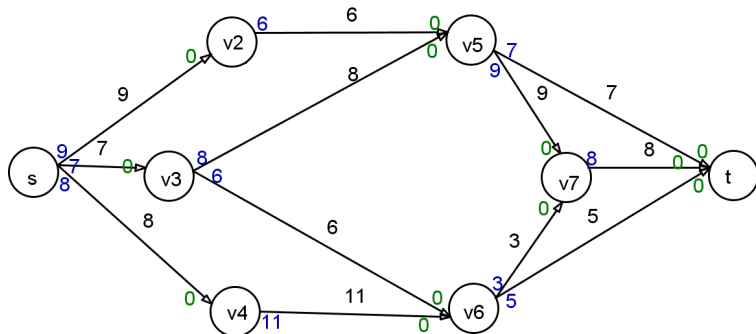
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Začneme s nulovým tokem, na hranách modře vyznačíme rezervy, zeleně "rezervy v protisměru".

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

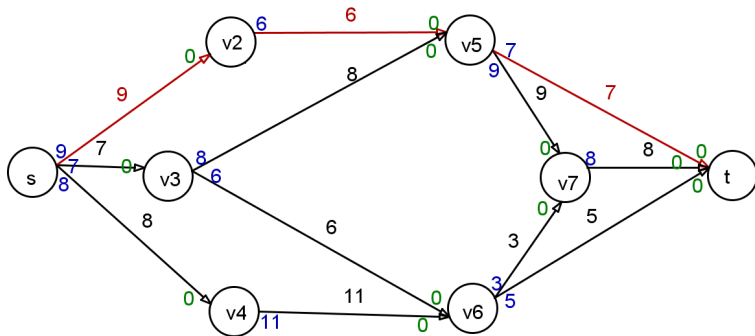
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Najdeme libovolnou zlepšující cestu.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

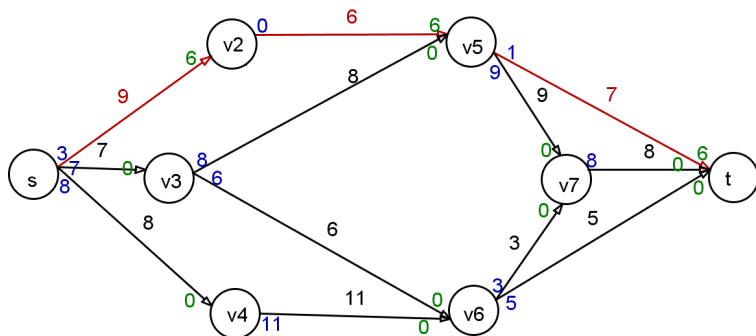
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Na zvolené cestě je nejmenší rezerva 6, o tuto hodnotu navýšíme tok na cestě. Rezervy na všech vybraných hranách tedy klesnou o šest a o stejnou hodnotu se zvýší protismerné rezervy.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

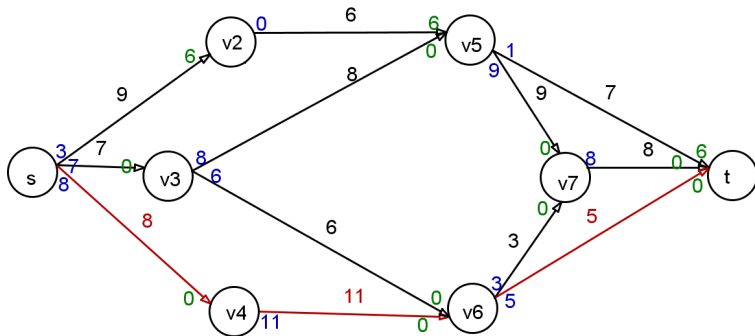
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Najdeme další zlepšující cestu.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

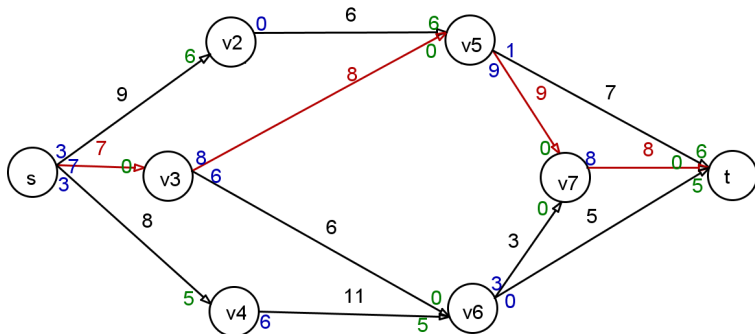
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Na této cestě je hrana s rezervou 5, nemůžeme tedy tok zvýšit o víc.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

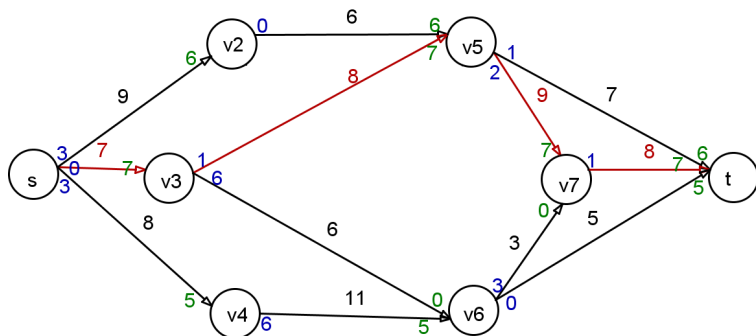
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Po navýšení najdeme další cestu s nenulovou rezervou.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:

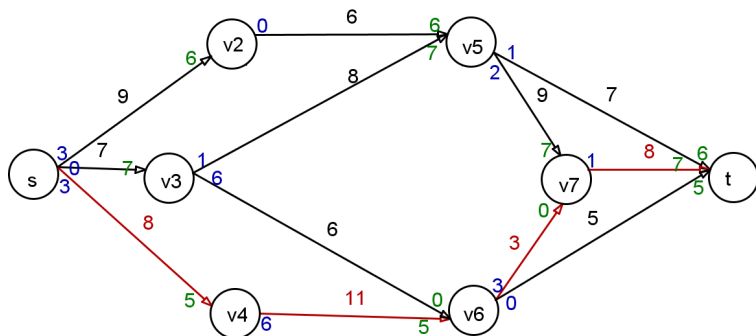


Na této cestě jsme navýšili tok o 7.



# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

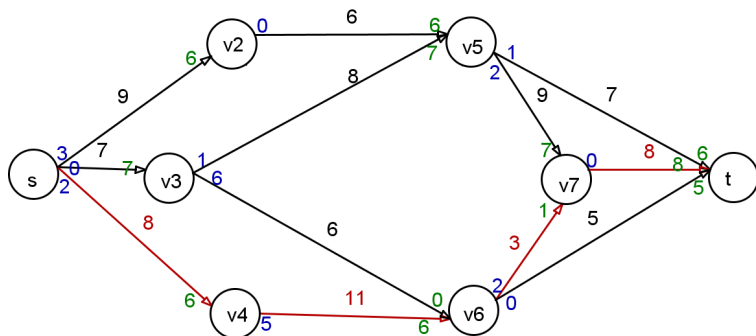
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Existuje ještě zlepšující cesta s rezervou 1.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

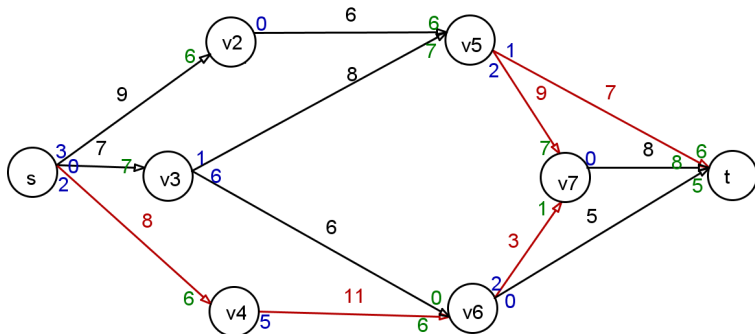
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Provedli jsme navýšení.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

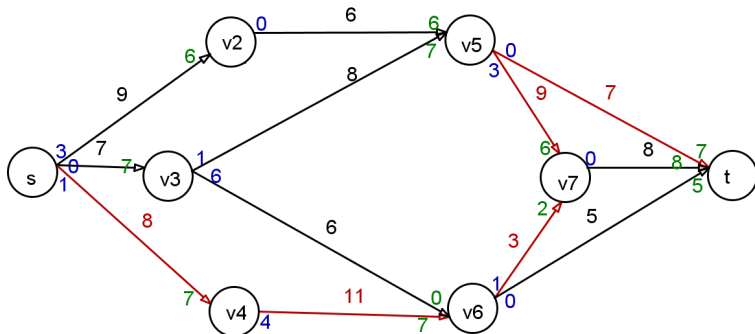
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Můžeme tok ještě zlepšit po cestě, která mezi  $v_5$  a  $v_7$  vede "v protisměru".

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

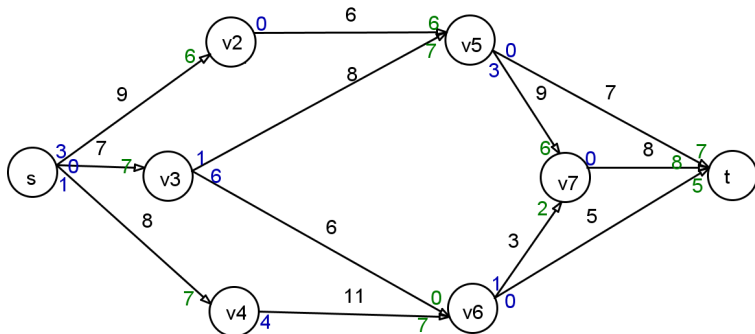
Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Provedeme navýšení o nejmenší rezervu (1, na poslední hraně). Mezi  $v_5$  a  $v_7$  se tok fakticky snížil o 1.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:



Nalezený tok má velikost  $7+8+5=20$  (viz zelené hodnoty u cíle). Evidentně je to optimální řešení, do cíle už není volná další kapacita.

# Maximální tok v síti: Ford-Fulkerson

Aplikujme Ford-Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku v zadané síti:

# Řízení projektů

Řízení projektů je jednou z typických aplikací teorie grafů. Projekt můžeme obecně chápat jako soubor činností. Tyto činnosti lze charakterizovat předpokládanou dobou trvání, náklady na realizaci, požadavky na zajištění, výčtem činností, které realizaci musí předcházet, atd. Nejčastěji hledáme odpověď na tyto otázky:

- Jaká je nejkratší možná doba realizace projektu?
- Které činnosti jsou z hlediska dodržení termínu klíčové, tzv. **kritické činnosti**?
- Jaké jsou rezervy u nekritických činností
- Jaký je časový rozvrh pro realizaci jednotlivých činností?

Kromě **časové analýzy** projektů nás zajímají též náklady na projekt v závislosti na čase, hovoříme pak o **nákladové analýze**. Dále můžeme sledovat úroveň a rozložení zdrojů potřebných pro jednotlivé činnosti, tedy provádět **zdrojovou analýzu** projektu.

# Řízení projektů - konstrukce síťového grafu

Projekt znázorňujeme pomocí ohodnoceného síťového grafu, kde hrany reprezentují činnosti, ohodnocení většinou dobu jejich trvání a uzly představují momenty zahájení či ukončení jednotlivých činností. Při analýze nejprve musíme vymezit jednotlivé činnosti, odhadnout délky jejich realizace a definovat **návaznosti** pomocí výčtu bezprostředně předcházejících činností.



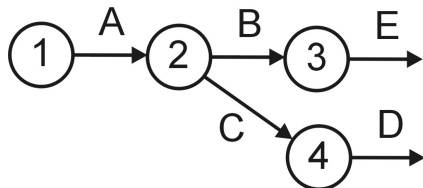
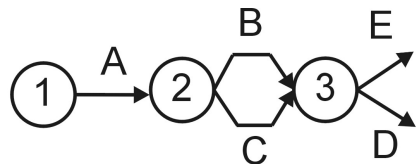
# Řízení projektů - konstrukce síťového grafu

Projekt znázorňujeme pomocí ohodnoceného síťového grafu, kde hrany reprezentují činnosti, ohodnocení většinou dobu jejich trvání a uzly představují momenty zahájení či ukončení jednotlivých činností. Při analýze nejprve musíme vymezit jednotlivé činnosti, odhadnout délky jejich realizace a definovat **návaznosti** pomocí výčtu bezprostředně předcházejících činností. Ukažme si síťový graf pro projekt vytvoření nového obchodního střediska firmy Q-mark, a.s. (J.Jablonský: Operační výzkum). Před vlastním sestavením grafu definujeme elementární činnosti a jejich vlastnosti, viz. tabulka:

činnost	popis činnosti	trvání [týdny]	předchází
A	výběr a nákup projektu	6	-
B	zpracování projektu	4	A
C	obsazení pozice manažera	3	A
D	výběr personálu	3	B,C
E	rekonstrukce a vybavení objektu	8	B
F	školení personálu	2	D
G	výběr sortimentu zboží	2	B,C
H	uzavření smluv s dodavateli	5	G
I	nákup zboží	3	E,F,H
J	reklama	2	H

# Řízení projektů - konstrukce síťového grafu

Při sestavování grafu můžeme narazit na problém u definice uzlů. Například činnosti D musí předcházet B,C, ale činnosti E předchází pouze B. Jak tedy správně znázornit návaznost? Příklady **nesprávného** znázornění, viz obr.:



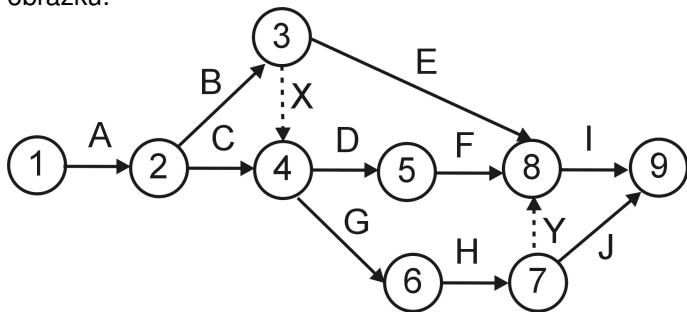
Podobný problém je u činností I,J, které mají společného předchůdce H, ale činnosti I navíc předchází i E,F.

# Řízení projektů - konstrukce síťového grafu

Problém s návazností lze řešit zavedením **fiktivních činností**, jimž odpovídající fiktivní hrany doplní chybějící spoje. Znázorňují se přerušovanou čarou. Doba fiktivních činností je vždy nulová. Do našeho příkladu tedy doplníme dvě fiktivní činnosti: X zprostředkující návaznost mezi B a D a činnost Y pro návaznost mezi H a I.

# Řízení projektů - konstrukce síťového grafu

Problém s návazností lze řešit zavedením **fiktivních činností**, jimž odpovídající fiktivní hrany doplní chybějící spoje. Znárodnují se přerušovanou čarou. Doba fiktivních činností je vždy nulová. Do našeho příkladu tedy doplníme dvě fiktivní činnosti: X zprostředkující návaznost mezi B a D a činnost Y pro návaznost mezi H a I. Jedno z možných znázornění sítě projektu je na obrázku:



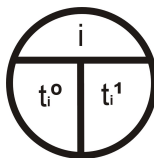
Při sestavování grafu je dobré držet se pravidla, aby index počátečního uzlu každé hrany byl nižší než index jejího koncového uzlu. Potom graf nebude obsahovat žádné orientované cykly.

# Critical Path Method (CPM)

Metoda se používá od 50. let minulého století. Jejím principem je určit pro každou činnost tyto 4 charakteristiky:

- Nejdříve možný začátek provádění činnosti začínající v uzlu  $u_i$ , značíme jej:  $t_i^0$
- Nejdříve možný konec provádění činnosti reprezentované hranou  $h_{ij}$  získáme přičtením doby trvání činnosti:  $t_i^0 + y_{ij}$
- Nejpozději přípustný konec provádění činnosti končící v uzlu  $u_j$ , značíme jej:  $t_j^1$
- Nejpozději přípustný začátek provádění činnosti reprezentované hranou  $h_{ij}$  získáme odečtením doby trvání činnosti:  $t_j^1 - y_{ij}$

V síťovém grafu vyznačíme do jednotlivých uzlů i nejdříve možné začátky a nejpozději přípustné konce činností, které v něm začínají, resp. končí:



# Critical Path Method (CPM)

Vlastní algoritmus metody probíhá ve čtyřech fázích:

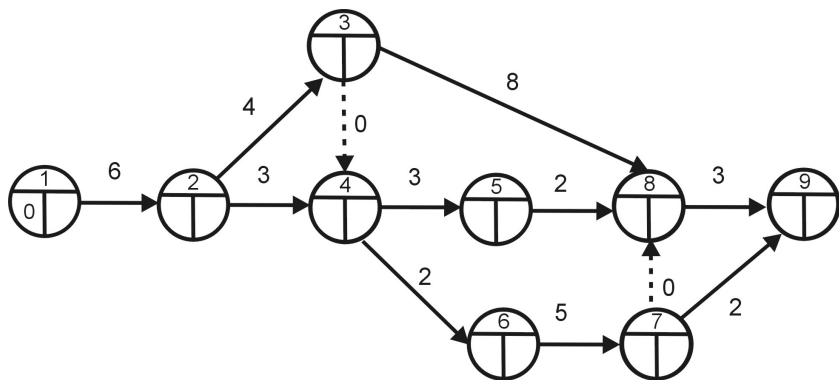
- 1 Výpočet nejprve možných začátků: Pro činnosti začínající v uzlu  $u_j$  se spočte jako maximum nejdříve možných konců činností, které do něj vstupují.  $t_j^0 = \max_i(t_i^0 + y_{ij})$  Pro výstupní uzel tak dostaneme nejkratší možnou dobu realizace projektu.
- 2 Výpočet nejpozději přípustných konců: Pro činnosti končící v uzlu  $u_i$  se spočte jako minimum z nejpozději přípustných začátků činností z uzlu vystupujících.  $t_i^1 = \min_j(t_j^1 - y_{ij})$
- 3 Výpočet celkových časových rezerv: Činnost reprezentovaná hranou  $h_{ij}$  má stanoveno, kdy může nejdříve začít ( $t_i^0$ ) a kdy musí nejpozději skončit ( $t_j^1$ ). Doba, během které se musí realizovat, je tedy  $t_j^1 - t_i^0$  a protože její realizace trvá  $y_{ij}$ , dostaneme její pro časovou rezervu vztah:  
 $R_{ij} = t_j^1 - t_i^0 - y_{ij}$
- 4 Sestavení harmonogramu činností

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.

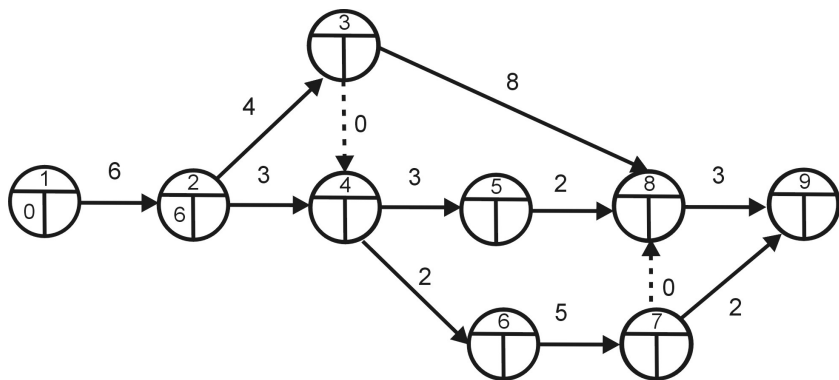


Nejprve si zobrazíme graf projektu s dobami trvání činností.



# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

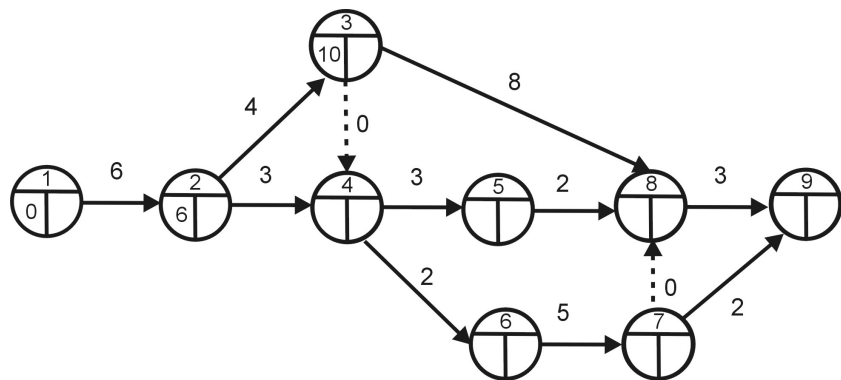
V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možný začátek činností B,C je  $t_2^0 = 0 + 6 = 6$ .

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

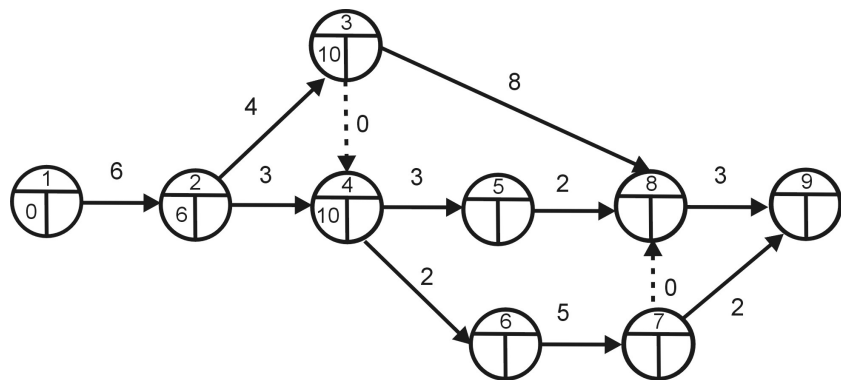
V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možný začátek činnosti E je  $t_3^0 = 6 + 4 = 10$ .

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

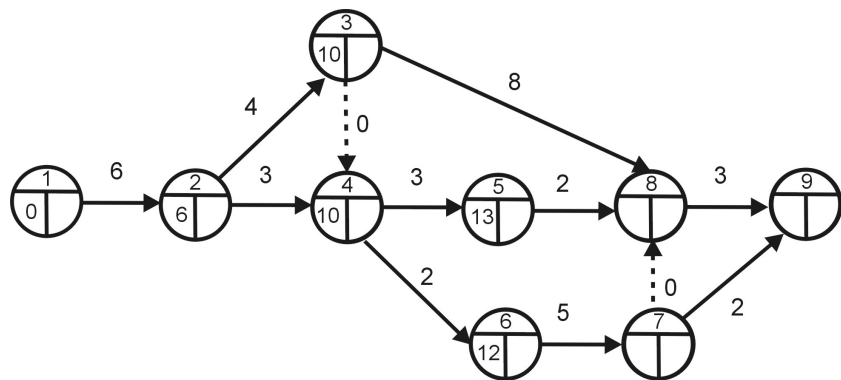
V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možný začátek činností D,G je  $t_4^0 = \max(10 + 0, 6 + 3) = 10$ .

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

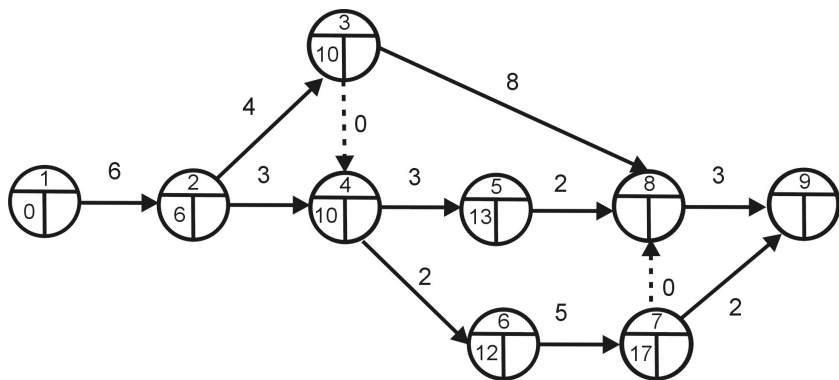
V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možný začátek činností F, resp. H je  $t_5^0 = 10 + 3 = 13$ , resp.  $t_6^0 = 10 + 2 = 12$ .

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

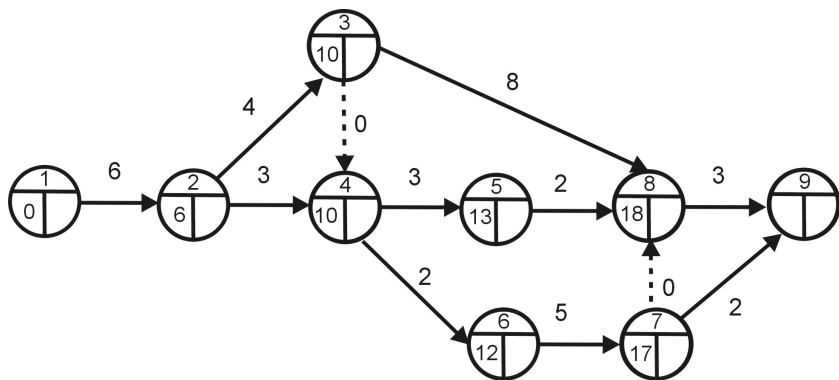
V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možný začátek činnosti J je  $t_7^0 = 12 + 5 = 17$ .

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

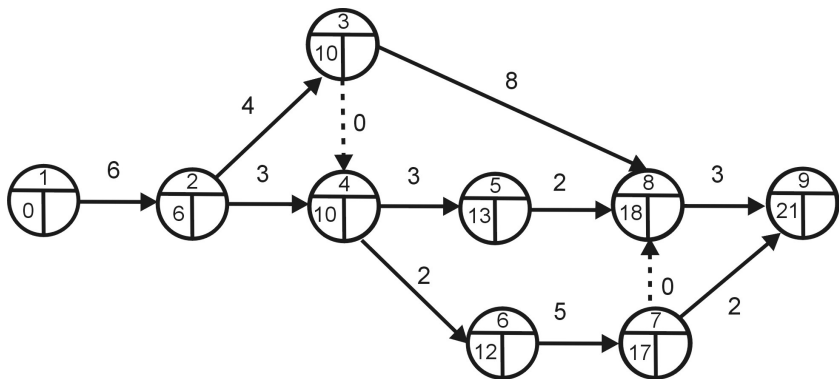
V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možný začátek činnosti I je  $t_8^0 = \max(10 + 8, 13 + 2, 17 + 2) = 18$ .

# Critical Path Method (CPM) - 1. fáze

V první fázi metody CPM postupně zleva doprava počítáme nejdříve možné začátky činností.



Nejdříve možná doba ukončení projektu je v čase  
 $t_9^0 = \max(18 + 3, 17 + 2) = 21$  týdnů.

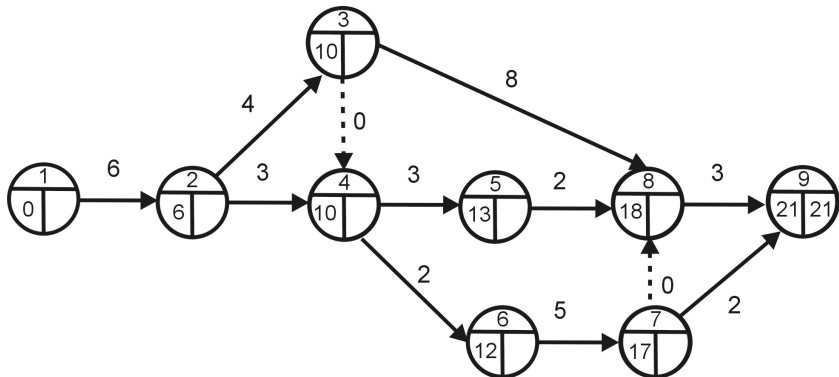
## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

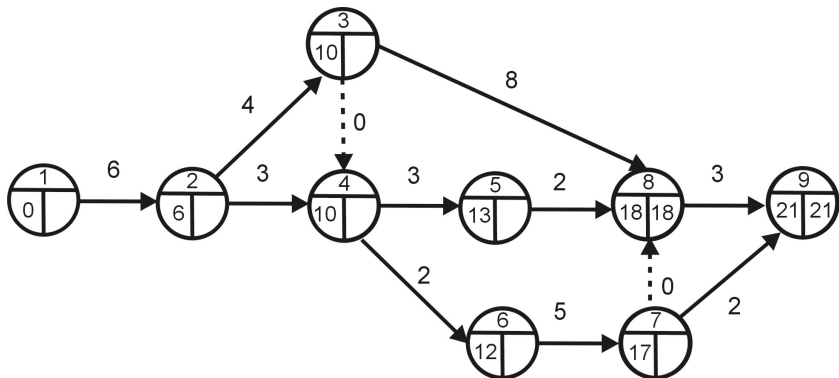
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Stanovili jsme minimální dobu trvání projektu na 21 týdnů. To bude i nejpozději přípustný konec činností I,J:  $t_9^1 = 21$ .

## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

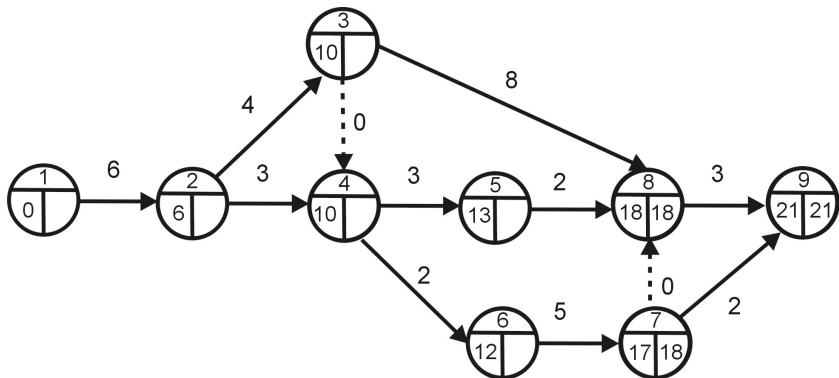
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Nejpozději přípustný konec činností F,E je  $t_8^1 = 21 - 3 = 18$ .

## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

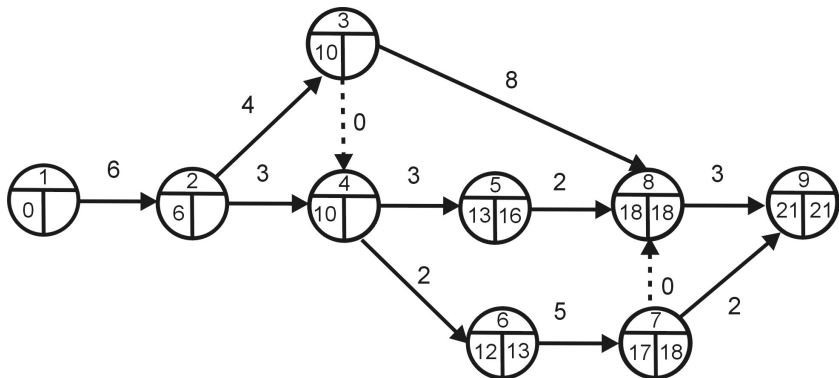
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Nejpozději přípustný konec činnosti H je  $t_7^1 = \min(21 - 2, 18 - 0) = 18$ .

## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

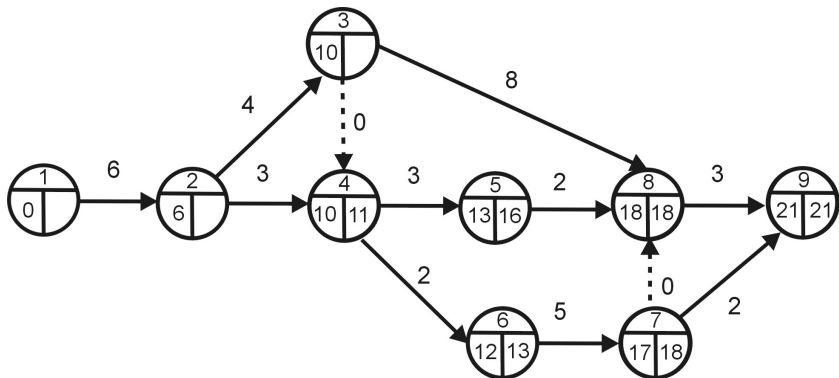
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Nejpozději přípustný konec činností D, resp. G je  $t_5^1 = 18 - 2 = 16$ , resp.  $t_6^1 = 18 - 5 = 13$ .

## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

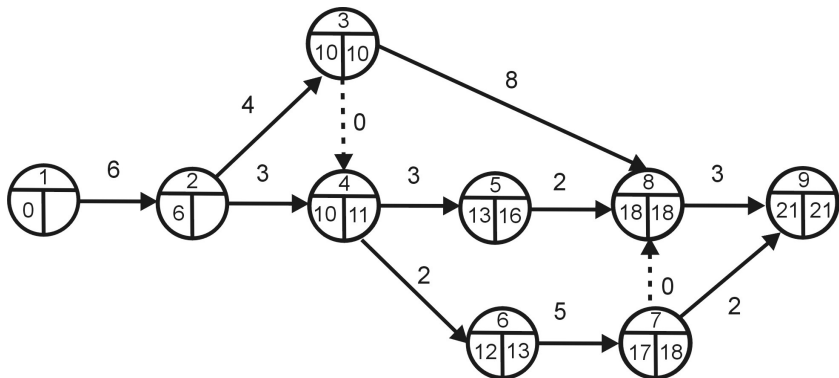
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Nejpozději přípustný konec činnosti C je  $t_4^1 = \min(13 - 2, 16 - 3) = 11$ .

## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

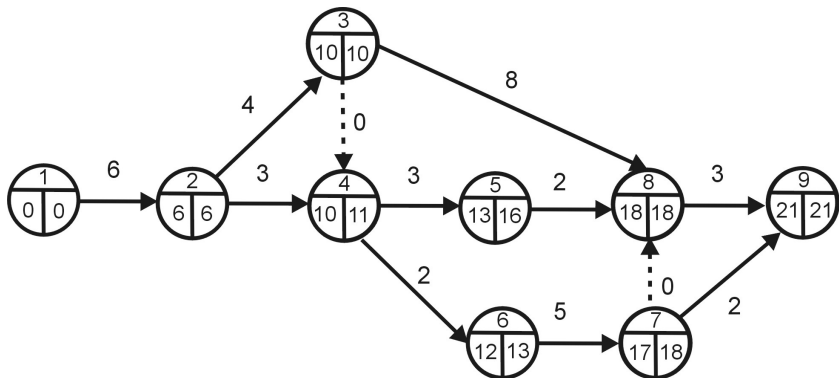
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Nejpozději přípustný konec činnosti B je  $t_3^1 = \min(18 - 8, 11 - 0) = 10$ .

## Critical Path Method (CPM) - 2. fáze

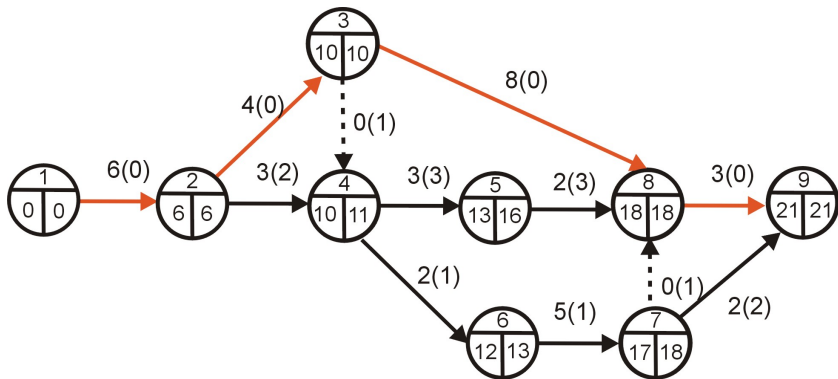
Ve druhé fázi postupujeme zprava doleva a doplňujeme nejpozději přípustné konce. Předpokládejme, že chceme stihnout projekt v nejkratším možném čase.



Nejpozději přípustný konec činnosti A je  $t_2^1 = \min(10 - 4, 11 - 3) = 6$ . Protože jsme vycházeli z nejrychlejší možné realizace projektu, samozřejmě vyšlo  $t_1^1 = 6 - 6 = 0$ .

# Critical Path Method (CPM) - 3. fáze

Dopočítáme rezervy jednotlivých činností podle vztahu  $R_{ij} = t_j^1 - t_i^0 - y_{ij}$ .  
Například činnost J musí proběhnout mezi 17. a 21. týdnem a trvá 2 týdny, její rezerva je tedy  $R_{79} = 21 - 17 - 2 = 2$  týdny, apod.

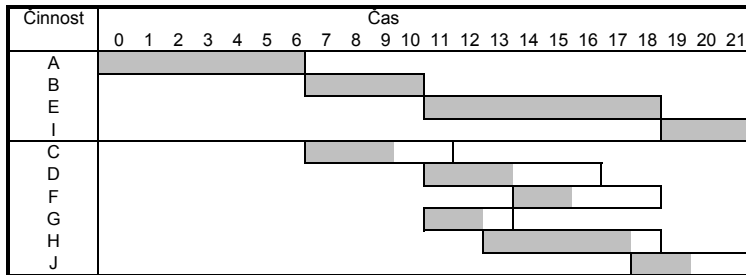


Rezervy jednotlivých činností jsou uvedeny v závorkách. Červeně je znázorněna kritická cesta sestávající z činností A,B,E,I, které nemají žádnou časovou rezervu.



# Critical Path Method (CPM) - 4. fáze

Poslední, ale velmi důležitou fází je rozvržení realizace činností v čase. Je nutné určit, které činnosti mohou probíhat paralelně a které na sebe musí navazovat. To nám umožní dále rozvrhovat zdroje potřebné pro jednotlivé činnosti. Ukažme si rozvrh činností v diagramu, kde rámečky tvoří nejdříve možný začátek a nejpozději přípustný konec činností, stínování naznačuje dobu jejich trvání. V horní části tabulky jsou kritické činnosti s nulovými rezervami - tyto musí na sebe bezprostředně navazovat, aby nedošlo ke zpoždění projektu.



# Metoda PERT

Metoda **PERT** (Program Evaluation and Review Technique) je pravděpodobnostním rozšířením metody CPM. V praxi často není reálné stanovit realizační doby činností, proto jsou hodnoty  $y_{ij}$  nahrazeny náhodnými veličinami, které se realizují na nějakém intervalu  $\langle a_{ij}, b_{ij} \rangle$ . Kromě tohoto mezního **optimistického**, resp. **pesimistického** odhadu se pracuje s nejpravděpodobnější dobou trvání činnosti  $m_{ij}$ , ta se označuje jako **modální** odhad.

# Metoda PERT

Metoda **PERT** (Program Evaluation and Review Technique) je pravděpodobnostním rozšířením metody CPM. V praxi často není reálné stanovit realizační doby činností, proto jsou hodnoty  $y_{ij}$  nahrazeny náhodnými veličinami, které se realizují na nějakém intervalu  $\langle a_{ij}, b_{ij} \rangle$ . Kromě tohoto mezního **optimistického**, resp. **pesimistického** odhadu se pracuje s nejpravděpodobnější dobou trvání činnosti  $m_{ij}$ , ta se označuje jako **modální** odhad. Skutečné rozložení pravděpodobnosti náhodné veličiny není obecně známo, ale často se aproximuje  $\beta$ -rozdělením. Lze ukázat, že pro její střední hodnotu a rozptyl platí:

$$\mu_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}$$

# Metoda PERT

Metoda **PERT** (Program Evaluation and Review Technique) je pravděpodobnostním rozšířením metody CPM. V praxi často není reálné stanovit realizační doby činností, proto jsou hodnoty  $y_{ij}$  nahrazeny náhodnými veličinami, které se realizují na nějakém intervalu  $\langle a_{ij}, b_{ij} \rangle$ . Kromě tohoto mezního **optimistického**, resp. **pesimistického** odhadu se pracuje s nejpravděpodobnější dobou trvání činnosti  $m_{ij}$ , ta se označuje jako **modální** odhad. Skutečné rozložení pravděpodobnosti náhodné veličiny není obecně známo, ale často se aproximuje  $\beta$ -rozdělením. Lze ukázat, že pro její střední hodnotu a rozptyl platí:

$$\mu_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}$$

Vlastní výpočet metodou PERT se neliší od metody CPM, jen se místo hodnot  $y_{ij}$  pracuje se středními hodnotami  $\mu_{ij}$ . Za určitých předpokladů se dá dle centrální limitní věty aproximovat rozložení celkové délky projektu normální náhodnou veličinou a získat tak odpověď na otázky : Jaká je pravděpodobnost, že projekt bude ukončen v čase  $T$ , resp. v jakém čase bude projekt ukončen se stanovenou pravděpodobností  $p$ , apod.

# Metoda PERT - příklad

**Příklad :** V závodě se má provést rekonstrukce výrobní linky spojená s výměnou výrobního zařízení, stavebními úpravami, generální opravou elektroinstalace a zlepšením pracovního prostředí. Projekt byl rozložen na dílčí činnosti, které jsou spolu s předpokládanou dobou jejich trvání (v týdnech) uvedeny v tabulce. Pomocí metody PERT stanovte kritickou cestu.

Popis činnosti	předchůdci	A	B	C
A Demontáž starého zařízení	-	5	8	10
B Oprava střechy výrobní haly	-	4	6	7
C Oprava podlahy	A	1	2	5
D Vnitřní stavební úpravy	B,C	2	4	6
E Generální oprava elektroinstalace	D	7	10	14
F Montáž nového výrobního zařízení	E	10	12	13
G Montáž klimatizačního zařízení	E	4	5	8
H Zkušební provoz	F	3	4	6
I Dokončení vnitřních stavebních úprav	G	1	3	5

# Metoda PERT - příklad

**Řešení:** Stanovíme střední hodnoty a rozptyly dob trvání činností:

$(i, j)$	$a_{ij}$	$m_{ij}$	$b_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\sigma_{ij}^2$
A(1,2)	5	8	10	7,83	0,69
B(1,3)	4	6	7	5,83	0,25
C(2,3)	1	2	5	2,33	0,44
D(3,4)	2	4	6	4,00	0,44
E(4,5)	7	10	14	10,17	1,36
F(5,6)	10	12	13	11,83	0,25
G(5,7)	4	5	8	5,33	0,44
H(6,8)	3	4	6	4,17	0,25
I(7,8)	1	3	5	3,00	0,44

# Metoda PERT - příklad

**Řešení:** Stanovíme střední hodnoty a rozptyly dob trvání činností:

$(i, j)$	$a_{ij}$	$m_{ij}$	$b_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\sigma_{ij}^2$
A(1,2)	5	8	10	7,83	0,69
B(1,3)	4	6	7	5,83	0,25
C(2,3)	1	2	5	2,33	0,44
D(3,4)	2	4	6	4,00	0,44
E(4,5)	7	10	14	10,17	1,36
F(5,6)	10	12	13	11,83	0,25
G(5,7)	4	5	8	5,33	0,44
H(6,8)	3	4	6	4,17	0,25
I(7,8)	1	3	5	3,00	0,44

Kritickou cestu lze u jednodušších projektů určit i procházením síťového diagramu všemi způsoby (v našem případě existují čtyři). Přesné časové údaje jednotlivých nahrazujeme středními hodnotami. Pro každou možnou cestu určíme dobu trvání celého projektu, a to součtem středních hodnot jednotlivých činností ležících na dané cestě. Kromě středních hodnot sčítáme i příslušné rozptyly. Ze všech cest vybereme tu s maximální střední hodnotou celkové doby trvání, pro náš projekt je to **A, C, D, E, F, H**.

# Metoda PERT - příklad

kritická cesta	$a_{ij}$	$m_{ij}$	$b_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\sigma_{ij}^2$
A(1,2)	5	8	10	7,83	0,69
C(2,3)	1	2	5	2,33	0,44
D(3,4)	2	4	6	4,00	0,44
E(4,5)	7	10	14	10,17	1,36
F(5,6)	10	12	13	11,83	0,25
H(6,8)	3	4	6	4,17	0,25
$\Sigma$				40,33	3,43



# Metoda PERT - příklad

kritická cesta	$a_{ij}$	$m_{ij}$	$b_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\sigma_{ij}^2$
A(1,2)	5	8	10	7,83	0,69
C(2,3)	1	2	5	2,33	0,44
D(3,4)	2	4	6	4,00	0,44
E(4,5)	7	10	14	10,17	1,36
F(5,6)	10	12	13	11,83	0,25
H(6,8)	3	4	6	4,17	0,25
$\Sigma$				40,33	3,43

Celková střední doba trvání projektu je  $\mu(T) = 40,33$  týdnů a celkový rozptyl činí  $\sigma^2(T) = 3,43$  týdne. Pravděpodobnostní výpočty provádíme **u projektů s velkým počtem činností**, a to za předpokladu, že **zkoumané termíny jsou nezávislé náhodné veličiny**. Zdůvodnitelný je zejména u doby trvání celého projektu. Podle centrální limitní věty platí, že rozdělení náhodné veličiny  $T$ , která je součtem velkého počtu nezávislých shodně rozdělených náhodných veličin  $t_{ij}$ , se blíží normálnímu rozdělení  $N(\mu(T), \sigma^2(T))$ .

# Výpočet pravděpodobnosti dodržení termínu $T_{pl}$

Tato pravděpodobnost se určí pomocí hodnot distribuční funkce  $\phi(u)$  normovaného normálního rozdělení  $N(0; 1)$ . Nejprve se musí náhodná veličina  $T$  **standardizovat** dle vztahu  $U = \frac{T - \mu(T)}{\sigma(T)} \sim N(0; 1)$ . Potom

$$P(T \leq T_{pl}) = \Phi\left(\frac{T_{pl} - \mu(T)}{\sigma(T)}\right).$$

# Výpočet pravděpodobnosti dodržení termínu $T_{pl}$

Tato pravděpodobnost se určí pomocí hodnot distribuční funkce  $\phi(u)$  normovaného normálního rozdělení  $N(0; 1)$ . Nejprve se musí náhodná veličina  $T$  **standardizovat** dle vztahu  $U = \frac{T - \mu(T)}{\sigma(T)} \sim N(0; 1)$ . Potom

$$P(T \leq T_{pl}) = \phi\left(\frac{T_{pl} - \mu(T)}{\sigma(T)}\right).$$

- Pokud je plánovaný konec dřívější než střední hodnota doby trvání projektu ( $T_{pl} \leq \mu(T)$ ), argument funkce  $\phi(u)$  je záporný. Hodnotu distribuční funkce normovaného normálního rozdělení počítáme podle vztahu  $\phi(u) = 1 - \phi(-u)$ . Pravděpodobnost dodržení tohoto termínu pak bude menší než 50%.
- Pokud je plánovaný konec shodný se střední hodnotou doby trvání projektu ( $T_{pl} = \mu(T)$ ), pravděpodobnost dodržení termínu bude 50%.
- Pokud je plánovaný konec pozdější než střední hodnota doby trvání projektu ( $T_{pl} \geq \mu(T)$ ), pravděpodobnost dodržení termínu je větší než 50%.

# Určení doby trvání projektu $T_r$ při zvolené míře rizika $r$

Tuto dobu lze stanovit rovněž s využitím tabulek funkce  $\phi(u)$ . Je-li velikost rizika  $r$  v procentech, v tabulce **kvantilů** standardizovaného normálního rozdělení najdeme hodnotu  $u_{1-r/100}$ . Odpovídající dobu trvání projektu  $T_r$  zjistíme ze vztahu  $u_{1-r/100} = \frac{T_r - \mu(T)}{\sigma(T)}$ , ze kterého vyjádříme dobu trvání projektu  $T_r = \mu(T) + \sigma(T) \cdot u_{1-r/100}$

# Určení doby trvání projektu $T_r$ při zvolené míře rizika $r$

Tuto dobu lze stanovit rovněž s využitím tabulek funkce  $\phi(u)$ . Je-li velikost rizika  $r$  v procentech, v tabulce **kvantilů** standardizovaného normálního rozdělení najdeme hodnotu  $u_{1-r/100}$ . Odpovídající dobu trvání projektu  $T_r$  zjistíme ze vztahu  $u_{1-r/100} = \frac{T_r - \mu(T)}{\sigma(T)}$ , ze kterého vyjádříme dobu trvání projektu  $T_r = \mu(T) + \sigma(T) \cdot u_{1-r/100}$

**Příklad :** Pro výše řešený příklad projektu s celkovou střední dobou trvání 40,33 týdnů a rozptylem 3,43 určete

- 1 s jakou pravděpodobností bude ukončen nejpozději v čase 42 týdnů!

**Řešení:**  $P(T \leq 42) = \phi\left(\frac{42-40,33}{\sqrt{3,43}}\right) = \phi(0,90)$ . V tabulce distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení najdeme pravděpodobnost. Projekt bude ukončen nejpozději ve 42 týdnu s pravděpodobností 81,59%.

- 2 dobu realizace projektu, která bude dodržena s rizikem 20%.

**Řešení:** 20-tiprocentnímu riziku odpovídá 80-tiprocentní pravděpodobnost splnění termínu. Pro tuto pravděpodobnost zjistíme kvantil  $u_{0,8} = 0,84$ . Po dosazení zjistíme požadovanou dobu  $T_r = 40,33 + \sqrt{3,43} \cdot 0,84$ . S 80ti procentní pravděpodobností můžeme očekávat, že projekt skončí dříve než v čase 41,88 týdne.

# Časově - nákladová analýza projektu

Metoda CPM a PERT přihlíží pouze k časovým vztahům v projektech, přičemž optimální časový rozvrh činností nemusí být vždy hospodárný. Základním kritériem efektivnosti projektu jsou zpravidla **náklady spojené s jeho realizací** a ty úzce souvisejí s dobou trvání:

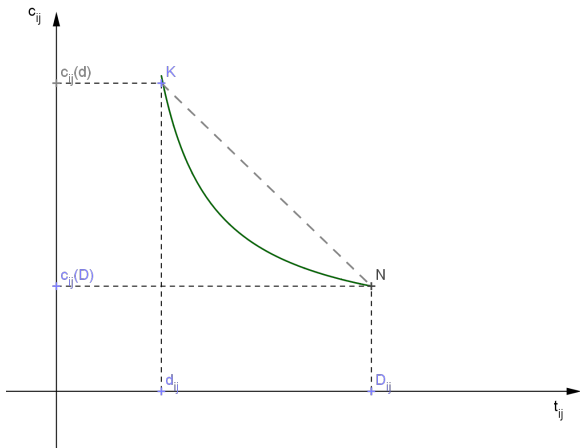
- Náklady nepřímé – souvisí s realizací projekt jako celku (režijní náklady, ztráty vzniklé pozdním dokončením projektu....). Jsou rostoucí (lineární) funkcí doby trvání projektu
- Náklady přímé – souvisejí s jednotlivými činnostmi (materiál, mzdy).
- Součtem přímých nákladů na jednotlivé činnosti získáme přímé náklady na celý projekt.

Přímé náklady na realizaci činnosti  $(i, j)$  v čase  $t_{ij}$  označíme  $c_{ij}$ . Budeme předpokládat opět lineární závislost na době trvání (v tomto případě funkce nerostoucí – se zkrácením doby trvání rostou náklady). Tvar nákladové funkce odvodíme podle těchto pojmů:

$D_{ij}$  ... **normální doba trvání** činnosti  $(i, j)$ , které odpovídají minimální náklady  $c_{ij}(D)$

$d_{ij}$  ... **krajní doba trvání** činnosti  $(i, j)$  při maximálně intenzivním režimu s vysokými náklady  $c_{ij}(d)$ .

# Časově - nákladová analýza projektu: přímé náklady



Přímka  $KN$  aproximuje graf závislosti přímých nákladů na době trvání příslušné činnosti. Rovnice této přímky je:  $c_{ij} = b_{ij} - a_{ij}t_{ij}$ , kde

$$b_{ij} = a_{ij}d_{ij} + c_{ij}(d), \quad a_{ij} = \frac{c_{ij}(d) - c_{ij}(D)}{D_{ij} - d_{ij}}$$

# Minimalizace přímých nákladů při dané době trvání projektu

Pro projekt lze úhrnné přímé náklady vyjádřit takto:

$$c_P = \sum_{(i,j) \in P} (b_{ij} - a_{ij}t_{ij}) .$$

Koeficient  $a_{ij}$  představuje **nákladový spád** mezi dvojicí bodů odpovídajících normálnímu a maximálně intenzivnímu režimu (v opačném směru jde o nákladový růst).



# Minimalizace přímých nákladů při dané době trvání projektu

Pro projekt lze úhrnné přímé náklady vyjádřit takto:

$$c_P = \sum_{(i,j) \in P} (b_{ij} - a_{ij} t_{ij}) .$$

Koeficient  $a_{ij}$  představuje **nákladový spád** mezi dvojicí bodů odpovídajících normálnímu a maximálně intenzivnímu režimu (v opačném směru jde o nákladový růst).

Pro přímé náklady  $c_P$  spojené s realizací celého projektu v čase  $T$  platí:

$$\sum_{(i,j) \in P} c_{ij}(D) \leq c_P \leq \sum_{(i,j) \in P} c_{ij}(d)$$

Při zachování doby trvání projektu  $T$  lze tyto náklady snížit **prodloužením doby trvání nekritických činností** až do dosažení jejich normální doby trvání a až do vyčerpání jejich časových rezerv.

# Minimalizace přímých nákladů při dané době trvání projektu - příklad

**Příklad :** Uvažujme projekt zadaný tabulkou ( $VR_{ij}$  označuje volné rezervy a červeně jsou označeny kritické činnosti):

$(i, j)$	$t_{ij}$	$d_{ij}$	$D_{ij}$	$c_{ij}(d)$	$c_{ij}(D)$	$a_{ij}$	$VR_{ij}$	$c_{ij}$
(1,2)	3	3	4	23	20	3	0	23
(1,3)	4	3	5	17	15	1		16
(2,5)	3	2	5	16	10	2	5	14
(3,4)	3	2	4	26	22	2	0	24
(3,5)	7	5	7	38	30	4		30
(4,5)	1	1	1	10	10	-	3	10
$\Sigma$				130	107			117

# Minimalizace přímých nákladů při dané době trvání projektu - příklad

**Příklad :** Uvažujme projekt zadaný tabulkou ( $VR_{ij}$  označuje volné rezervy a červeně jsou označeny kritické činnosti):

$(i, j)$	$t_{ij}$	$d_{ij}$	$D_{ij}$	$c_{ij}(d)$	$c_{ij}(D)$	$a_{ij}$	$VR_{ij}$	$c_{ij}$
(1,2)	3	3	4	23	20	3	0	23
(1,3)	4	3	5	17	15	1		16
(2,5)	3	2	5	16	10	2	5	14
(3,4)	3	2	4	26	22	2	0	24
(3,5)	7	5	7	38	30	4		30
(4,5)	1	1	1	10	10	-	3	10
$\Sigma$				130	107			117

S realizací daného projektu jsou spojeny přímé náklady ve výši 117 nákladových jednotek (NJ). Tyto náklady lze snížit u nekritické činnosti (2,5) o dvě časové jednotky. Náklady klesnou o 4 NJ, tedy  $117 - 4 = 113$ .

Prodlužujeme dobu trvání nekritických činností maximálně o dobu

$\Delta t_{ij} = \min(VR_{ij}; D_{ij} - t_{ij})$  a přednostně prodlužujeme činnosti s velkým  $a_{ij}$ .

# Stanovení optimální celkové doby trvání projektu

Z hlediska efektivnosti je optimální doba trvání charakterizovaná minimálními celkovými náklady, které jsou součtem přímých a nepřímých nákladů. Jak již bylo uvedeno, přímé náklady se při zkracování doby trvání činnosti zvyšují a nepřímé náklady se snižují. Při optimální době trvání projektu jsou celkové náklady nejnižší.

# Stanovení optimální celkové doby trvání projektu

Z hlediska efektivnosti je optimální doba trvání charakterizovaná minimálními celkovými náklady, které jsou součtem přímých a nepřímých nákladů. Jak již bylo uvedeno, přímé náklady se při zkracování doby trvání činnosti zvyšují a nepřímé náklady se snižují. Při optimální době trvání projektu jsou celkové náklady nejnižší. Tato doba se nalezne tak, že se zkracují doby trvání činností ležících na kritické cestě (nejprve u činnosti s nejnižším koeficientem nákladového růstu). Kritické činnosti se zkracují vždy do dosažení krajní doby trvání. Při takovémto zkracování může dojít ke vzniku další kritické cesty, kterou je nutné potom také sledovat.

# Stanovení optimální celkové doby trvání projektu

Z hlediska efektivnosti je optimální doba trvání charakterizovaná minimálními celkovými náklady, které jsou součtem přímých a nepřímých nákladů. Jak již bylo uvedeno, přímé náklady se při zkracování doby trvání činnosti zvyšují a nepřímé náklady se snižují. Při optimální době trvání projektu jsou celkové náklady nejnižší. Tato doba se nalezne tak, že se zkracují doby trvání činností ležících na kritické cestě (nejprve u činnosti s nejnižším koeficientem nákladového růstu). Kritické činnosti se zkracují vždy do dosažení krajní doby trvání. Při takovémto zkracování může dojít ke vzniku další kritické cesty, kterou je nutné potom také sledovat.

Výpočet si budeme ilustrovat na výše řešeném příkladu. Předpokládáme, že všechny činnosti mají normální dobu trvání.

T	(i,j)	$t_{ij}$	$\Delta c_{ij}$	NN	PN	CN=PN+NN
12	-	-	-	60	107	167
11	(1,3)	4	1	55	108	163
10	(1,3)	3	1	50	109	159
9	(3,5)	6	4	45	113	158
8	(3,5)	5	4	40	117	157
	(2,5)	4	2			

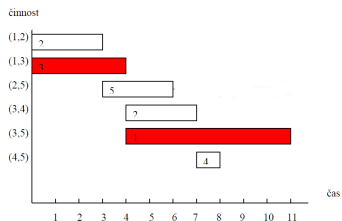
Vznikne další kritická cesta 1-2-5, kterou je nutné brát rovněž v úvahu.

# Časově zdrojová analýza projektu

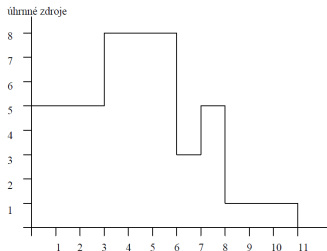
S realizací projektu je vždy spojeno čerpání zdrojů (práce, materiál, finance, atd.). V řízeném projektu je snaha čerpání zdrojů rovnoměrně rozložit na celou dobu trvání projektu. V některých případech při vzniku kapacitních špiček vznikne nedostatek zdroje (jeho potřeba převyšuje jeho disponibilní množství). **Součtová čára** (diagram potřeby zdrojů) – graficky vyjadřuje úhrnné nároky na zdroje v každém okamžiku trvání projektu za předpokladu, že každá činnost začne ve svém nejdříve možném začátku. Součtová čára mění svůj průběh v okamžiku, kdy začíná nebo končí nějaká činnost.

# Časově zdrojová analýza projektu - příklad

Pro výše řešenou úlohu máme Ganttův diagram



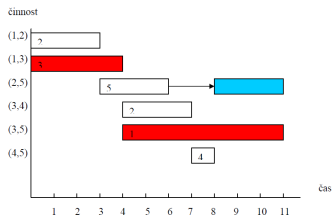
Jeho součtová čára je





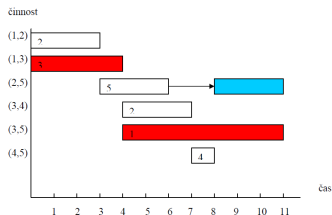
# Časově zdrojová analýza projektu - příklad

V časovém intervalu 3,6 lze zvýšený nárok na zdroje odstranit tak, že využijeme volnou časovou rezervu činnosti (2,5) a zahájíme ji až v čase 8 (místo původního začátku v čase 3), který je jejím nejpozději přípustným začátkem.



# Časově zdrojová analýza projektu - příklad

V časovém intervalu 3,6 lze zvýšený nárok na zdroje odstranit tak, že využijeme volnou časovou rezervu činnosti (2,5) a zahájíme ji až v čase 8 (místo původního začátku v čase 3), který je jejím nejpozději přípustným začátkem.



**Poznámka :** V některých případech prodlužujeme dobu trvání nekritických činností, čímž se také sníží potřeba zdroje na tuto činnost v průběhu času.

# Vícekriteriální rozhodování

V reálných rozhodovacích situacích je často důležité vzít do úvahy více optimalizačních kritérií. Tato však zřídka bývají ve vzájemném souladu, takže není možné najít řešení, které bude nejlepší podle všech kritérií. Úlohy vícekriteriálního rozhodování se dělí podle způsobu stanovení rozhodovacích variant.

- Jsou-li stanoveny výčtem, mluvíme o **vícekriteriálním hodnocení variant (VHV)**.
- Jiný přístup je vymezení variant soustavou omezujících podmínek, mluvíme pak o úlohách **vícekriteriálního programování**.

# Vícekriteriální hodnocení variant

V úlohách VHV je dána množina variant  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ , které jsou hodnoceny podle kritérií  $Y_1, \dots, Y_k$ . Každá varianta je pak popsána vektorem kritériálních hodnot, tyto lze pak jako řádky pro jednotlivé varianty shrnout do **kritériální matice**.

	$Y_1$	$Y_2$	$\dots$	$Y_k$
$X_1$	$y_{11}$	$y_{12}$	$\dots$	$y_{1k}$
$X_2$	$y_{21}$	$y_{22}$	$\dots$	$y_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_n$	$y_{n1}$	$y_{n2}$	$\dots$	$y_{nk}$

Součástí modelu úlohy musí být u kvantitativních kritérií i určení jejich typu (maximalizační či minimalizační). Protože některé metody vyžadují, aby všechna kritéria byla stejného typu, někdy je nutné provést transformaci (např. u hodnocení hospodářské vyspělosti je HDP na hlavu kritériem maximalizačním a míra nezaměstnanosti minimalizačním). Další oblasti aplikace VHV jsou velmi široké: různá výběrová řízení, hodnocení podniků, výrobků či služeb, výběr lokality pro investiční akci, atd.

# Vícekriteriální hodnocení variant - příklad

Dále uvedené postupy budeme ilustrovat na příkladu výběru tabletu (z knihy Tomáš Šubrt a kol.: Ekonomicko - matematické metody): Uživatel definoval pět relevantních hledisek, podle kterých bude jednotlivé nabídky hodnotit: cena [Kč], velikost operační paměti RAM [MB], výdrž baterie [hod.], hmotnost [g] a souhrnně kombinace OS, procesoru a velikosti displeje. V úvahu připadá pět konkrétních tabletů T1 - T5, uveďme přehled jejich charakteristik:

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display
T1	12000	1000	9,5	680	Android 3.0, Tegra 1 GHz, 10,1"
T2	12000	1000	10	600	Apple 1054, 1 GHz Dual, 9,7"
T3	5000	512	7	380	Android 2.2, 1 GHz, 7"
T4	20000	4000	3	1160	Windows 7, iCore5 1 GHz, 12,1"
T5	5000	256	4	400	Android 2.1, 800 MHz, 7"

První čtyři kritéria jsou kvantitativní (cena a hmotnost minimalizační, ostatní maximalizační), u pátého kritéria máme alespoň ordinální informaci v podobě pořadí tabletů dle odborníka: 1,3,4,2,5.

# Vícekritériální hodnocení variant

Mezi základní cíle při analýze VHV patří:

- výběr jedné, tzv. **kompromisní** varianty (např. při výběrovém řízení)
- uspořádání variant (např. spotřebitelské žebříčky)
- klasifikace variant (např. při přijímačkách: přijatí/nepřijatí nebo hodnocení bonity klientů bankou, atd.)

Vzájemný vztah mezi variantami může při VHV být následující:

- Varianta  $X_i$  **dominuje** variantu  $X_j$ , jestliže  $(y_{i1}, \dots, y_{ik}) \geq (y_{j1}, \dots, y_{jk})$ , ale vektory se nerovnejí.
- Varianta  $X_j$  dominuje variantu  $X_i$
- Varianty  $X_i, X_j$  jsou vzájemně **nedominované**.

Řekneme, že varianta  $X_i$  je nedominovaná, jestliže neexistuje žádná jiná varianta, která ji dominuje. Zřejmě kompromisní varianta musí být vždy nedominovaná. Dále definujeme pojmy **bazální** a **ideální** varianta, což je označení pro zpravidla reálně neexistující variantu nabývající nejhorších (resp. nejlepších) hodnot podle všech kritérií.

# VHV - vztahy mezi variantami, příklad

V úloze o výběru tabletu stanovte nedominované varianty a vyberte bazální a ideální variantu.

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1
Tablet 2	12000	1000	10	600	3
Tablet 3	5000	512	7	380	4
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2
Tablet 5	5000	256	4	400	5

V tabulce jsou vyznačeny nejlepší hodnoty dosažené u jednotlivých kritérií.

# VHV - vztahy mezi variantami, příklad

V úloze o výběru tabletu stanovte nedominované varianty a vyberte bazální a ideální variantu.

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1
Tablet 2	12000	1000	10	600	3
Tablet 3	5000	512	7	380	4
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2
Tablet 5	5000	256	4	400	5

V tabulce jsou vyznačeny nejlepší hodnoty dosažené u jednotlivých kritérií. Ideální varianta by tedy hypoteticky byla (5000 Kč, 4000 MB, 10 hod., 380g a 1. pořadí dle experta). Obdobně bazální varianta (20000 Kč, 256 MB, 3 hod., 1160g a 5. pořadí dle experta). Nedominované jsou téměř všechny varianty, dominovaný je pouze Tablet 5 (ve všem horší než Tablet 3)



# VHV - vyjádření preference kritérií

U většiny metod VHV je nutné, aby rozhodovatel vyjádřil své preference ve vztahu k jednotlivým kritériím. Tyto preference mohou být stanoveny pomocí

- **aspiračních úrovní kritérií**, tedy stanovením minimálních hodnot, kterých má být dosaženo u jednotlivých maximalizačních kritérií (resp. maximálních hodnot pro minimalizační kritéria). Preference kritérií je tak vyjádřena nepřímo, důležitějším kritériím nastavíme přísnější limity.
- **pořadí kritérií** (ordinální informace o kritériích)
- **vah kritérií**:  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ ,  $\sum v_i = 1$ ,  $v_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . (kardinální informace o kritériích)
- **míry substituce** mezi kriteriálními hodnotami, na níž jsou založeny kompenzační metody VHV

# VHV - metody odhadu vah kritérií

Získání vah od rozhodovatele přímo v numerické podobě bývá problematické, proto je vhodné usnadnit mu situaci pomocí nějakého jednoduchého nástroje.

- **Metoda pořadí** vyžaduje pouze seřazení kritérií od nejméně důležitého po nejdůležitější. Přiřazené pořadí  $p_i$  tedy bude nabývat hodnot  $1, \dots, k$  a odhad vah lze získat jejich normalizací: 
$$v_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^k p_i}.$$
- **Bodovací metoda** spočívá v tom, že rozhodovatel přiřadí každému kritériu body  $p_i$  z nějaké předem zvolené škály. Přepočtení bodů na váhy je stejný jako výše.
- **Fullerův trojúhelník** je založen na párovém porovnávání kritérií. Jednotlivým kritériím se přiřadí tolik bodů  $p_i$ , kolikrát je zvolen jako důležitější nebo stejně důležitý mezi všemi dvojicemi různých kritérií. (takových dvojic je  $k(k-1)/2$  a lze je uspořádat do trojúhelníkového schématu, odtud název metody)
- Poněkud propracovanější přístup představuje **Saatyho metoda**, při níž se projdou všechny dvojice kritérií a každé se přiřadí číslo  $s_{ij} \approx \frac{v_i}{v_j}$ , které odhaduje poměr mezi důležitostmi jednotlivých kritérií. Matice  $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$  se nazývá Saatyho matice.

# VHV - Saatyho metoda odhadu vah kritérií

Saatyho metoda umožňuje formulovat preference verbálně a pak vyjádřit numericky pomocí stupnice:

- kritéria  $Y_i$  a  $Y_j$  jsou stejně důležitá, pak  $s_{ij} = s_{ji} = 1$ ,
- kritérium  $Y_i$  je slabě důležitější než  $Y_j$ , pak  $s_{ij} = 3$ ,  $s_{ji} = 1/3$ ,
- kritérium  $Y_i$  je silně důležitější než  $Y_j$ , pak  $s_{ij} = 5$ ,  $s_{ji} = 1/5$ ,
- kritérium  $Y_i$  je velmi silně důležitější než  $Y_j$ , pak  $s_{ij} = 7$ ,  $s_{ji} = 1/7$ ,
- kritérium  $Y_i$  je absolutně důležitější než  $Y_j$ , pak  $s_{ij} = 9$ ,  $s_{ji} = 1/9$ .

Jestliže uvedená stupnice nepostačuje, lze použít i mezistupně 2,4,6,8.

Pokud je Saatyho matice tzv. **konzistentní**, stačí váhy spočítat jako řešení soustavy rovnic  $\frac{v_i}{v_j} = s_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ ,  $\sum v_i = 1$ . Pro nekonzistentní matici soustava nemá řešení a váhy se pak odhadují například normalizací

geometrických průměrů řádků matice S:  $p_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^k s_{ij}}$ .

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Pro úlohu o tabletu ukažme různé způsoby stanovení vah kritérií.

Nejjednodušší metodou **pořadí** by uživatel při preferenci „1.cena, 2.RAM, 3.názor experta, 4.výdrž baterie, 5.hmotnost“ dospěl k vahám

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15} \right).$$

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Pro úlohu o tabletu ukažme různé způsoby stanovení vah kritérií.

Nejjednodušší metodou **pořadí** by uživatel při preferenci „1.cena, 2.RAM, 3.názor experta, 4.výdrž baterie, 5.hmotnost“ dospěl k vahám

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15} \right).$$

Jiným způsobem je označení preference kritéria z daného řádku oproti kritériím v jednotlivých sloupcích vyznačením hodnoty 1 ve **Fullerově trojúhelníku**:

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	skóre	váhy
cena		1	1	1	1		
RAM			1	1	1		
baterie				1	0		
hmotnost					0		
expert							

Pro výpočet skóre doplníme spodek tabulky symetricky opačnými hodnotami

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Pro úlohu o tabletu ukažme různé způsoby stanovení vah kritérií.

Nejjednodušší metodou **pořadí** by uživatel při preferenci „1.cena, 2.RAM, 3.názor experta, 4.výdrž baterie, 5.hmotnost“ dospěl k vahám

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15} \right).$$

Jiným způsobem je označení preference kritéria z daného řádku oproti kritériím v jednotlivých sloupcích vyznačením hodnoty 1 ve **Fullerově trojúhelníku**:

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	skóre	váhy
cena		1	1	1	1		
RAM	0		1	1	1		
baterie	0	0		1	0		
hmotnost	0	0	0		0		
expert	0	0	1	1			

Nyní vypočteme skóre jako součet počtu preferencí v daných řádcích.

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Pro úlohu o tabletu ukažme různé způsoby stanovení vah kritérií.

Nejjednodušší metodou **pořadí** by uživatel při preferenci „1.cena, 2.RAM, 3.názor experta, 4.výdrž baterie, 5.hmotnost“ dospěl k vahám

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15} \right).$$

Jiným způsobem je označení preference kritéria z daného řádku oproti kritériím v jednotlivých sloupcích vyznačením hodnoty 1 ve **Fullerově trojúhelníku**:

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	skóre	váhy
cena		1	1	1	1	4	
RAM	0		1	1	1	3	
baterie	0	0		1	0	1	
hmotnost	0	0	0		0	0	
expert	0	0	1	1		2	

Nyní vypočteme váhy vydělením bodových zisků jejich celkovým součtem, tj. 10.

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Pro úlohu o tabletu ukažme různé způsoby stanovení vah kritérií.

Nejjednodušší metodou **pořadí** by uživatel při preferenci „1.cena, 2.RAM, 3.názor experta, 4.výdrž baterie, 5.hmotnost“ dospěl k vahám

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15} \right).$$

Jiným způsobem je označení preference kritéria z daného řádku oproti kritériím v jednotlivých sloupcích vyznačením hodnoty 1 ve **Fullerově trojúhelníku**:

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	skóre	váhy
cena		1	1	1	1	4	0,4
RAM	0		1	1	1	3	0,3
baterie	0	0		1	0	1	0,1
hmotnost	0	0	0		0	0	0
expert	0	0	1	1		2	0,2

Bohužel váha nejméně důležitého kritéria vyjde při konzistenci v preferencích nulová. Postup je možné modifikovat přidáním jedniček na diagonále (jako by každé kritérium bylo ve srovnání se sebou samým důležitější).



# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Pro úlohu o tabletu ukažme různé způsoby stanovení vah kritérií.

Nejjednodušší metodou **pořadí** by uživatel při preferenci „1.cena, 2.RAM, 3.názor experta, 4.výdrž baterie, 5.hmotnost“ dospěl k vahám

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15} \right).$$

Jiným způsobem je označení preference kritéria z daného řádku oproti kritériím v jednotlivých sloupcích vyznačením hodnoty 1 ve **Fullerově trojúhelníku**:

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	skóre	váhy
cena	1	1	1	1	1	5	$\frac{5}{15}$
RAM	0	1	1	1	1	4	$\frac{4}{15}$
baterie	0	0	1	1	0	2	$\frac{2}{15}$
hmotnost	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{15}$
expert	0	0	1	1	1	3	$\frac{3}{15}$

Dostaneme stejné váhy jako u metody pořadí.

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Ukažme ještě pro stejné zadání jedno z možných uživatelských vyplnění **Saatyho matice**.

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	$b_i$	$v_i$
cena	1	4	2	9	2		
RAM	1/4	1	1/2	3	1/2		
baterie	1/2	2	1	7	1		
hmotnost	1/9	1/3	1/7	1	1/7		
expert	1/2	2	1	7	1		

Matice je dostatečně konzistentní. (lze vypočítat index konzistence 0,005)  
Doplníme geometrické průměry řádků  $b_i$  a z nich odvozené váhy  $v_i$ .

# VHV - metody odhadu vah kritérií, příklad

Ukažme ještě pro stejné zadání jedno z možných uživatelských vyplnění  
**Saatyho matice**.

	cena	RAM	baterie	hmotnost	expert	$b_i$	$v_i$
cena	1	4	2	9	2	2,7	0,41
RAM	1/4	1	1/2	3	1/2	0,72	0,11
baterie	1/2	2	1	7	1	1,48	0,22
hmotnost	1/9	1/3	1/7	1	1/7	0,24	0,04
expert	1/2	2	1	7	1	1,48	0,22

U Saatyho metody vycházejí váhy většinou více diferencované než u ostatních metod.

# VHV - klasifikace metod

Existuje celá řada přístupů k řešení úloh VHV, my zmíníme pouze ty jednodušší z nich. Metody lze klasifikovat podle typu informace o preferencích mezi jednotlivými kritérii a variantami, viz následující stručný přehled.

Informace o preferencích mezi variantami					
aspirační úrovně	ordinální informace	kardinální informace			
		funkce užitku	vzdálenost variant od bazální resp. ideální	preferenční relace	mezní míra substituce
Metody					
PRIAM	Lexikografická ORESTE Permutační	WSA	TOPSIS PROMETHEE ELECTRE	AHP	Kompenzační

# VHV - metody nevyžadující váhy kritérií

Pokud nejsou známy preference mezi kritérii nebo jsou kritéria rovnocenně důležitá, můžeme pro výběr kompromisní varianty použít pouhá pořadí hodnot u jednotlivých kritérií (v případě shodných hodnot se přiřadí průměrné pořadí). Vybere se ta varianta, která bude mít nejnižší součet pořadí přes všechna kritéria.

V příkladu s tablety pracujeme s pořadími rovnou v posledním sloupci (expertní názor). V ostatních sloupcích nahradíme jednotlivé hodnoty pořadím v rámci sloupce a doplníme jejich řádkové součty:

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor display	součet
Tablet 1	3	2,5	2	4	1	12,5
Tablet 2	3	2,5	1	3	3	12,5
Tablet 3	1	4	3	1	4	13
Tablet 4	5	1	5	5	2	18
Tablet 5	1	5	4	2	5	17

Podle uvedeného postupu by se jako nejvýhodnější jevíly tablety 1 a 2.

# VHV - metody nevyžadující váhy kritérií

Další metodou nevyžadující apriori váhy kritérií je metoda **PRIAM**, která pracuje s aspiračními úrovněmi kritérií. Varianty jsou pro konkrétní nastavení aspiračních úrovní rozděleny na akceptovatelné a neakceptovatelné. Může nastat situace, kdy nevyhovuje žádná varianta, pak je nutné úrovně některých kritérií uvolnit. Naopak, vyhovuje-li mnoho variant, je možné jejich počet zredukovat zpřísněním některých úrovní. Metoda PRIAM je interaktivním přístupem postupného přizpůsobování aspiračních mezí k dosažení určitého počtu akceptovatelných variant (v krajním případě jediné varianty, kterou pak zvolíme jako kompromisní).

# VHV - metody nevyžadující váhy kritérií

Další metodou nevyžadující apriori váhy kritérií je metoda **PRIAM**, která pracuje s aspiračními úrovněmi kritérií. Varianty jsou pro konkrétní nastavení aspiračních úrovní rozděleny na akceptovatelné a neakceptovatelné. Může nastat situace, kdy nevyhovuje žádná varianta, pak je nutné úrovně některých kritérií uvolnit. Naopak, vyhovuje-li mnoho variant, je možné jejich počet zredukovat zpřísněním některých úrovní. Metoda PRIAM je interaktivním přístupem postupného přizpůsobování aspiračních mezí k dosažení určitého počtu akceptovatelných variant (v krajním případě jediné varianty, kterou pak zvolíme jako kompromisní).

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	vyhovuje
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1	ANO
Tablet 2	12000	1000	10	600	3	ANO
Tablet 3	5000	512	7	380	4	ANO
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2	ANO
Tablet 5	5000	256	4	400	5	ANO

Pro úlohu s tablety můžeme nastavit výchozí aspirační úrovně na hodnoty bazální varianty  $z^0 = (20000, 256, 3, 1160, 5)$ , pak vyhovují všechny tablety.

# VHV - metody nevyžadující váhy kritérií

Další metodou nevyžadující apriori váhy kritérií je metoda **PRIAM**, která pracuje s aspiračními úrovněmi kritérií. Varianty jsou pro konkrétní nastavení aspiračních úrovní rozděleny na akceptovatelné a neakceptovatelné. Může nastat situace, kdy nevyhovuje žádná varianta, pak je nutné úrovně některých kritérií uvolnit. Naopak, vyhovuje-li mnoho variant, je možné jejich počet zredukovat zpřísněním některých úrovní. Metoda PRIAM je interaktivním přístupem postupného přizpůsobování aspiračních mezí k dosažení určitého počtu akceptovatelných variant (v krajním případě jediné varianty, kterou pak zvolíme jako kompromisní).

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	vyhovuje
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1	ANO
Tablet 2	12000	1000	10	600	3	ANO
Tablet 3	5000	512	7	380	4	ANO
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2	NE
Tablet 5	5000	256	4	400	5	ANO

Zpřísněním požadavku na cenu max. 12000Kč dostaneme  $z^1 = (12000, 256, 3, 1160, 5)$ , takže tablet 4 již nevyhovuje.



# VHV - metody nevyžadující váhy kritérií

Další metodou nevyžadující apriori váhy kritérií je metoda **PRIAM**, která pracuje s aspiračními úrovněmi kritérií. Varianty jsou pro konkrétní nastavení aspiračních úrovní rozděleny na akceptovatelné a neakceptovatelné. Může nastat situace, kdy nevyhovuje žádná varianta, pak je nutné úrovně některých kritérií uvolnit. Naopak, vyhovuje-li mnoho variant, je možné jejich počet zredukovat zpřísněním některých úrovní. Metoda PRIAM je interaktivním přístupem postupného přizpůsobování aspiračních mezí k dosažení určitého počtu akceptovatelných variant (v krajním případě jediné varianty, kterou pak zvolíme jako kompromisní).

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	vyhovuje
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1	ANO
Tablet 2	12000	1000	10	600	3	ANO
Tablet 3	5000	512	7	380	4	NE
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2	NE
Tablet 5	5000	256	4	400	5	NE

Zpřísněním požadavku na baterii a expertní názor,  
 $z^2 = (12000, 256, 7, 1160, 3)$ , vyřadíme dále tablety 3 a 5.

# VHV - metody nevyžadující váhy kritérií

Další metodou nevyžadující apriori váhy kritérií je metoda **PRIAM**, která pracuje s aspiračními úrovněmi kritérií. Varianty jsou pro konkrétní nastavení aspiračních úrovní rozděleny na akceptovatelné a neakceptovatelné. Může nastat situace, kdy nevyhovuje žádná varianta, pak je nutné úrovně některých kritérií uvolnit. Naopak, vyhovuje-li mnoho variant, je možné jejich počet zredukovat zpřísněním některých úrovní. Metoda PRIAM je interaktivním přístupem postupného přizpůsobování aspiračních mezí k dosažení určitého počtu akceptovatelných variant (v krajním případě jediné varianty, kterou pak zvolíme jako kompromisní).

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	vyhovuje
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1	NE
Tablet 2	12000	1000	10	600	3	ANO
Tablet 3	5000	512	7	380	4	NE
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2	NE
Tablet 5	5000	256	4	400	5	NE

Budeme-li požadovat ještě nižší hmotnost,  $z^3 = (12000, 256, 7, 600, 3)$ , zůstane přijatelný pouze tablet 2.

# VHV - metody vyžadující pořadí kritérií

Nejpoužívanější a současně zřejmě nejjednodušší metodou z třídy postupů vyžadujících pouze ordinální informaci o kritériích je metoda **lexikografická**. Řídíme se dle nejdůležitějšího kritéria a je-li nejlépe hodnocená varianta dle tohoto kritéria jediná, je zvolena jako kompromisní. V případě, že by nejlepší hodnoty dosáhlo více variant, vybere se ta z nich, která má lepší hodnocení dle druhého nejdůležitějšího kritéria, atd.

# VHV - metody vyžadující pořadí kritérií

Nejpoužívanější a současně zřejmě nejjednodušší metodou z třídy postupů vyžadujících pouze ordinální informaci o kritériích je metoda **lexikografická**.

Řídíme se dle nejdůležitějšího kritéria a je-li nejlépe hodnocená varianta dle tohoto kritéria jediná, je zvolena jako kompromisní. V případě, že by nejlepší hodnoty dosáhlo více variant, vybere se ta z nich, která má lepší hodnocení dle druhého nejdůležitějšího kritéria, atd.

Použitím lexikografické metody na výběr tabletu, je-li prioritním kritériem cena a druhým kritériem výdrž baterie, se rozhodneme pro tablet 3, protože je spolu s tabletem 5 nejlevnější a jeho baterie vydrží 7 hodin oproti 4 hodinám tabletu 5:

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	vyhovuje
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1	NE
Tablet 2	12000	1000	10	600	3	NE
Tablet 3	5000	512	7	380	4	ANO
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2	NE
Tablet 5	5000	256	4	400	5	NE

# VHV - metody vyžadující kardinální informaci o kritériích

Existují tři základní kategorie přístupů k hodnocení variant využívající vah kritérií, a to:

- maximalizace užitku
- minimalizace vzdálenosti od ideální varianty
- preferenční relace

Z každé skupiny metod uvedeme aspoň jednoho zástupce. První z možností je vyčíslení užitku jednotlivých variant na škále od 0 do 1. Pro vyjádření celkového užitku varianty je třeba nejprve vyjádřit dílčí funkce užitku  $u_j$  dle jednotlivých kritérií  $j = 1, \dots, k$ . Kardinální hodnoty  $y_{ij}$  jsou tedy nahrazeny pomocí hodnot  $u_{ij} = u_j(y_{ij})$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Dílčí funkce užitku jsou nastaveny tak, aby ideální varianta měla dílčí užitek dle všech kritérií roven 1 a bazální varianta nulový. Rozlišujeme tři typy funkcí užitku:

- 1 lineární (růst užitku je proporcionální růstu hodnot kritéria)
- 2 progresivní (tempo růstu užitku se při zlepšování hodnot zvyšuje)
- 3 degresivní (tempo růstu užitku se při zlepšování hodnot snižuje)

# VHV - metody založené na funkci užitku

Metoda **váženého součtu** (WSA) je založena na konstrukci lineární funkce užitku se stupnicí od 0 do 1. Jestliže pro  $Y_j$  označíme  $D_j$  nejnižší a  $H_j$  nejvyšší kritériální hodnotu, pak lze při maximalizaci nahradit prvky  $y_{ij}$  standardizovanými hodnotami

$$y'_{ij} = \frac{y_{ij} - D_j}{H_j - D_j}.$$

Potom bude mít tedy nejhorší varianta  $D_j$  užitek 0 a nejlepší  $H_j$  užitek 1. Pro minimalizační kritéria použijeme vztah

$$y'_{ij} = \frac{H_j - y_{ij}}{H_j - D_j}.$$

Tentokrát bude nejhorší varianta  $H_j$  a nejlepší  $D_j$  a bude jim opět odpovídat užitek 0, resp. 1. Celkový užitek varianty  $X_i$  pak spočteme jako vážený součet dílčích užiteků  $u(X_i) = \sum_{j=1}^k v_j y'_{ij}$  a varianty pak seřadíme podle klesajících hodnot užitku.

# VHV - metoda WSA, příklad

Použijme metodu WSA na problém výběru tabletu, přičemž převezmeme váhy stanovené dle Saatyho metody:

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	užitek
Tablet 1	12000	1000	9,5	680	1	
Tablet 2	12000	1000	10	600	3	
Tablet 3	5000	512	7	380	4	
Tablet 4	20000	4000	3	1160	2	
Tablet 5	5000	256	4	400	5	
váhy	0,41	0,12	0,22	0,03	0,22	
$D_j$	5000	256	3	380	1	
$H_j$	20000	4000	10	1160	5	
typ	min	max	max	min	min	

Přepočteme na standardizované hodnoty  $y'_{ij}$ .

# VHV - metoda WSA, příklad

Použijme metodu WSA na problém výběru tabletu, přičemž převezmeme váhy stanovené dle Saatyho metody:

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	užitek
Tablet 1	0,53	0,2	0,93	0,62	1	
Tablet 2	0,53	0,2	1	0,72	0,5	
Tablet 3	1	0,07	0,57	1	0,25	
Tablet 4	0	1	0	0	0,75	
Tablet 5	1	0	0,14	0,97	0	
váhy	0,41	0,12	0,22	0,03	0,22	
$D_j$	5000	256	3	380	1	
$H_j$	20000	4000	10	1160	5	
typ	min	max	max	min	min	

Pro každou variantu spočteme hodnotu agregované funkce užitku.



# VHV - metoda WSA, příklad

Použijme metodu WSA na problém výběru tabletu, přičemž převezmeme váhy stanovené dle Saatyho metody:

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display	užitek
Tablet 1	0,53	0,2	0,93	0,62	1	0,69
Tablet 2	0,53	0,2	1	0,72	0,5	0,59
Tablet 3	1	0,07	0,57	1	0,25	0,63
Tablet 4	0	1	0	0	0,75	0,29
Tablet 5	1	0	0,14	0,97	0	0,47
váhy	0,41	0,12	0,22	0,03	0,22	
$D_j$	5000	256	3	380	1	
$H_j$	20000	4000	10	1160	5	
typ	min	max	max	min	min	

Největší užitek nám přinese tablet 1 (v závěsu s tabletem 3).

# VHV - metody založené na optimalizaci vzdálenosti od bazální a ideální varianty

Metoda **TOPSIS** spočívá ve výběru varianty, která je co nejbližší tzv. **ideální variantě** a současně je co nejdál od tzv. **bazální varianty**. Popišme její postup pro případ, kdy že jsou všechna kritéria maximalizační. Postupuje se v následujících krocích:

- 1 Normalizace: hodnoty  $y_{ij}$  se transformují na  $r_{ij}$  podle vztahu

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_{ij}^2}}.$$

- 2 Vypočte se vážená kritériální matice  $W = (w_{ij})$  jako  $w_{ij} = v_j r_{ij}$ .
- 3 Z prvků  $W$  se vybere ideální varianta  $H = (H_1, \dots, H_k)$  a bazální varianta  $D = (D_1, \dots, D_k)$ , kde  $H_j = \max_i (w_{ij})$ ,  $D_j = \min_i (w_{ij})$ . (Pozor! Hodnoty  $H_j$  a  $D_j$  se neshodují s těmi dříve zavedenými - jsou spočteny po normalizaci a zvážení sloupců!)
- 4 Vypočtou se vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^k (w_{ij} - H_j)^2}, \quad d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^k (w_{ij} - D_j)^2}$$

- 5 Nakonec se vypočte relativní vzdálenost od bazální varianty  $c_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}$  a varianty se podle ní sestupně uspořádají.

# VHV - metoda TOPSIS, příklad

Použijme metodu TOPSIS pro výběr tabletu, jako váhy opět vezmeme Saatyho odhady.

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	expert display	$d_i^+$	$d_i^-$	$c_i$
T1	0,442	0,234	0,584	0,432	0,135			
T2	0,442	0,234	0,615	0,382	0,405			
T3	0,184	0,120	0,431	0,242	0,539			
T4	0,736	0,934	0,185	0,738	0,270			
T5	0,184	0,06	0,246	0,254	0,674			
$v_j$	0,41	0,12	0,22	0,03	0,22			
typ	min	max	max	min	min			
$D_j$								
$H_j$								

Přepočteme na normalizované hodnoty  $r_{ij}$ .

# VHV - metoda TOPSIS, příklad

Použijme metodu TOPSIS pro výběr tabletu, jako váhy opět vezmeme Saatyho odhady.

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	expert	$d_i^+$	$d_i^-$	$c_i$
T1	0,181	0,028	0,129	0,013	0,03			
T2	0,181	0,028	0,135	0,011	0,089			
T3	0,075	0,014	0,095	0,007	0,119			
T4	0,302	0,112	0,041	0,022	0,059			
T5	0,075	0,007	0,054	0,008	0,148			
$v_j$	0,41	0,12	0,22	0,03	0,22			
typ	min	max	max	min	min			
$D_j$	0,302	0,007	0,041	0,022	0,148			
$H_j$	0,075	0,112	0,135	0,007	0,030			

Spočteme matici  $W_{ij}$  a určíme ideální a bazální variantu:  $H$ ,  $D$ .

# VHV - metoda TOPSIS, příklad

Použijme metodu TOPSIS pro výběr tabletu, jako váhy opět vezmeme Saatyho odhady.

	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	expert	$d_i^+$	$d_i^-$	$c_i$
T1	0,181	0,028	0,129	0,013	0,03	0,135	0,192	0,587
T2	0,181	0,028	0,135	0,011	0,089	0,148	0,166	0,53
T3	0,075	0,014	0,095	0,007	0,119	0,138	0,235	0,63
T4	0,302	0,112	0,041	0,022	0,059	0,248	0,138	0,357
T5	0,075	0,007	0,054	0,008	0,148	0,178	0,227	0,56
$v_j$	0,41	0,12	0,22	0,03	0,22			
typ	min	max	max	min	min			
$D_j$	0,302	0,007	0,041	0,022	0,148			
$H_j$	0,075	0,112	0,135	0,007	0,030			

Vypočteme vzdálenosti od ideální a bazální varianty  $d_i^+$  a  $d_i^-$  a relativní index vzdálenosti od bazální varianty  $c_i$ . Nejlépe se jeví tablet 3.

# VHV - metody třídy ELECTRE

Významnou skupinu metod tvoří metody založené na vyhodnocování podle **preferenční relace**. Z dílčích preferencí podle jednotlivých kritérií se vhodnými agregačními procedurami odvodí celková preference. Ta však bohužel nemusí být tranzitivní, takže je nutný další postup, který stanoví celkové pořadí variant nebo je alespoň rozdělí do několika indifferenčních tříd. U metody **ELECTRE I** jde o rozdělení na tzv. **efektivní a neefektivní** varianty.

# VHV - metody třídy ELECTRE

Významnou skupinu metod tvoří metody založené na vyhodnocování podle **preferenční relace**. Z dílčích preferencí podle jednotlivých kritérií se vhodnými agregačními procedurami odvodí celková preference. Ta však bohužel nemusí být tranzitivní, takže je nutný další postup, který stanoví celkové pořadí variant nebo je alespoň rozdělí do několika indifferenčních tříd. U metody

**ELECTRE I** jde o rozdělení na tzv. **efektivní a neefektivní** varianty.

Předpokládejme, že všechna kritéria jsou maximalizační. Pro každou dvojici variant  $X_i, X_j$  určíme množiny

$$C_{ij} = \{h \in \{1, \dots, k\}; y_{ih} \geq y_{jh}\}$$

indexů kritérií, podle nichž je varianta  $X_i$  alespoň tak dobrá jako  $X_j$  a

$$D_{ij} = \{h \in \{1, \dots, k\}; y_{ih} < y_{jh}\}$$

indexů kritérií, podle nichž je varianta  $X_i$  horší než  $X_j$

# VHV - metody třídy ELECTRE

Pro stanovené váhy kritérií  $v_1, \dots, v_k$  pak vypočteme pro každou dvojici variant **stupeň preference** vztahem

$$c_{ij} = \sum_{h \in G_{ij}} v_h$$

Platí  $c_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .



# VHV - metody třídy ELECTRE

Pro stanovené váhy kritérií  $v_1, \dots, v_k$  pak vypočteme pro každou dvojici variant **stupeň preference** vztahem

$$c_{ij} = \sum_{h \in C_{ij}} v_h$$

Platí  $c_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

V dalším kroku se pro každou dvojici variant vypočte **stupeň dispreference** vztahem

$$d_{ij} = \frac{\max_{h \in D_{ij}} |y_{ih} - y_{jh}|}{\max_{h=1, \dots, k} |y_{ih} - y_{jh}|},$$

v případě  $D_{ij} = \emptyset$  se definuje  $d_{ij} = 0$ . Opět platí  $d_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

# VHV - metody třídy ELECTRE

Pro stanovené váhy kritérií  $v_1, \dots, v_k$  pak vypočteme pro každou dvojici variant **stupeň preference** vztahem

$$c_{ij} = \sum_{h \in C_{ij}} v_h$$

Platí  $c_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

V dalším kroku se pro každou dvojici variant vypočte **stupeň dispreference** vztahem

$$d_{ij} = \frac{\max_{h \in D_{ij}} |y_{ih} - y_{jh}|}{\max_{h=1, \dots, k} |y_{ih} - y_{jh}|},$$

v případě  $D_{ij} = \emptyset$  se definuje  $d_{ij} = 0$ . Opět platí  $d_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Pomocí vhodně stanovených konstant **prahu preference**  $c^*$  a **prahu dispreference**  $d^*$  se rozhodne o celkové preferenci mezi  $X_i$  a  $X_j$ :

$X_i$  preferujeme před  $X_j$ , platí-li  $c_{ij} \geq c^* \wedge d_{ij} \leq d^*$ .

# VHV - metody třídy ELECTRE

Pro stanovené váhy kritérií  $v_1, \dots, v_k$  pak vypočteme pro každou dvojici variant **stupeň preference** vztahem

$$c_{ij} = \sum_{h \in C_{ij}} v_h$$

Platí  $c_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

V dalším kroku se pro každou dvojici variant vypočte **stupeň dispreference** vztahem

$$d_{ij} = \frac{\max_{h \in D_{ij}} |y_{ih} - y_{jh}|}{\max_{h=1, \dots, k} |y_{ih} - y_{jh}|},$$

v případě  $D_{ij} = \emptyset$  se definuje  $d_{ij} = 0$ . Opět platí  $d_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Pomocí vhodně stanovených konstant **prahu preference**  $c^*$  a **prahu dispreference**  $d^*$  se rozhodne o celkové preferenci mezi  $X_i$  a  $X_j$ :

$X_i$  preferujeme před  $X_j$ , platí-li  $c_{ij} \geq c^* \wedge d_{ij} \leq d^*$ .

Za **efektivní** považujeme ty varianty, které jsou preferovány před alespoň jednou variantou, ale současně není žádná varianta preferována před nimi. Výsledek závisí na volbě prahů, postupnými změnami jejich hodnot můžeme dostat pouze jedinou efektivní variantu a tu pak brát jako "nejlepší".

# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Pro naši úlohu o tabletech určíme množiny  $C_{ij}$

$C_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		{1, 2, 5}	{2, 3, 5}	{1, 3, 4, 5}	{2, 3, 5}
T2	{1, 2, 3, 4}		{2, 3, 5}	{1, 3, 4}	{2, 3, 5}
T3	{1, 4}	{1, 4}		{1, 4}	{1, 2, 3, 4, 5}
T4	{2}	{2, 5}	{2, 3, 5}		{2, 5}
T5	{1, 4}	{1, 4}	{1}	{1, 3, 4}	

# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Pro naši úlohu o tabletech určíme množiny  $C_{ij}$

$C_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		{1, 2, 5}	{2, 3, 5}	{1, 3, 4, 5}	{2, 3, 5}
T2	{1, 2, 3, 4}		{2, 3, 5}	{1, 3, 4}	{2, 3, 5}
T3	{1, 4}	{1, 4}		{1, 4}	{1, 2, 3, 4, 5}
T4	{2}	{2, 5}	{2, 3, 5}		{2, 5}
T5	{1, 4}	{1, 4}	{1}	{1, 3, 4}	

Pro Saatyho váhy (0,41; 0,12; 0,22; 0,03; 0,22)  
dopočteme tabulku stupňů preference:

$C_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		0,75	0,56	0,88	0,56
T2	0,78		0,56	0,66	0,56
T3	0,44	0,44		0,44	1
T4	0,12	0,34	0,56		0,34
T5	0,44	0,44	0,41	0,66	

# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Určíme také množiny  $D_{ij}$

$D_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		{3, 4}	{1, 4}	{2}	{1, 4}
T2	{5}		{1, 4}	{2, 5}	{1, 4}
T3	{2, 3, 5}	{2, 3, 5}		{2, 3, 5}	{}
T4	{1, 3, 4, 5}	{1, 3, 4}	{1, 4}		{1, 3, 4}
T5	{2, 3, 5}	{2, 3, 5}	{2, 3, 4, 5}	{2, 5}	

# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Určíme také množiny  $D_{ij}$

$D_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		{3, 4}	{1, 4}	{2}	{1, 4}
T2	{5}		{1, 4}	{2, 5}	{1, 4}
T3	{2, 3, 5}	{2, 3, 5}		{2, 3, 5}	{}
T4	{1, 3, 4, 5}	{1, 3, 4}	{1, 4}		{1, 3, 4}
T5	{2, 3, 5}	{2, 3, 5}	{2, 3, 4, 5}	{2, 5}	

Dopočteme tabulku stupňů dispreference, vyjdeme z standardizovaných hodnot  $y'_{ij}$ :

$d_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		0,1/0,5	0,47/0,75	0,8/0,93	0,47/1
T2	0,5/0,5		0,47/0,47	0,8/1	0,47/0,86
T3	0,75/0,75	0,28/0,47		0,93/1	0/0,43
T4	0,93/0,93	1/1	1/1		1/1
T5	1/1	0,86/0,86	0,43/0,43	1/1	

# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Stanovíme práh preference  $c^* = 0,5$  a vyznačíme  $c_{ij} \geq c^*$ .

$c_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		0,75	0,56	0,88	0,56
T2	0,78		0,56	0,66	0,56
T3	0,44	0,44		0,44	1
T4	0,12	0,34	0,56		0,34
T5	0,44	0,44	0,41	0,66	



# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Stanovíme práh preference  $c^* = 0,5$  a vyznačíme  $c_{ij} \geq c^*$ .

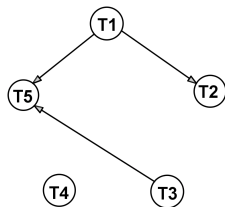
$c_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		0,75	0,56	0,88	0,56
T2	0,78		0,56	0,66	0,56
T3	0,44	0,44		0,44	1
T4	0,12	0,34	0,56		0,34
T5	0,44	0,44	0,41	0,66	

Stanovíme práh dispreference  $d^* = 0,5$  a vyznačíme  $d_{ij} \leq d^*$ .

$d_{ij}$	T1	T2	T3	T4	T5
T1		0,2	0,62	0,86	0,47
T2	1		1	0,8	0,55
T3	1	0,6		0,93	0
T4	1	1	1		1
T5	1	1	1	1	

# VHV - metoda ELECTRE I - příklad

Relaci preference můžeme znázornit v matici nebo v grafu (zahrneme pouze ty hrany, kde jsou splněny obě podmínky pro preferenci: dosažení prahu preference  $c^*$  a nepřekročení prahu dispreference  $d^*$ ):



Získali jsme dvě efektivní varianty 1 a 3 (uzly, ze kterých vycházejí šipky, ale žádné nevstupují).

# VHV - metody třídy PROMETHEE

Patří mezi nejčastěji používané postupy VHV. Základem je párové porovnávání variant postupně podle všech kritérií. Pro varianty  $X_i, X_j$  definujeme **intenzitu preference** podle kritéria  $Y_h$ :

$$P_h(X_i, X_j)$$

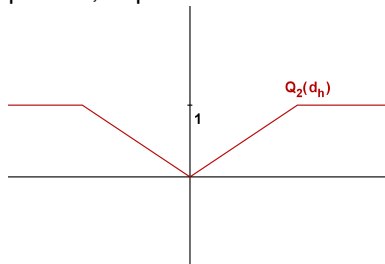
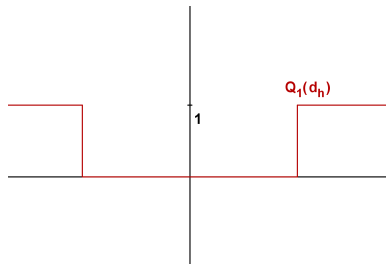
jako funkci nabývající hodnoty z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , takovou, že  $P_h(X_i, X_j) = 0$  není-li  $X_i$  preferováno před  $X_j$  a  $P_h(X_i, X_j) = 1$  v případě absolutní preference.

# VHV - metody třídy PROMETHEE

Patří mezi nejčastěji používané postupy VHV. Základem je párové porovnávání variant postupně podle všech kritérií. Pro varianty  $X_i, X_j$  definujeme **intenzitu preference** podle kritéria  $Y_h$ :

$$P_h(X_i, X_j)$$

jako funkci nabývající hodnoty z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , takovou, že  $P_h(X_i, X_j) = 0$  není-li  $X_i$  preferováno před  $X_j$  a  $P_h(X_i, X_j) = 1$  v případě absolutní preference. Intenzita preference závisí na diferenci  $d_h = (y_{ih} - y_{jh})$ , transformace  $Q$  převádějící diferenci  $d_h$  na intenzitu preference  $P_h(X_i, X_j)$  se nazývá **zobecněné kritérium** a může mít různý průběh, například viz obrázek:



# VHV - metody třídy PROMETHEE

Jsou-li stanoveny váhy kritérií, můžeme spočítat **globální preferenční indexy** podle vztahu

$$P(X_i, X_j) = \sum_{h=1}^k v_h P_h(X_i, X_j).$$

Pro získání výsledné relace vypočteme pro každou variantu pozitivní (výstupní) a negativní (vstupní) **tok** jako

$$F^+(X_i) = \sum_{j=1}^n P(X_i, X_j)/(n-1),$$

$$F^-(X_i) = \sum_{j=1}^n P(X_j, X_i)/(n-1),$$

# VHV - metody třídy PROMETHEE

Jsou-li stanoveny váhy kritérií, můžeme spočítat **globální preferenční indexy** podle vztahu

$$P(X_i, X_j) = \sum_{h=1}^k v_h P_h(X_i, X_j).$$

Pro získání výsledné relace vypočteme pro každou variantu pozitivní (výstupní) a negativní (vstupní) **tok** jako

$$F^+(X_i) = \sum_{j=1}^n P(X_i, X_j)/(n-1),$$

$$F^-(X_i) = \sum_{j=1}^n P(X_j, X_i)/(n-1),$$

Jednotlivé metody se v postupu dále liší, PROMETHEE II například uspořádává varianty podle tzv. **čistého toku**

$$F(X_i) = F^+(X_i) - F^-(X_i).$$

# VHV - metoda PROMETHEE, příklad

Pro úlohu s tablety vyjdeme při výpočtu diferencí  $d_h$  ze standardizovaných hodnot  $y'_{ij}$ :

$y'_{ij}$	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display
Tablet 1	0,53	0,2	0,93	0,62	1
Tablet 2	0,53	0,2	1	0,72	0,5
Tablet 3	1	0,07	0,57	1	0,25
Tablet 4	0	1	0	0	0,75
Tablet 5	1	0	0,14	0,97	0

# VHV - metoda PROMETHEE, příklad

Pro úlohu s tablety vyjdeme při výpočtu diferencí  $d_h$  ze standardizovaných hodnot  $y'_{ij}$ :

$y'_{ij}$	cena	RAM	výdrž baterie	hmotnost	OS, procesor, display
Tablet 1	0,53	0,2	0,93	0,62	1
Tablet 2	0,53	0,2	1	0,72	0,5
Tablet 3	1	0,07	0,57	1	0,25
Tablet 4	0	1	0	0	0,75
Tablet 5	1	0	0,14	0,97	0

Nejprve spočteme všechny difference a pak s využitím zobecněného kritéria  $Q_1$  s prahem  $d^* = 0,5$  přepočítáme na intenzity preference  $P_h(X_i, X_j)$ .  
Výpočet ukážeme jen pro  $d_1$ .



# VHV - metoda PROMETHEE, příklad

$d_1(X_i, X_j)$	T1	T2	T3	T4	T5
T1	0	0	-0,47	0,53	-0,47
T2	0	0	-0,47	0,53	-0,47
T3	0,47	0,47	0	1	0
T4	-0,53	-0,53	-1	0	1
T5	0,47	0,47	0	-1	0

# VHV - metoda PROMETHEE, příklad

$d_1(X_i, X_j)$	T1	T2	T3	T4	T5
T1	0	0	-0,47	0,53	-0,47
T2	0	0	-0,47	0,53	-0,47
T3	0,47	0,47	0	1	0
T4	-0,53	-0,53	-1	0	1
T5	0,47	0,47	0	-1	0

Intenzity preference jsou:

$P_1(X_i, X_j)$	T1	T2	T3	T4	T5
T1	0	0	0	1	0
T2	0	0	0	1	0
T3	0	0	0	1	0
T4	0	0	0	0	1
T5	0	0	0	0	0

# VHV - metoda PROMETHEE, příklad

Proces opakujeme pro všechna další kritéria a nakonec pomocí vah (0,41; 0,12; 0,22; 0,03; 0,22) agregujeme preferenční intenzity a získáme globální preferenční indexy:

$P(X_i, X_j)$	T1	T2	T3	T4	T5	$F^+(X_i)$
T1	0	0	0,22	0,66	0,22	
T2	0	0	0	0,44	0,22	
T3	0	0	0	0,66	0,22	
T4	0,12	0,12	0,12	0	0,75	
T5	0	0	0	0	0	
$F^-(X_i)$						

Zprůměrováním řádků a sloupců získáme pozitivní a negativní toky.

# VHV - metoda PROMETHEE, příklad

Proces opakujeme pro všechna další kritéria a nakonec pomocí vah (0,41; 0,12; 0,22; 0,03; 0,22) agregujeme preferenční intenzity a získáme globální preferenční indexy:

$P(X_i, X_j)$	T1	T2	T3	T4	T5	$F^+(X_i)$
T1	0	0	0,22	0,66	0,22	0,275
T2	0	0	0	0,44	0,22	0,165
T3	0	0	0	0,66	0,22	0,22
T4	0,12	0,12	0,12	0	0,75	0,2775
T5	0	0	0	0	0	0
$F^-(X_i)$	0,03	0,03	0,085	0,44	0,3525	

Rozdílem pozitivních a negativních toků získáme celkový tok:

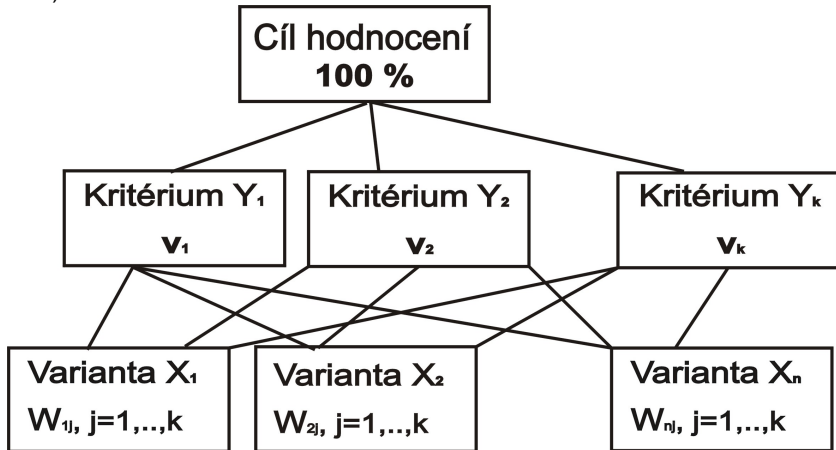
$$F(T1) = 0,245, F(T2) = 0,135, F(T3) = 0,135,$$

$$F(T4) = -0,1625, F(T5) = -0,3525$$

Nejlépe vychází tablet 1.

# VHV - metoda AHP

Metoda **AHP** (Analytic Hierarchy Process) modeluje rozhodovací problém pomocí hierarchické struktury, která má pro nejjednodušší úlohy tři úrovně (viz obr.)



# VHV - metoda AHP

Intenzitu vztahu mezi jednotlivými prvky hierarchie můžeme vyjádřit pomocí dělení počáteční jednotky (100 %) podle preferencí rozhodovatele na další úrovně. Nejprve jsou na druhé úrovni přiřazeny kritériím váhy  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Tyto váhy se dále rozdělují jednotlivým variantám podle toho, jak dobře či špatně jsou tyto varianty dle daného kritéria ohodnoceny, čímž pro dané kritérium dostaneme preferenční indexy  $w_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Z konstrukce modelu vyplývá, že platí vztahy  $\sum_{j=1}^k v_j = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n w_{ij} = v_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  Celkový užitek, podle nějž lze varianty uspořádat, se vypočte jako  $u(X_i) = \sum_{j=1}^k w_{ij}$ .

# VHV - metoda AHP

Intenzitu vztahu mezi jednotlivými prvky hierarchie můžeme vyjádřit pomocí dělení počáteční jednotky (100 %) podle preferencí rozhodovatele na další úrovně. Nejprve jsou na druhé úrovni přiřazeny kritériím váhy  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Tyto váhy se dále rozdělují jednotlivým variantám podle toho, jak dobře či špatně jsou tyto varianty dle daného kritéria ohodnoceny, čímž pro dané kritérium dostaneme preferenční indexy  $w_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Z konstrukce modelu vyplývá, že platí vztahy  $\sum_{j=1}^k v_j = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n w_{ij} = v_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  Celkový

užitek, podle něj lze varianty uspořádat, se vypočte jako  $u(X_i) = \sum_{j=1}^k w_{ij}$ .

Vlastní numerická realizace je založena na párovém porovnávání prvků podobně jako u Saatyho metody: Pro nejvyšší uzel se sestaví porovnávací matice ( $k \times k$ ) a z ní se odvodí váhy kritérií. Následně se pro každé kritérium určí preference variant párovým porovnáváním v matici ( $n \times n$ ). Nevýhodou metody je tedy očividně velký objem porovnávání, což je na druhou stranu vyváženo její univerzální použitelností a možností použití verbální stupnice pro vyjádření preferencí.

# Vícekriteriální programování

Ve vícekriteriálním programování jde o optimalizaci více účelových funkcí na přípustné množině definované sadou omezení. Narozdíl od úloh VHV je množina variant v úlohách nekonečná a kritéria jsou definována v podobě funkcí. Jsou-li všechny účelové funkce i omezující podmínky lineární, mluvíme o vícekriteriálním lineárním programování (VLP). Problém VLP tedy můžeme formulovat jako úlohu "optimalizovat"

$$z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \dots, z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x},$$

za podmínek

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

kde  $\mathbf{c}^i$  je cenový vektor  $i$ -té účelové funkce.



# Vícekriteriální programování

Ve vícekriteriálním programování jde o optimalizaci více účelových funkcí na přípustné množině definované sadou omezení. Narozdíl od úloh VHV je množina variant v úlohách nekonečná a kritéria jsou definována v podobě funkcí. Jsou-li všechny účelové funkce i omezující podmínky lineární, mluvíme o vícekriteriálním lineárním programování (VLP). Problém VLP tedy můžeme formulovat jako úlohu "optimalizovat"

$$z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \dots, z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x},$$

za podmínek

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

kde  $\mathbf{c}^i$  je cenový vektor  $i$ -té účelové funkce.

Pomocí ekvivalence minimalizační úlohy pro  $z_i$  s maximalizační úlohou pro  $-z_i$  můžeme převést úlohu do takové podoby, aby všechna kritéria měla maximalizační charakter. Úlohu je pak možné zapsat pomocí maticového zápisu, označíme-li  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$  vektor účelových funkcí a  $\mathbf{C}$  matici vytvořenou z cenových vektorů  $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^k$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

# Model VLP - základní pojmy

Podobně jako u VHV je typicky cílem nalézt v množině všech přípustných řešení pomocí vhodného postupu nějaké prakticky přijatelné, tzv. **kompromisní** řešení. Je dobré si uvědomit, že při hledání kompromisního řešení se opět stačí omezit na **nedominovaná** řešení. Řešení  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  je nedominované, pokud neexistuje žádné přípustné řešení, jehož vektor kritériálních hodnot by byl ve všech složkách větší nebo roven vektoru  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}$  (s vyloučením případu rovnosti vektorů).

# Model VLP - základní pojmy

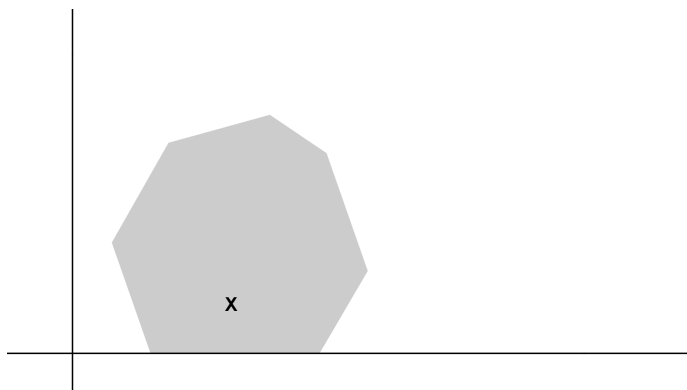
Podobně jako u VHV je typicky cílem nalézt v množině všech přípustných řešení pomocí vhodného postupu nějaké prakticky přijatelné, tzv.

**kompromisní** řešení. Je dobré si uvědomit, že při hledání kompromisního řešení se opět stačí omezit na **nedominovaná** řešení. Řešení  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  je nedominované, pokud neexistuje žádné přípustné řešení, jehož vektor kritériálních hodnot by byl ve všech složkách větší nebo roven vektoru  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}$  (s vyloučením případu rovnosti vektorů).

Většina principů pro hledání kompromisního řešení je založena na řešení dílčích úloh lineárního programování  $z_i = \mathbf{c}^i \cdot \mathbf{x} \rightarrow \max, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$  standardní simplexovou metodou. Vektor  $\mathbf{x}_H$ , ve kterém všechny účelové funkce nabývají svých optimálních hodnot nazýváme **ideální řešení**. Analogicky bychom mohli zavést **bazální řešení**  $\mathbf{x}_D$ . Optimální a bazální řešení zpravidla neleží v přípustné množině.

# Model VLP - grafické znázornění

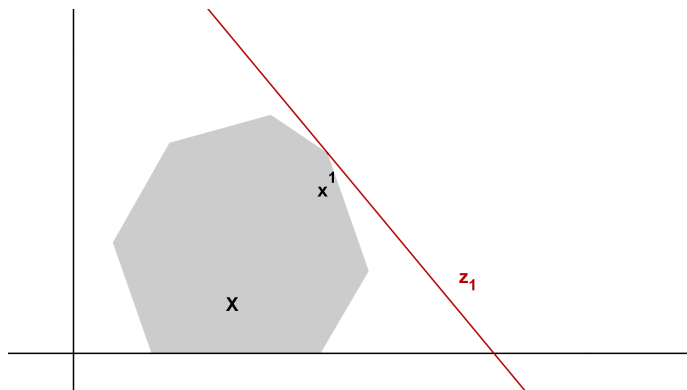
Vícekriteriální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kriteriálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.



Vyznačíme přípustnou množinu  $X$ .

# Model VLP - grafické znázornění

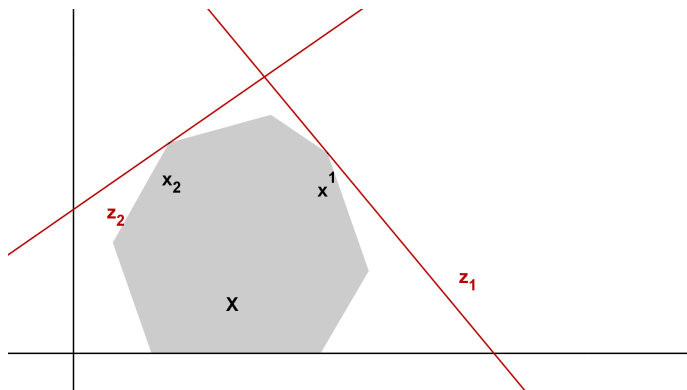
Vícekriteriální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kriteriálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.



Dílčí úloha LP pro účelovou funkci  $z_1 = c^1 \cdot x$  má optimum v bodě  $x^1$ .

# Model VLP - grafické znázornění

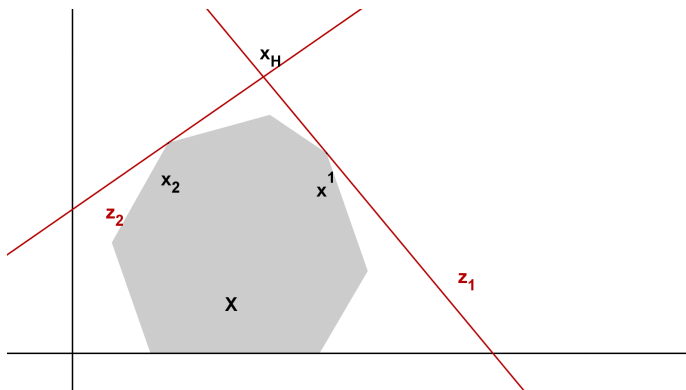
Vícekriteriální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kriteriálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.



Dílní úloha LP pro účelovou funkci  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}$  má optimum v bodě  $\mathbf{x}^2$ .

# Model VLP - grafické znázornění

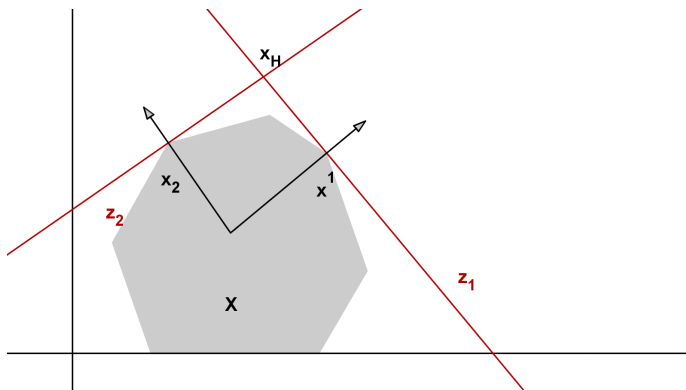
Vícekriteriální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kriteriálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.



Průsečík přímek znázorňujících úroveň cílové funkce vedené v dílčích optimech představuje ideální řešení  $x_H$ .

# Model VLP - grafické znázornění

Vícekritériální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kritériálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.

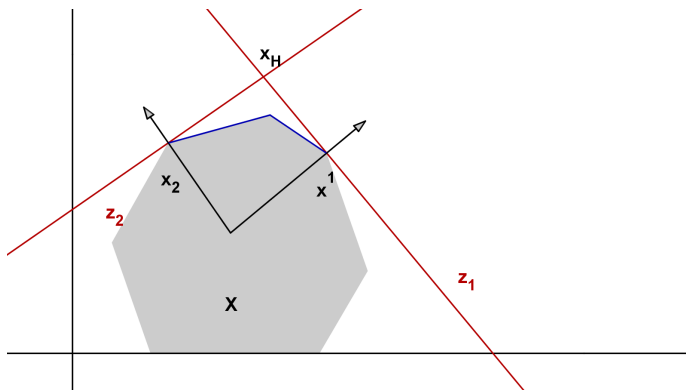


Normálové vektory k těmto přímkám (tedy vektory cenových koeficientů  $c^i$ ) vyjadřují směr růstu účelových funkcí. Jejich nezáporné lineární kombinace definují tzv. **kritériální kužel**.



# Model VLP - grafické znázornění

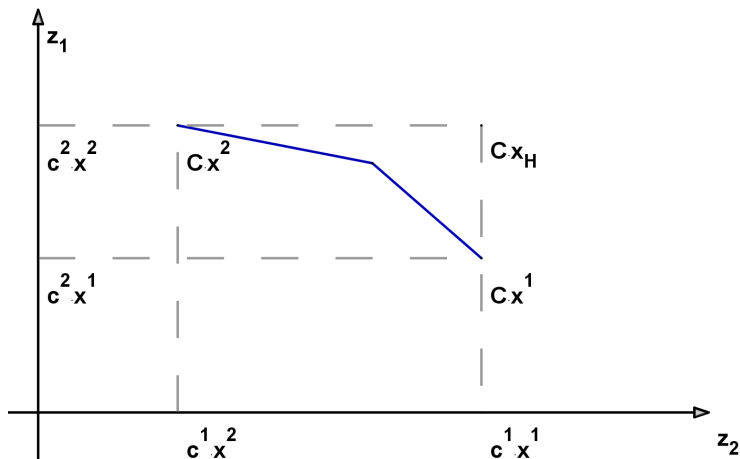
Vícekriteriální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kriteriálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.



Na hranici množiny přípustných řešení vymezené kriteriálním kuželem leží všechna nedominovaná řešení.

# Model VLP - grafické znázornění

Při zobrazování v kritériálním prostoru vynášíme na jednotlivé osy přímo hodnoty účelových funkcí.



Modře jsou vyznačeny nedominované hodnoty

# Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Při řešení úloh VLP můžeme požadovat výsledky v podobě úplného popisu množiny nedominovaných řešení nebo nalezení nějaké její reprezentativní podmnožiny nebo výběru několika kompromisních variant. Chce-li uživatel vybrat jedinou kompromisní variantu, bude jeho rozhodnutí značně záviset na preferencích jednotlivých kritérií. Ty mohou být zadávány v různých fázích výpočtu:

- před započítáním výpočtu,
- interaktivně v průběhu výpočtu,
- po skončení výpočtu,

a to opět prostřednictvím aspiračních úrovní kritérií, pořadí kritérií, váhami kritérií nebo mírou kompenzace kritériálních hodnot.

# Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Při řešení úloh VLP můžeme požadovat výsledky v podobě úplného popisu množiny nedominovaných řešení nebo nalezení nějaké její reprezentativní podmnožiny nebo výběru několika kompromisních variant. Chce-li uživatel vybrat jedinou kompromisní variantu, bude jeho rozhodnutí značně záviset na preferencích jednotlivých kritérií. Ty mohou být zadávány v různých fázích výpočtu:

- **před** započítáním výpočtu,
- interaktivně **v průběhu** výpočtu,
- **po** skončení výpočtu,

a to opět prostřednictvím aspiračních úrovní kritérií, pořadí kritérií, váhami kritérií nebo mírou kompenzace kritériálních hodnot. Podle toho, kdy je informace o kritériích do modelu zapracována, dělíme výpočetní metody na:

- metody s preferenční informací **a priori**
- metody s preferenční informací **a posteriori**
- metody **s postupným zpřesňováním** preferenční informace
- metody kombinované

# Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Metody s informací **apriori** dělíme do několika skupin:

- metoda lexikografická
- metoda minimální komponenty
- řešení jednokriteriální úlohy s agregovanými kritérii
- záměna kritérií za omezení
- "minimalizace odchylek" od ideálních hodnot (při vhodně zvolené metrice)

# Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Metody s informací **apriori** dělíme do několika skupin:

- metoda lexikografická
- metoda minimální komponenty
- řešení jednokriteriální úlohy s agregovanými kritérii
- záměna kritérií za omezení
- "minimalizace odchylek" od ideálních hodnot (při vhodně zvolené metrice)

Metody s informací **aposteriori** spočívají v popisu množiny nedominovaných řešení, ve které následně uživatel vybírá kompromisní řešení. Patří sem:

- metoda parametrická (agregujeme kritéria s parametricky zadaným vektorem vah)
- metoda omezení (hledá nedominovaná řešení, kde hodnoty kritérií dosahují parametricky zadaných cílových hodnot)
- vícekriteriální simplexový algoritmus (postupně určuje nedominovaná bazická řešení)

# Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Metody s informací **apriori** dělíme do několika skupin:

- metoda lexikografická
- metoda minimální komponenty
- řešení jednokriteriální úlohy s agregovanými kritérii
- záměna kritérií za omezení
- "minimalizace odchylek" od ideálních hodnot (při vhodně zvolené metrice)

Metody s informací **aposteriori** spočívají v popisu množiny nedominovaných řešení, ve které následně uživatel vybírá kompromisní řešení. Patří sem:

- metoda parametrická (agregujeme kritéria s parametricky zadaným vektorem vah)
- metoda omezení (hledá nedominovaná řešení, kde hodnoty kritérií dosahují parametricky zadaných cílových hodnot)
- vícekriteriální simplexový algoritmus (postupně určuje nedominovaná bazická řešení)

Metody **interaktivní** probíhají iterativně a jsou založeny na komunikaci mezi uživatelem a rozhodovatelem.

# Vícekriteriální programování - příklad

Příklad z knihy Tomáš Šubrt, Ekonomicko-matematické metody: Vedení půjčovny lyžařského a snowboardového vybavení zvažuje optimalizaci sortimentu zboží. Do kalkulací zahrnuje obvyklou cenu za půjčení vybavení i riziko, že utrpí ztrátu, protože vybavení nebude půjčeno. Denní zisk [v Kč] při půjčení jednotlivých kompletů i riziko ztráty při nepůjčení [v bodech] jsou uvedeny v tabulce.

	lyžařský komplet sjezdový dospělý	lyžařský komplet sjezdový dětský	lyžařský komplet běžecký	snowboardový komplet
zisk	300	200	170	250
riziko	10	15	25	5

Společnost chce investovat nejvýše 1 mil. Kč do nákupu kompletů, přičemž snowboardové komplety chce nakoupit alespoň za 200 tis. Kč. Pořizovací cena každého z kompletů je 10 tis. Kč. Navrhněte, jak má společnost investovat, aby maximalizovala zisk a minimalizovala ztrátu.



# VLP - příklad, matematický model

Označme  $x_1, \dots, x_4$  proměnné vyjadřující počty nakoupených kompletů. Kriteriační funkce tedy jsou

$$z_1 = 300x_1 + 200x_2 + 170x_3 + 250x_4 \rightarrow \max$$

$$z_2 = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

Při pořizovací ceně kompletů 10 000 Kč budou mít omezení následující podobu: celkem lze koupit maximálně 100 ks kompletů, z toho nejméně 20 ks musí být snowboardové komplety:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100$$

$$x_4 \geq 20$$

Dále musíme přidat obligátní podmínky :

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Správně bychom měli přidat ještě podmínky celočíselnosti, ale nebudeme pro zjednodušení zatím uvažovat.

Řešením zjednodušených úloh modelu, kdy uvažujeme vždy pouze jednu kriteriační funkci dostaneme **dílčí optimální řešení**.

# VLP - dílčí optimální řešení, příklad

Snadno lze zjistit, že **minimálního rizika** půjčovna dosáhne, jestliže nakoupí pouze požadované snowboardové komplety, tj. 20 ks po 10 000 Kč a ostatní komplety nebude kupovat vůbec.

# VLP - dílčí optimální řešení, příklad

Snadno lze zjistit, že **minimálního rizika** půjčovna dosáhne, jestliže nakoupí pouze požadované snowboardové komplety, tj. 20 ks po 10 000 Kč a ostatní komplety nebude kupovat vůbec.

Podobně **maximálního zisku** půjčovna dosáhne, jestliže po zakoupení požadovaného množství snowboardových kompletů (tj. 20 ks) utratí všechny zbývající peníze za nejziskovější sjezdové komplety pro dospělé. Prostředky postačí pro zakoupení 80 ks těchto kompletů.

# VLP - dílčí optimální řešení, příklad

Snadno lze zjistit, že **minimálního rizika** půjčovna dosáhne, jestliže nakoupí pouze požadované snowboardové komplety, tj. 20 ks po 10 000 Kč a ostatní komplety nebude kupovat vůbec.

Podobně **maximálního zisku** půjčovna dosáhne, jestliže po zakoupení požadovaného množství snowboardových kompletů (tj. 20 ks) utratí všechny zbývající peníze za nejziskovější sjezdové komplety pro dospělé. Prostředky postačí pro zakoupení 80 ks těchto kompletů.

Dílčí optimální řešení můžeme znázornit v **kriteriální tabulce**:

	Kriteriální funkce	
	výnos	riziko
80 dospělých sjezdových + 20 snowboardových	29000	880
20 snowboardových	5000	100

Z hlavní diagonály tabulky vidíme, že ideální řešení je ohodnoceno kriteriálními hodnotami zisku a rizika 29000 a 100, ale reálně neexistuje.

# VLP - lexikografická metoda

Popišme si některé z metod s apriorní preferenční informací. Při použití **lexikografické** metody rozhodovatel určí pořadí významnosti kriteriálních funkcí (předpokládejme, že již jsou funkce označeny tak, že  $z_1$  je nejvýznamnější a  $z_k$  nejméně významné, jejich optimální hodnoty označme  $z_1^{opt}, \dots, z_k^{opt}$ ). Hledání kompromisního řešení spočívá v postupném řešení sekvence optimalizačních úloh

$\max. z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ . Pokud má úloha více optimálních řešení, řešíme další úlohu:

$\max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt}$ . Opět je-li řešení více, postupujeme dále, až nalezneme kompromisní řešení jako bod optima úlohy

$\max. z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt}, \dots, \mathbf{c}^{k-1} \mathbf{x} \geq z_{k-1}^{opt}$ .

# VLP - lexikografická metoda

Popišme si některé z metod s apriorní preferenční informací. Při použití **lexikografické** metody rozhodovatel určí pořadí významnosti kriteriálních funkcí (předpokládejme, že již jsou funkce označeny tak, že  $z_1$  je nejdůležitější a  $z_k$  nejméně významné, jejich optimální hodnoty označme  $z_1^{opt}, \dots, z_k^{opt}$ ). Hledání kompromisního řešení spočívá v postupném řešení sekvence optimalizačních úloh

**$max. z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ .** Pokud má úloha více optimálních řešení, řešíme další úlohu:

**$max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt}$ .** Opět je-li řešení více, postupujeme dále, až nalezneme kompromisní řešení jako bod optima úlohy

**$max. z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt}, \dots, \mathbf{c}^{k-1} \mathbf{x} \geq z_{k-1}^{opt}$ .**

Zmírnit předpoklad, že jednotlivé úlohy mají více než jedno řešení, je možné připuštěním odchylky  $\delta_i$ , o kterou se můžou v jednotlivých krocích lišit hodnoty preferovaných účelových funkcí od svých optim. Například v druhém kroku bychom řešili úlohu

**$max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt} - \delta_1$ ,** atd.

Popsaná metoda v podstatě kopíruje reálné uvažování manažerů.

# VLP - lexikografická metoda, příklad

Již víme, že při preferenci rizika je nejvýhodnější nakoupit pouze 20 snowboardových kompletů a při preferenci zisku 20 snowboardových a 80 dospělých sjezdových kompletů.

Jaké by měla úloha řešení, jestliže budeme preferovat riziko, ale připustíme jeho odchylku z ideální hodnoty 100 na 120? Maximalizujeme tedy zisk

$$z_1 = 300x_1 + 200x_2 + 170x_3 + 250x_4 \text{ za omezení}$$

$$z_2 = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 5x_4 \leq 120, \text{ (tj. že riziko nepřesáhne hodnotu 120) a dalších omezení modelu}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100 \quad x_4 \geq 20, \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

# VLP - lexikografická metoda, příklad

Již víme, že při preferenci rizika je nejvýhodnější nakoupit pouze 20 snowboardových kompletů a při preferenci zisku 20 snowboardových a 80 dospělých sjezdových kompletů.

Jaké by měla úloha řešení, jestliže budeme preferovat riziko, ale připustíme jeho odchylku z ideální hodnoty 100 na 120? Maximalizujeme tedy zisk

$$z_1 = 300x_1 + 200x_2 + 170x_3 + 250x_4 \text{ za omezení}$$

$$z_2 = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 5x_4 \leq 120, \text{ (tj. že riziko nepřesáhne hodnotu 120) a dalších omezení modelu}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100 \quad x_4 \geq 20, \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

Snadno vypočteme optimální řešení  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 20$ , tedy k požadovaným dvaceti snowboardovým přikoupíme ještě 2 dospělé sjezdové komplety. Získáme tak **5600 Kč** a riziko bude rovno limitním **120 bodům**.



# VLP - metoda minimální komponenty

Jiným přístupem je stanovení kompromisního řešení podle **minimální komponenty**, kdy maximalizujeme nejmenší, tedy nejhorší komponentu vektoru hodnot účelových funkcí. Dostaneme tedy úlohu LP maximalizovat

$z = \delta$  za podmínek  $\mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \dots, \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ .

# VLP - metoda minimální komponenty

Jiným přístupem je stanovení kompromisního řešení podle **minimální komponenty**, kdy maximalizujeme nejmenší, tedy nejhorší komponentu vektoru hodnot účelových funkcí. Dostaneme tedy úlohu LP maximalizovat

$z = \delta$  za podmínek  $\mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \dots, \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ .

Pokud mají kritéria rozdílnou povahu, je třeba je nejprve převést všechna na maximalizační a upravit na bezrozměrné, aby byla zajištěna jejich srovnatelnost.

# VLP - metoda agregace kriteriálních funkcí

Pomocí vhodně zvoleného operátoru je možné sloučit všechny kriteriální funkce do jediné. Obecně se při agregaci používají různé operátory, zde se jeví nejvhodnější lineární kombinace jednotlivých funkcí za použití normovaného vektoru vah  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ . Místo původní optimalizační úlohy

$\mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$  řešíme jednorozměrnou úlohu

$z_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{max}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$

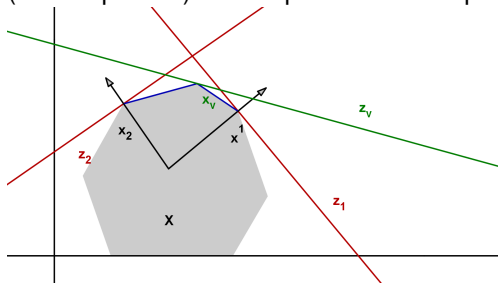
# VLP - metoda agregace kritériálních funkcí

Pomocí vhodně zvoleného operátoru je možné sloučit všechny kritériální funkce do jediné. Obecně se při agregaci používají různé operátory, zde se jeví nejvhodnější lineární kombinace jednotlivých funkcí za použití normovaného vektoru vah  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ . Místo původní optimalizační úlohy

$\mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ . řešíme jednorozměrnou úlohu

$z_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{max}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ .

Pozor! Při nastavení vektoru vah je třeba vzít v úvahu, že hodnoty funkcí se pohybují na různých škálách. Vyznačme agregované kritérium graficky (zelená přímka). Nemá praktickou interpretaci, je pouze kritériem pomocným.



# VLP - metoda agragace, příklad

Při agregaci funkce zisku  $z_1$  a funkce rizika  $z_2$  je třeba vzít v úvahu odlišnou povahu kritérií, například můžeme vynásobit  $z_2$  koeficientem (-1).

Jestliže nastavíme vektor vah

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{100}, \frac{95}{100} \right),$$

pak agregovaná účelová funkce bude mít tvar

$$z_v = 5,5x_1 - 4,25x_2 - 15,25x_3 + 7,75x_4.$$

# VLP - metoda agragace, příklad

Při agregaci funkce zisku  $z_1$  a funkce rizika  $z_2$  je třeba vzít v úvahu odlišnou povahu kritérií, například můžeme vynásobit  $z_2$  koeficientem (-1).

Jestliže nastavíme vektor vah

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{100}, \frac{95}{100} \right),$$

pak agregovaná účelová funkce bude mít tvar

$$z_v = 5,5x_1 - 4,25x_2 - 15,25x_3 + 7,75x_4.$$

Snadno nahlédneme, že optimální řešení tedy bude

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 100$ , všechny peníze utratíme za snowboardové komplety. Optimální hodnota účelové funkce  $z_v = 775$ , což nemá žádnou vypovídací schopnost, ale můžeme pro nalezené řešení dopočítat hodnotu zisku 25000 Kč a hodnotu rizika 500 bodů.

# VLP - převod kritériálních funkcí na omezení

Při **postupném** převodu kritérií na omezení postupujeme podobně jako u lexikografické metody. Předpokládáme opět, že jsou funkce označeny od nejvýznamnějšího po nejméně významné). Hledání kompromisního řešení spočívá v postupném řešení sekvence optimalizačních úloh

$\max. z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$  Optimální hodnotu označíme  $z_1^*$  a řešíme další úlohu, kde připustíme určitou odchylku od  $z_1^*$ :

$\max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^* - \delta_1.$  Opět zjistíme  $z_2^*$  a postupujeme dále, až nalezneme kompromisní řešení jako bod optima úlohy

$\max. z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^* - \delta_1, \dots, \mathbf{c}^{k-1} \mathbf{x} \geq z_{k-1}^* - \delta_k.$

# VLP - převod kritériálních funkcí na omezení

Při **postupném** převodu kritérií na omezení postupujeme podobně jako u lexikografické metody. Předpokládáme opět, že jsou funkce označeny od nejdůležitějšího po nejméně významné). Hledání kompromisního řešení spočívá v postupném řešení sekvence optimalizačních úloh

$\max. z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$  Optimální hodnotu označíme  $z_1^*$  a řešíme další úlohu, kde připustíme určitou odchylku od  $z_1^*$ :

$\max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^* - \delta_1.$  Opět zjistíme  $z_2^*$  a postupujeme dále, až nalezneme kompromisní řešení jako bod optima úlohy

$\max. z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^* - \delta_1, \dots, \mathbf{c}^{k-1} \mathbf{x} \geq z_{k-1}^* - \delta_k.$

Kritéria lze také převést na omezení **najednou** tak, že maximalizujeme pouze nejdůležitější kritérium  $z_1$  a přidáme do modelu současně všechna omezení  $z_i \geq au_i, i = 2, \dots, k$  (aspirační úrovně všech kritérií  $au_i, i = 2, \dots, k$  nastavíme někde mezi bazální a ideální hodnotu pro dané kritérium  $\langle z_i^{\min}, z_i^{\max} \rangle$ .) Nevýhodou tohoto přístupu je, že může být obtížné nastavení aspiračních úrovní, aby nebyla přípustná množina prázdná nebo aby nebyl vliv kritérií eliminován úplně.



# Cílové programování

Představuje jiný přístup k řešení úlohy LP. Místo stanovení omezujících podmínek a kritéria optimality se zde stanoví **pevné a volné cíle** s přiřazenými **cílovými hodnotami**. U pevných cílů musí být tato hodnota splněna (analogie omezujících podmínek). U volných cílů můžeme dosáhnout vyšší i nižší hodnoty než je cíl (avšak ne moc odlišné). Protože cílových hodnot bývá několik a zpravidla není možné dosažení všech, volí se obvykle jeden ze dvou přístupů:

- pomocí **preferencí** - nejprve je optimalizován cíl s nejvyšší preferencí, atd. nebo
- pomocí **vah** - koeficientů vyjadřujících důležitost daného cíle, optimalizuje se pak vážený součet odchylek od všech cílů

Modely cílového programování jsou obecnější než standardní modely LP, protože v praxi zpravidla nemáme jediné kritérium optimality, ale sledujeme více hodnot.

# Cílové programování - příklad

Příklad z J. Jablonský, Operační výzkum: Vedení penzijního fondu se rozhoduje o nákupu dvou druhů cenných papírů (akcie a obligace). Má k dispozici prostředky, které není nutné úplně vyčerpat, nelze je však překročit. Do akcií lze investovat maximálně 50 % celkového objemu prostředků a do obligací maximálně 75 % prostředků. Očekávaný výnos z **akcií je 15 %** a z **obligací 10 %** p.a., míra rizika investice je ohodnocena koeficientem **5 u akcií** a **2 u obligací**. Navrhněte takovou skladbu portfolia  $[x_1, x_2]$ , aby se dosáhlo průměrného **výnosu 12 %** p.a. a aby byla vážená míra **rizika rovna 3**.

# Cílové programování - příklad

Příklad z J. Jablonský, Operační výzkum: Vedení penzijního fondu se rozhoduje o nákupu dvou druhů cenných papírů (akcie a obligace). Má k dispozici prostředky, které není nutné úplně vyčerpat, nelze je však překročit. Do akcií lze investovat maximálně 50 % celkového objemu prostředků a do obligací maximálně 75 % prostředků. Očekávaný výnos z **akcií je 15 %** a z **obligací 10 %** p.a., míra rizika investice je ohodnocena koeficientem **5 u akcií** a **2 u obligací**. Navrhněte takovou skladbu portfolia  $[x_1, x_2]$ , aby se dosáhlo průměrného **výnosu 12 %** p.a. a aby byla vážená míra **rizika rovna 3**.

Při standardním přístupu LP bychom museli zvolit jako účelovou funkci jen jedno z nich, např. výnos a k omezujícím podmínkám pro objem investic přidat další omezení, totiž že míra rizika nesmí překročit hodnotu 3. Lze spočítat, že optimálního řešení při tomto přístupu dosáhneme, dáme-li  $\frac{1}{3}$  prostředků do akcií a  $\frac{2}{3}$  do obligací. Při průměrném **riziku 3** tak získáme **11,67 %** p.a.

# Cílové programování - příklad

Příklad z J. Jablonský, Operační výzkum: Vedení penzijního fondu se rozhoduje o nákupu dvou druhů cenných papírů (akcie a obligace). Má k dispozici prostředky, které není nutné úplně vyčerpat, nelze je však překročit. Do akcií lze investovat maximálně 50 % celkového objemu prostředků a do obligací maximálně 75 % prostředků. Očekávaný výnos z **akcií je 15 %** a z **obligací 10 %** p.a., míra rizika investice je ohodnocena koeficientem **5 u akcií** a **2 u obligací**. Navrhněte takovou skladbu portfolia  $[x_1, x_2]$ , aby se dosáhlo průměrného **výnosu 12 %** p.a. a aby byla vážená míra **rizika rovna 3**.

Při standardním přístupu LP bychom museli zvolit jako účelovou funkci jen jedno z nich, např. výnos a k omezujícím podmínkám pro objem investic přidat další omezení, totiž že míra rizika nesmí překročit hodnotu 3. Lze spočítat, že optimálního řešení při tomto přístupu dosáhneme, dáme-li  $\frac{1}{3}$  prostředků do akcií a  $\frac{2}{3}$  do obligací. Při průměrném **riziku 3** tak získáme **11,67 %** p.a. Nebo naopak budeme minimalizovat účelovou funkci vyjádřenou váženým rizikem a jako dodatečnou podmínku stanovíme omezení, aby průměrný výnos byl nejméně 12 % p.a. Pak je optimální investovat 40 % prostředků do akcií a 60 % do obligací. Při výsledném výnosu **12 %** p.a. pak bude míra **rizika 3,2**.

# Cílové programování - formulace modelu

U volných cílů se používají **odchylkové proměnné** pro vyjádření kladných a záporných odchylek (značíme je  $d_i^+$ , resp.  $d_i^-$ ) od cílových hodnot. Je-li cíle splněn, platí  $d_i^+ = d_i^- = 0$ , dojde-li k přesáhnutí cíle, pak je  $d_i^+ > 0$ ,  $d_i^- = 0$  a není-li cíl dosažen, je  $d_i^+ = 0$ ,  $d_i^- > 0$ . Pevné cíle musí být respektovány, žádné odchylky se nepřipouští.

# Cílové programování - formulace modelu

U volných cílů se používají **odchylkové proměnné** pro vyjádření kladných a záporných odchylek (značíme je  $d_i^+$ , resp.  $d_i^-$ ) od cílových hodnot. Je-li cíle splněn, platí  $d_i^+ = d_i^- = 0$ , dojde-li k přesáhnutí cíle, pak je  $d_i^+ > 0$ ,  $d_i^- = 0$  a není-li cíl dosažen, je  $d_i^+ = 0$ ,  $d_i^- > 0$ . Pevné cíle musí být respektovány, žádné odchylky se nepřipouští.

V modelu cílového programování je vždy účelová funkce vyjádřena jako **minimalizace odchylkových proměnných**, přičemž do ní lze zahrnout buď pouze kladné, pouze záporné nebo oba typy odchylek (pak se cílovým hodnotám blížíme shora, zdola nebo "oboustranně"). Zápis úlohy o optimalizaci portfolia by tedy byl:

$$d_2^+, d_1^- \rightarrow \min,$$

za podmíněk:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 0,5; x_2 \leq 0,75$$

$$15x_1 + 10x_2 + d_1^+ - d_1^- = 12$$

$$5x_1 + 2x_2 + d_2^+ - d_2^- = 3$$

$$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$$

# Cílové programování - odlišení cílů vahami

Při současné minimalizaci více odchylek můžeme odlišit jejich důležitost **vahami**. Abychom se vyhnuli problémům s různými jednotkami, je lepší pracovat s relativními odchylkami  $\frac{d_i^+}{g_i}$ ,  $\frac{d_i^-}{g_i}$ , kde  $g_i$  značí  $i$ -tou cílovou hodnotu. Pokud je pro nás výnos pětkrát důležitější než riziko, stanovíme váhy 5 a 1 a účelová funkce bude mít podobu  $z = 5 \frac{d_1^-}{12} + \frac{d_2^+}{3}$ . Dále lze úlohu řešit běžnou simplexovou metodou.

# Cílové programování - odlišení cílů vahami

Při současné minimalizaci více odchylek můžeme odlišit jejich důležitost **vahami**. Abychom se vyhnuli problémům s různými jednotkami, je lepší pracovat s relativními odchylkami  $\frac{d_i^+}{g_i}$ ,  $\frac{d_i^-}{g_i}$ , kde  $g_i$  značí  $i$ -tou cílovou hodnotu. Pokud je pro nás výnos pětkrát důležitější než riziko, stanovíme váhy 5 a 1 a účelová funkce bude mít podobu  $z = 5 \frac{d_1^-}{12} + \frac{d_2^+}{3}$ . Dále lze úlohu řešit běžnou simplexovou metodou.

Řešením je dát  $\frac{1}{3}$  prostředků do akcií a  $\frac{2}{3}$  do obligací, přitom je zcela splněna cílová hodnota rizika a výnos je 11,67%.

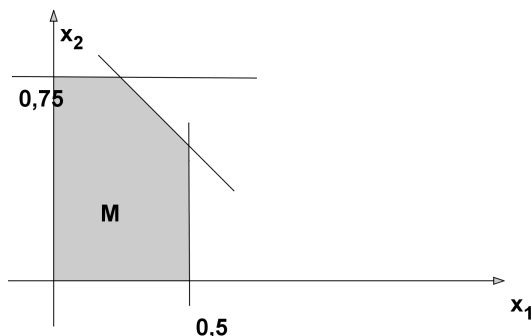


# Cílové programování - odlišení cílů preferencemi

Při odlišení cílů **preferencemi** minimalizujeme nejprve odchylku od důležitějšího cíle a pokud má množina optimálních řešení více prvků, minimalizujeme na této množině druhou nejzávažnější odchylku, atd. Má-li v naší úloze vyšší prioritu výnos, minimalizujeme nejprve  $d_1^-$ .

# Cílové programování - odlišení cílů preferencemi

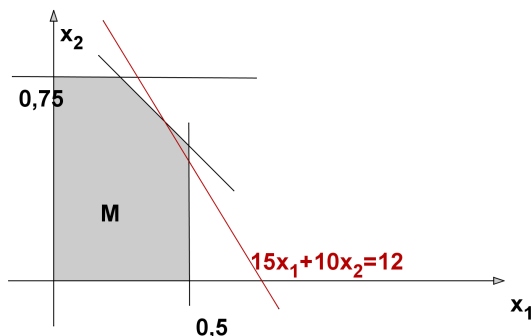
Při odlišení cílů **preferencemi** minimalizujeme nejprve odchylku od důležitějšího cíle a pokud má množina optimálních řešení více prvků, minimalizujeme na této množině druhou nejzávažnější odchylku, atd. Má-li v naší úloze vyšší prioritu výnos, minimalizujeme nejprve  $d_1^-$ . Znázorníme situaci graficky v rovině  $x_1, x_2$ .



Nejprve si zobrazíme přípustnou množinu  $M$ , na níž jsou splněny všechny pevné cíle.

# Cílové programování - odlišení cílů preferencemi

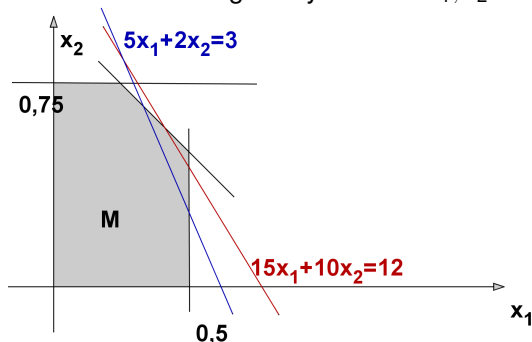
Při odlišení cílů **preferencemi** minimalizujeme nejprve odchylku od důležitějšího cíle a pokud má množina optimálních řešení více prvků, minimalizujeme na této množině druhou nejzávažnější odchylku, atd. Má-li v naší úloze vyšší prioritu výnos, minimalizujeme nejprve  $d_1^-$ . Znázorníme situaci graficky v rovině  $x_1, x_2$ .



Přímka o rovnici  $15x_1 + 10x_2 = 12$  vyjadřuje dosažení nejmenší možné hodnoty  $d_1^- = 0$ . Její průnik s  $M$  představuje všechna optimální řešení v prvním kroku.

# Cílové programování - odlišení cílů preferencemi

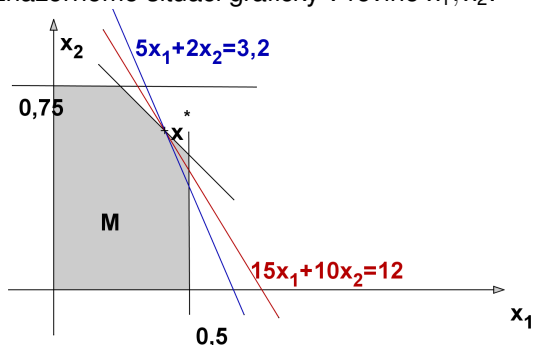
Při odlišení cílů **preferencemi** minimalizujeme nejprve odchylku od důležitějšího cíle a pokud má množina optimálních řešení více prvků, minimalizujeme na této množině druhou nejzávažnější odchylku, atd. Má-li v naší úloze vyšší prioritu výnos, minimalizujeme nejprve  $d_1^-$ . Znázorníme situaci graficky v rovině  $x_1, x_2$ .



V druhém kroku minimalizujeme odchylku  $d_2^+$ . Ideální by bylo, kdyby byla nulová, tj. kdyby platila rovnost  $5x_1 + 2x_2 = 3$ .

# Cílové programování - odlišení cílů preferencemi

Při odlišení cílů **preferencemi** minimalizujeme nejprve odchylku od důležitějšího cíle a pokud má množina optimálních řešení více prvků, minimalizujeme na této množině druhou nejzávažnější odchylku, atd. Má-li v naší úloze vyšší prioritu výnos, minimalizujeme nejprve  $d_1^-$ . Znázorníme situaci graficky v rovině  $x_1, x_2$ .



Protože se přímky protínají mimo přípustnou množinu, nelze dosáhnout rovnosti  $d_2^+ = 0$ . Musíme riziko zvýšit, tj. posunout modrou přímku tak, aby se dotkla optimální úsečky pro  $d_1^-$ . Našli jsme bod optima  $x^* = [0, 4; 0, 6]$ .

# Lineární lomené programování

Skupinou úloh, které lze převést na lineární problém, jsou úlohy **lineárního lomeného programování** optimalizovat funkci  $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{d}^\top \cdot \mathbf{x} + d_0}{\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + c_0}$  za omezení  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Tyto úlohy sice nespádají do kategorie konvexních úloh, avšak umožňují pro  $\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + c_0 > 0$  zavedení substituce  $r = \frac{1}{\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + c_0}$ .

Dostaneme účelovou funkci ve tvaru  $f = \mathbf{d}^\top \cdot \mathbf{x} \cdot r + d_0 r$ , kterou můžeme vyjádřit jako funkci nových proměnných  $r, y_i = x_i \cdot r, i = 1, \dots, n$ :

$$f(r, y_1, \dots, y_n) = \mathbf{d}^\top \cdot \mathbf{y} + d_0 r, \text{ podobně vyjádříme i omezení}$$

$$r \geq 0, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{b} \cdot r. \text{ Je však třeba přidat i další omezující podmínku}$$

$$1 = r(\mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + c_0), \text{ tedy } 1 = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{y} + c_0 r.$$

Dostali jsme obyčejnou úlohu LP, kterou můžeme dále řešit například simplexovou metodou.

# Lineární lomené programování - příklad

V ekonomii se setkáme s řadou ukazatelů poměrového typu. Jsou-li výrazy v čitateli a jmenovateli ukazatele lineárními funkcemi proměnných, podle kterých se snažíme ukazatel optimalizovat, jedná se o problém lineárního lomeného programování, viz úloha z knihy I. Gros: "Kvantitativní metody v manažerském rozhodování":

# Lineární lomené programování - příklad

V ekonomii se setkáme s řadou ukazatelů poměrového typu. Jsou-li výrazy v čitateli a jmenovateli ukazatele lineárními funkcemi proměnných, podle kterých se snažíme ukazatel optimalizovat, jedná se o problém lineárního lomeného programování, viz úloha z knihy I. Gros: "Kvantitativní metody v manažerském rozhodování":

**Příklad:** Uvažujme firmu, která má ve výrobním programu tři výrobky A, B, C s následujícími charakteristikami:

Výrobek	Variabilní náklady [Kč/t]	Cena [Kč/t]
A	11 000	12 000
B	15 000	18 000
C	14 000	16 000
fixní náklady 150 000 Kč		



# Lineární lomené programování - příklad

V ekonomii se setkáme s řadou ukazatelů poměrového typu. Jsou-li výrazy v čitateli a jmenovateli ukazatele lineárními funkcemi proměnných, podle kterých se snažíme ukazatel optimalizovat, jedná se o problém lineárního lomeného programování, viz úloha z knihy I. Gros: "Kvantitativní metody v manažerském rozhodování":

**Příklad:** Uvažujme firmu, která má ve výrobním programu tři výrobky A, B, C s následujícími charakteristikami:

Výrobek	Variabilní náklady [Kč/t]	Cena [Kč/t]
A	11 000	12 000
B	15 000	18 000
C	14 000	16 000
fixní náklady 150 000 Kč		

Označíme-li si  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  množství prodaných výrobků, můžeme definovat například následující poměrové ukazatele:

$$\text{nákladovost tržeb } z = \frac{11000x_1 + 15000x_2 + 14000x_3 + 150000}{12000x_1 + 18000x_2 + 16000x_3},$$

$$\text{rentabilitu tržeb } z = \frac{1000x_1 + 3000x_2 + 2000x_3 - 150000}{12000x_1 + 18000x_2 + 16000x_3}.$$

# Lineární lomené programování - příklad

**Příklad:** Minimalizujte nákladovost tržeb z uvedeného příkladu za podmínky, že celkové náklady nepřesáhnou 200 000 Kč.

# Lineární lomené programování - příklad

**Příklad:** Minimalizujte nákladovost tržeb z uvedeného příkladu za podmínky, že celkové náklady nepřesáhnou 200 000 Kč.

Matematický zápis úlohy: minimalizujte  $z = \frac{11x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 150}{12x_1 + 18x_2 + 16x_3}$   
za podmínek  $11x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 150 \leq 200$ ,  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .

# Lineární lomené programování - příklad

**Příklad:** Minimalizujte nákladovost tržeb z uvedeného příkladu za podmínky, že celkové náklady nepřesáhnou 200 000 Kč.

Matematický zápis úlohy: minimalizujte  $z = \frac{11x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 150}{12x_1 + 18x_2 + 16x_3}$   
za podmínek  $11x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 150 \leq 200$ ,  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .

Úlohu linearizujeme zavedením substituce  $r = \frac{1}{12x_1 + 18x_2 + 16x_3}$ , dostaneme tak problém minimalizovat funkci

$$f(y_1, y_2, y_3, r) = 11y_1 + 15y_2 + 14y_3 + 150r$$

za omezení  $11y_1 + 15y_2 + 14y_3 - 50r \leq 0$ ,  $y_1, y_2, y_3, r \geq 0$  a doplňující podmínky  $12y_1 + 18y_2 + 16y_3 = 1$

# Lineární lomené programování - příklad

**Příklad:** Minimalizujte nákladovost tržeb z uvedeného příkladu za podmínky, že celkové náklady nepřesáhnou 200 000 Kč.

Matematický zápis úlohy: minimalizujte  $z = \frac{11x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 150}{12x_1 + 18x_2 + 16x_3}$   
za podmínek  $11x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 150 \leq 200$ ,  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ .

Úlohu linearizujeme zavedením substituce  $r = \frac{1}{12x_1 + 18x_2 + 16x_3}$ , dostaneme tak problém minimalizovat funkci

$$f(y_1, y_2, y_3, r) = 11y_1 + 15y_2 + 14y_3 + 150r$$

za omezení  $11y_1 + 15y_2 + 14y_3 - 50r \leq 0$ ,  $y_1, y_2, y_3, r \geq 0$  a doplňující podmínky  $12y_1 + 18y_2 + 16y_3 = 1$

**Modely datových obalů (DEA)** slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

**Modely datových obalů (DEA)** slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Historie:

1957: Farrell: model měření efektivity jednotek s jedním vstupem a výstupem

1978: Charnes, Cooper, Rhodes: **CCR model**: vícenásobné vstupy a výstupy, konstantní výnosy z rozsahu

1984: Banker, Charnes, Cooper: **BCC model**: proměnný výnos z rozsahu

**Modely datových obalů (DEA)** slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Historie:

1957: Farrell: model měření efektivity jednotek s jedním vstupem a výstupem

1978: Charnes, Cooper, Rhodes: **CCR model**: vícenásobné vstupy a výstupy, konstantní výnosy z rozsahu

1984: Banker, Charnes, Cooper: **BCC model**: proměnný výnos z rozsahu

Uvažujme homogenní produkční jednotky, spotřebovávající stejný typ zdrojů (materiál, podlahová plocha, pracovníci, atd.), budeme je označovat **vstupy**, k produkci ekvivalentních efektů (tržby, zisk, počet obslužených klientů, atp.), dále jen **výstupy**. Pokud v činnosti jednotek dominuje pouze jeden vstup a jeden výstup, lze snadno vyjádřit efektivnost pomocí poměrového ukazatele

**efektivnost = výstup/vstup**



**Modely datových obalů (DEA)** slouží k hodnocení technické efektivity produkčních jednotek na základě velikosti vstupů a výstupů (bez nutnosti cenového vyjádření).

Historie:

1957: Farrell: model měření efektivity jednotek s jedním vstupem a výstupem

1978: Charnes, Cooper, Rhodes: **CCR model**: vícenásobné vstupy a výstupy, konstantní výnosy z rozsahu

1984: Banker, Charnes, Cooper: **BCC model**: proměnný výnos z rozsahu

Uvažujme homogenní produkční jednotky, spotřebovávající stejný typ zdrojů (materiál, podlahová plocha, pracovníci, atd.), budeme je označovat **vstupy**, k produkci ekvivalentních efektů (tržby, zisk, počet obslužených klientů, atp.), dále jen **výstupy**. Pokud v činnosti jednotek dominuje pouze jeden vstup a jeden výstup, lze snadno vyjádřit efektivnost pomocí poměrového ukazatele

$$\text{efektivnost} = \text{výstup} / \text{vstup}$$

Pro vícenásobné vstupy a výstupy je možné jejich agregováním ukazatel modifikovat:

$$\text{efektivnost} = \text{vážené výstupy} / \text{vážené vstupy}$$

# Model s jedním vstupem a výstupem

Uvažujme 8 poboček obchodní firmy, které charakterizujeme jedním vstupem (počet zaměstnanců) a jedním výstupem (počet uzavřených smluv s klienty). efektivnost lze vyjádřit pomocí ukazatele "počet smluv na zaměstnance", údaje jsou zaznamenány v tabulce:

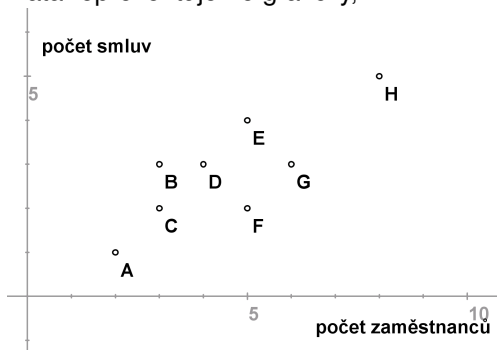
Pobočka	A	B	C	D	E	F	G	H
zaměstnanců	2	3	3	4	5	5	6	8
smluv	1	3	2	3	4	2	3	5
efektivnost	0,5	1	0,667	0,75	0,8	0,4	0,5	0,625

# Model s jedním vstupem a výstupem

Data reprezentujeme graficky, viz:

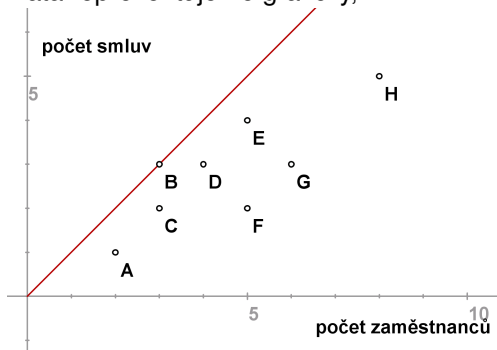
# Model s jedním vstupem a výstupem

Data reprezentujeme graficky, viz:



# Model s jedním vstupem a výstupem

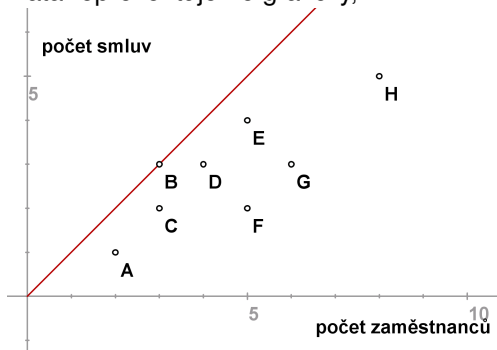
Data reprezentujeme graficky, viz:



Ukazatel efektivity dané pobočky udává sklon přímky spojující příslušný bod s počátkem, pro pobočku B nabývá nejvyšší hodnoty - tuto přímku budeme dále nazývat **efektivní hranicí**.

# Model s jedním vstupem a výstupem

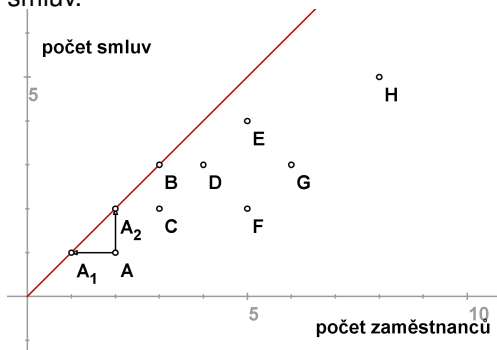
Data reprezentujeme graficky, viz:



Ukazatel efektivity dané pobočky udává sklon přímky spojující příslušný bod s počátkem, pro pobočku B nabývá nejvyšší hodnoty - tuto přímku budeme dále nazývat **efektivní hranicí**. Nejlepší pobočkou je tedy pobočka B, efektivnost ostatních můžeme pak vyjádřit také v relativní míře. Například **efektivnost A / efektivnost B = 0,5** což znamená, že A dosahuje pouze 50% efektivnosti B. Tato relativní míra nabývá i pro ostatní pobočky hodnot z intervalu  $[0, 1]$  a je nezávislá na jednotkách, ve kterých jsme vstup, resp. výstup měřili

# Model s jedním vstupem a výstupem

Jakým způsobem může jednotka A dosáhnout stoprocentní hodnoty, tj. efektivní hranice? Může snížit vstupy při zachování výstupů (**model orientovaný na vstupy**, v grafickém znázornění reprezentuje bod  $A_1$ ) nebo zvýšit výstup při zachování vstupů (**model orientovaný na výstupy**, v grafickém znázornění reprezentuje bod  $A_2$ ) nebo změnit obojí. Jednotky  $A_1$ ,  $A_2$  nazýváme **virtuální**, neodpovídají žádné reálné pobočce. Úsečka  $A_1A_2$  reprezentuje všechny dostupné body na efektivní hranici, pro jejichž dosažení A nemusí zvyšovat počet zaměstnanců nebo snižovat počet uzavřených smluv.



# Model s jedním vstupem a výstupem

Označíme-li souřadnice bodů  $A[x, y]$ ,  $A_1[x_1, y_1]$ ,  $A_2[x_2, y_2]$ , vzhledem k tomu, že  $A_1, A_2$  leží na efektivní hranici, lze ve vyjádření relativní efektivnosti  $A$  použít ve jmenovateli místo jednotky  $B$  libovolnou z těchto virtuálních jednotek.

Dostaneme pak

$$\frac{x}{y} / \frac{x_1}{y_1} = x/x_1 \quad \text{neboť } y = y_1$$

nebo

$$\frac{x}{y} / \frac{x_2}{y_2} = y_2/y \quad \text{neboť } x = x_2.$$



# Model s jedním vstupem a výstupem

Označíme-li souřadnice bodů  $A[x, y]$ ,  $A_1[x_1, y_1]$ ,  $A_2[x_2, y_2]$ , vzhledem k tomu, že  $A_1, A_2$  leží na efektivní hranici, lze ve vyjádření relativní efektivnosti  $A$  použít ve jmenovateli místo jednotky  $B$  libovolnou z těchto virtuálních jednotek.

Dostaneme pak

$$\frac{x}{y} / \frac{x_1}{y_1} = x/x_1 \text{ neboť } y = y_1$$

nebo

$$\frac{x}{y} / \frac{x_2}{y_2} = y_2/y \text{ neboť } x = x_2.$$

V modelu orientovaném na výstupy můžeme relativní efektivnost interpretovat jako **potřebné navýšení výstupu**,  $\frac{y_2}{y} = \frac{2}{1} = 2$ , tedy efektivní hranice by  $A$  dosáhla zdvojnásobením počtu uzavřených smluv.

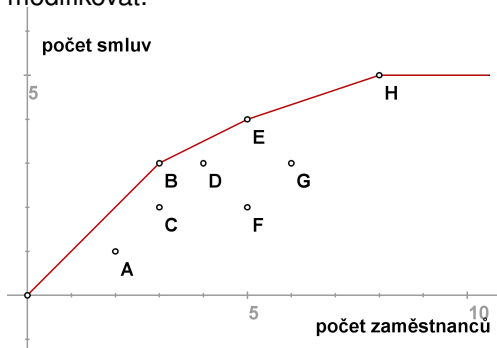
Pro model orientovaný na vstupy převrácená hodnota relativní efektivnosti reprezentuje **potřebnou redukci vstupů**,  $\frac{x_1}{x} = \frac{1}{2} = 0,5$ , tedy efektivní hranice by  $A$  dosáhla s polovinou zaměstnanců.

# Model s jedním vstupem a výstupem

V předchozích úvahách jsme pracovali s předpokladem **konstantních výnosů z rozsahu**, kdy efektivní hranice byla tvořena polopřímkou, tj. pro každou pobočku s kombinací vstupu a výstupu  $[x, y]$  se předpokládá za dosažitelnou i kombinace  $[\alpha x, \alpha y]$  pro lib.  $\alpha > 0$ . Ukazatel relativní efektivity pak vychází shodně, ať použijeme model orientovaný na vstupy či na výstupy.

# Model s jedním vstupem a výstupem

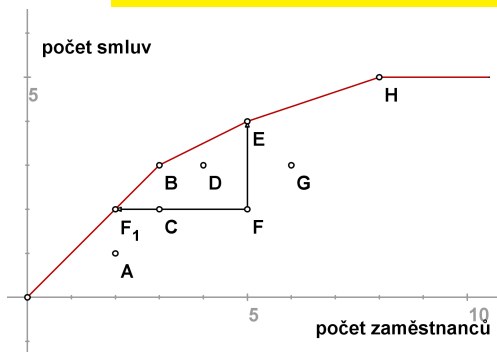
V předchozích úvahách jsme pracovali s předpokladem **konstantních výnosů z rozsahu**, kdy efektivní hranice byla tvořena polopřímkou, tj. pro každou pobočku s kombinací vstupu a výstupu  $[x, y]$  se předpokládá za dosažitelnou i kombinace  $[\alpha x, \alpha y]$  pro lib.  $\alpha > 0$ . Ukazatel relativní efektivity pak vychází shodně, ať použijeme model orientovaný na vstupy či na výstupy. Za předpokladu **variabilních výnosů z rozsahu** je třeba efektivní hranici modifikovat.



Nyní tvoří hranice obal dat, tak že efektivní se jeví též jednotky E a H.

# Model s jedním vstupem a výstupem

Ukazatel relativní efektivity se může měnit podle použitého modelu. Například pro jednotku F při orientaci na vstupy dostaneme hodnotu **efektivnost  $F_1$  / efektivnost  $F = 2/5 = 0,4$** , kdežto při orientaci na výstupy hodnotu **efektivnost  $F$ /efektivnost  $E = 1/2 = 0,5$** .



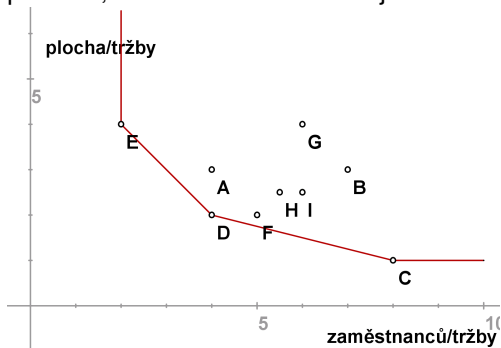
## Dva vstupy a jeden výstup

Uvažujme příklad 9 supermarketů , kde jako vstupy bereme počet zaměstnanců (v desítkách) a podlahovou plochu (v 1000  $m^2$ ), výstupem rozumíme roční tržby. Za předpokladu konstantních výnosů z rozsahu můžeme dále pracovat s hodnotami vstupů přepočtenými na jednotku výstupu. Normované hodnoty jsou uvedeny v tabulce.

Obchod	A	B	C	D	E	F	G	H	I
zaměstnanců	4	7	8	4	2	5	6	5,5	6
plocha	3	3	1	2	4	2	4	2,5	2,5
tržby	1	1	1	1	1	1	1	1	1

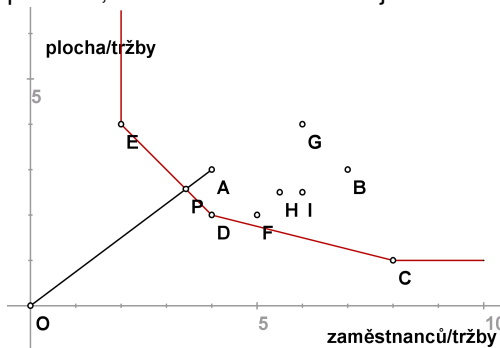
# Dva vstupy a jeden výstup

V grafickém znázornění se efektivnější jeví ty obchody, které se nalézají blíž k počátku, efektivní hranice obaluje data následujícím způsobem:



# Dva vstupy a jeden výstup

V grafickém znázornění se efektivnější jeví ty obchody, které se nalézají blíže k počátku, efektivní hranice obaluje data následujícím způsobem:

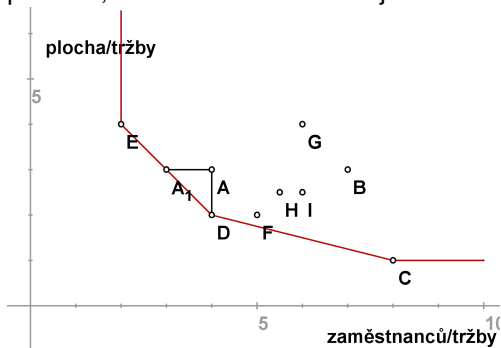


Obchod A je neefektivní, míru jeho efektivnosti můžeme měřit radiálně jako

$\frac{|OP|}{|OA|} = 0,8571$ . Protože virtuální jednotka P je kombinací jednotek D,E, nazýváme je **referenčními jednotkami pro A**.

# Dva vstupy a jeden výstup

V grafickém znázornění se efektivnější jeví ty obchody, které se nalézají blíže k počátku, efektivní hranice obaluje data následujícím způsobem:



Obchod A je neefektivní, míru jeho efektivnosti můžeme měřit radiálně jako

$$\frac{|OP|}{|OA|} = 0,8571$$

. Protože virtuální jednotka P je kombinací jednotek D,E, nazýváme je **referenčními jednotkami pro A**. Efektivní hranice lze dosáhnout též jinak než proporčním snížením obou vstupů o 15%, snížení pouze jednoho vstupu při zachování úrovně druhého demonstrují body  $A_1$ , D.



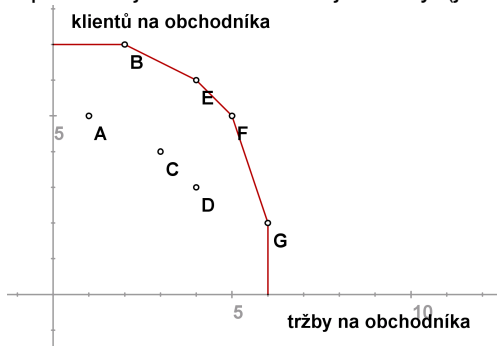
# Jeden vstup a dva výstupy

Nyní naopak uvažujme případ, kdy u 7 obchodních kanceláří sledujeme 1 vstup (počet obchodníků) a dva výstupy (počet obslužených zákazníků a tržby). Hodnoty výstupů u jednotlivých poboček přepočtené na 1 obchodníka jsou uvedeny v tabulce.

Kancelář	A	B	C	D	E	F	G
obchodníků	1	1	1	1	1	1	1
zákazníků	1	2	3	4	4	5	6
tržby	5	7	4	3	6	5	2

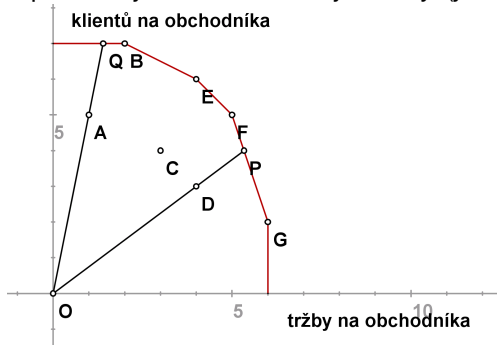
# Jeden vstup a dva výstupy

Můžeme znázornit jednotkové výstupy jednotlivých kanceláří, efektivní hranice bude obalovat data z opačné strany, protože body ležící blíž k počátku reprezentují méně efektivní jednotky. (jde o jednotky A,C,D)



# Jeden vstup a dva výstupy

Můžeme znázornit jednotkové výstupy jednotlivých kanceláří, efektivní hranice bude obalovat data z opačné strany, protože body ležící blíž k počátku reprezentují méně efektivní jednotky. (jde o jednotky A,C,D)



Míru neefektivnosti lze opět měřit radiálně, například pro jednotku D jako

$$\frac{|OD|}{|OP|} = 0,75$$

. Pro bod A by analogická míra vyjadřovala pouze hodnota 1 neznamená efektivnost, z bodu Q lze ještě zvýšit tržby bez ztráty klientů až na úroveň bodu B.

# CCR model

Pro  $n$  jednotek  $U_1, \dots, U_n$  u nichž sledujeme  $m$  vstupů a  $r$  výstupů zavedeme označení  $x_{iq}$  pro  $i$ -tý vstup  $q$ -té jednotky a  $y_{jq}$  pro  $j$ -tý výstup  $q$ -té jednotky. Pro  $U_q$  značíme  $\mathbf{x}_q = (x_{1q}, \dots, x_{mq})'$ ,  $\mathbf{y}_q = (y_{1q}, \dots, y_{rq})'$ . Hodnoty lze uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = [x_{iq}]_{q=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}, \quad \mathbf{Y} = [y_{jq}]_{q=1, \dots, n}^{j=1, \dots, r}.$$

# CCR model

Pro  $n$  jednotek  $U_1, \dots, U_n$  u nichž sledujeme  $m$  vstupů a  $r$  výstupů zavedeme označení  $x_{iq}$  pro  $i$ -tý vstup  $q$ -té jednotky a  $y_{jq}$  pro  $j$ -tý výstup  $q$ -té jednotky. Pro  $U_q$  značíme  $\mathbf{x}_q = (x_{1q}, \dots, x_{mq})'$ ,  $\mathbf{y}_q = (y_{1q}, \dots, y_{rq})'$ . Hodnoty lze uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = [x_{iq}]_{q=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}, \quad \mathbf{Y} = [y_{jq}]_{q=1, \dots, n}^{j=1, \dots, r}.$$

Pomocí vektorů nezáporných vah  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$  můžeme pro libovolnou jednotku  $U_q$  definovat

**virtuální vstup** =  $v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq} = \mathbf{v} \mathbf{x}_q$  a

**virtuální výstup** =  $u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq} = \mathbf{u} \mathbf{y}_q$ .

Míru efektivnosti dané jednotky pak vyjádříme jako podíl jejího virtuálního výstupu a vstupu.

# CCR model

Pro  $n$  jednotek  $U_1, \dots, U_n$  u nichž sledujeme  $m$  vstupů a  $r$  výstupů zavedeme označení  $x_{iq}$  pro  $i$ -tý vstup  $q$ -té jednotky a  $y_{jq}$  pro  $j$ -tý výstup  $q$ -té jednotky. Pro  $U_q$  značíme  $\mathbf{x}_q = (x_{1q}, \dots, x_{mq})'$ ,  $\mathbf{y}_q = (y_{1q}, \dots, y_{rq})'$ . Hodnoty lze uspořádat do matic

$$\mathbf{X} = [x_{iq}]_{q=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}, \quad \mathbf{Y} = [y_{jq}]_{q=1, \dots, n}^{j=1, \dots, r}$$

Pomocí vektorů nezáporných vah  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$  můžeme pro libovolnou jednotku  $U_q$  definovat

**virtuální vstup** =  $v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq} = \mathbf{v} \mathbf{x}_q$  a

**virtuální výstup** =  $u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq} = \mathbf{u} \mathbf{y}_q$ .

Míru efektivity dané jednotky pak vyjádříme jako podíl jejího virtuálního výstupu a vstupu.

**CCR model** optimalizuje váhy vstupů a výstupů tak, aby míra efektivity dané jednotky  $U_q$ , 
$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq}} = \frac{\mathbf{u} \mathbf{y}_q}{\mathbf{v} \mathbf{x}_q}$$
 byla maximální za podmínky, že efektivity ostatních jednotek jsou nejvýše jednotkové. Existuje-li kladné řešení s optimální hodnotou účelové funkce  $z^* = 1$ , pak se jednotka  $U_q$  označuje jako **CCR efektivní**.

# CCR model orientovaný na vstupy

Celý model pro jednotku  $U_q$  lze formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování

$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq}} \rightarrow \max_{u,v}$$

za omezení

$$\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_r y_{rk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r.$$

# CCR model orientovaný na vstupy

Celý model pro jednotku  $U_q$  lze formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování

$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq}} \rightarrow \max_{u,v}$$

za omezení

$$\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_r y_{rk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$u_i \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r.$$

Úlohu lze snadno linearizovat pomocí Charnes-Cooperovy transformace:

$$z = u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq} \rightarrow \max_{u,v}$$

za omezení

$$v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq} = 1$$
$$u_1 y_{1k} + \dots + u_r y_{rk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$u_i \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r.$$



# CCR model orientovaný na vstupy

Celý model pro jednotku  $U_q$  lze formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování

$$z = \frac{u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq}}{v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq}} \rightarrow \max_{u,v}$$

za omezení

$$\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_r y_{rk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$u_i \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r.$$

Úlohu lze snadno linearizovat pomocí Charnes-Cooperovy transformace:

$$z = u_1 y_{1q} + \dots + u_r y_{rq} \rightarrow \max_{u,v}$$

za omezení

$$v_1 x_{1q} + \dots + v_m x_{mq} = 1$$
$$u_1 y_{1k} + \dots + u_r y_{rk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$u_i \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tento model nazýváme **CCR modelem orientovaným na vstupy**. Množina takových indexů  $k \in \{1, \dots, n\}$  efektivních jednotek, pro které jsou omezující podmínky v úloze pro  $U_q$  aktivní, definuje tzv. **referenční množinu** pro  $U_q$ .

# CCR model - příklad

Uvažujme úlohu s dvěma vstupy a jedním výstupem, hodnoty pro 6 jednotek jsou uvedeny v tabulce:

Jednotka	A	B	C	D	E	F
$x_1$	4	7	8	4	2	10
$x_2$	3	3	1	2	4	1
$y$	1	1	1	1	1	1

# CCR model - příklad

Uvažujme úlohu s dvěma vstupy a jedním výstupem, hodnoty pro 6 jednotek jsou uvedeny v tabulce:

Jednotka	A	B	C	D	E	F
$x_1$	4	7	8	4	2	10
$x_2$	3	3	1	2	4	1
$y$	1	1	1	1	1	1

Linearizovaná úloha pro jednotku A bude mít podobu:

$$z = u \rightarrow \max$$

za omezení

$$4v_1 + 3v_2 = 1, \quad u, v_1, v_2 \geq 0$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 \text{ (A)} \quad u \leq 7v_1 + 3v_2 \text{ (B)}$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 \text{ (C)} \quad u \leq 4v_1 + 2v_2 \text{ (D)}$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \text{ (E)} \quad u \leq 10v_1 + v_2 \text{ (F)}$$

# CCR model - příklad

Uvažujme úlohu s dvěma vstupy a jedním výstupem, hodnoty pro 6 jednotek jsou uvedeny v tabulce:

Jednotka	A	B	C	D	E	F
$x_1$	4	7	8	4	2	10
$x_2$	3	3	1	2	4	1
$y$	1	1	1	1	1	1

Linearizovaná úloha pro jednotku A bude mít podobu:

$$z = u \rightarrow \max$$

za omezení

$$4v_1 + 3v_2 = 1, \quad u, v_1, v_2 \geq 0$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 \text{ (A)} \quad u \leq 7v_1 + 3v_2 \text{ (B)}$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 \text{ (C)} \quad u \leq 4v_1 + 2v_2 \text{ (D)}$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \text{ (E)} \quad u \leq 10v_1 + v_2 \text{ (F)}$$

Úlohu lze vyřešit standardními postupy lineárního programování, pro A dostaneme řešení  $z^* = u^* = 6/7, v_1^* = v_2^* = 1/7$ . Jednotka A není efektivní, protože  $z^* = 6/7 \leq 1$ , omezující nerovnice pro jednotky D, E jsou aktivní, tedy **D,E jsou kandidáty na referenční jednotky pro A.**

# CCR model - příklad

Úlohy pro ostatní jednotky budou podobné, lišit se budou pouze v omezující rovnosti, pro jednotku B to bude podmínka  $7v_1 + 3v_2 = 1$ , atd. V tabulce jsou shrnuty výsledky úloh pro všechny jednotky:

jednotka	$x_1$	$x_2$	$y$	$v_1^*$	$v_2^*$	$z^* = u^*$	referenční množina
A	4	3	1	1/7	1/7	6/7	D,E
B	7	3	1	1/19	4/19	12/19	C,D
C	8	1	1	1/12	1/3	1	C
D	4	2	1	1/6	1/6	1	D
E	2	4	1	3/14	1/7	1	E
F	10	1	1	0	1	1	C

# CCR model - příklad

Úlohy pro ostatní jednotky budou podobné, lišit se budou pouze v omezující rovnosti, pro jednotku B to bude podmínka  $7v_1 + 3v_2 = 1$ , atd. V tabulce jsou shrnuty výsledky úloh pro všechny jednotky:

jednotka	$x_1$	$x_2$	$y$	$v_1^*$	$v_2^*$	$z^* = u^*$	referenční množina
A	4	3	1	1/7	1/7	6/7	D,E
B	7	3	1	1/19	4/19	12/19	C,D
C	8	1	1	1/12	1/3	1	C
D	4	2	1	1/6	1/6	1	D
E	2	4	1	3/14	1/7	1	E
F	10	1	1	0	1	1	C

Vidíme, že jednotky C,D,E jsou efektivní. Optimální hodnota účelové funkce pro F je sice také rovna 1, ale referenční jednotkou pro F je C, protože má při stejném vstupu  $v_2$  nižší vstup  $v_1$ . V definici CCR efektivnosti je tedy třeba zdůraznit: **jednotka je CCR efektivní, je-li její  $z^* = 1$  a existuje aspoň jedno řešení, pro něž  $u^* > 0$ ,  $v^* > 0$** . Požadavek existence kladných vah lze zapracovat přímo do modelu, kdy v podmínkách nezápornosti proměnných změním pravou stranu na nějaké  $\varepsilon > 0$ .

# CCR model - duální úloha

Zapišme CCR model pro jednotku  $U_q$  maticově:

$$z = \mathbf{u}\mathbf{y}_q \rightarrow \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$$

za omezení

$$\mathbf{v}\mathbf{x}_q = 1$$

$$\mathbf{u}\mathbf{Y} \leq \mathbf{v}\mathbf{X},$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq 0.$$

# CCR model - duální úloha

Zapišme CCR model pro jednotku  $U_q$  maticově:

$$z = \mathbf{u}\mathbf{y}_q \rightarrow \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$$

za omezení

$$\mathbf{v}\mathbf{x}_q = 1$$

$$\mathbf{u}\mathbf{Y} \leq \mathbf{v}\mathbf{X},$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq 0.$$

K úloze formulujme její duální problém, duální proměnné označíme  $\theta$  a  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)'$ :

$$z = \theta \rightarrow \min_{\theta, \lambda}$$

za omezení

$$\theta\mathbf{x}_q \geq \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda \geq 0$$

Použití duálního modelu je výhodné z výpočetního i interpretačního hlediska.



# Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy  $\mathbf{X}\lambda$ ,  $\mathbf{Y}\lambda$ , která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky  $U_q$  na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x}_q \geq \mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q$$

# Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy  $\mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda$ , která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky  $U_q$  na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x}_q \geq \mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q$$

Hodnocená jednotka  $U_q$  leží přímo na efektivní hranici, je-li totožná s nalezenou virtuální jednotkou. Nutně tedy musí být optimální hodnota účelové funkce modelu  $\theta^*$  (tzv. **Farrellova efektivnost**) vyjadřující potřebnou radiální redukci vstupů k dosažení efektivní hranice jednotková,  $\theta^* = 1$ . Při splnění této podmínky je jednotka  $U_q$  též nazvána **technicky efektivní**.

# Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy  $\mathbf{X}\lambda$ ,  $\mathbf{Y}\lambda$ , která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky  $U_q$  na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x}_q \geq \mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q$$

Hodnocená jednotka  $U_q$  leží přímo na efektivní hranici, je-li totožná s nalezenou virtuální jednotkou. Nutně tedy musí být optimální hodnota účelové funkce modelu  $\theta^*$  (tzv. **Farrellova efektivnost**) vyjadřující potřebnou radiální redukci vstupů k dosažení efektivní hranice jednotková,  $\theta^* = 1$ . Při splnění této podmínky je jednotka  $U_q$  též nazvána **technicky efektivní**.

K dosažení CCR-efektivnosti však současně musí být nulové všechny přidavné proměnné převádějící omezující nerovnosti na rovnosti:

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda = \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_q = \mathbf{0}.$$

# Duální CCR model - interpretace

Model vlastně hledá virtuální jednotku se vstupy a výstupy  $\mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda$ , která je lepší nebo alespoň srovnatelná s radiální projekcí hodnocené jednotky  $U_q$  na efektivní hranici:

$$\theta \mathbf{x}_q \geq \mathbf{X}\lambda, \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q$$

Hodnocená jednotka  $U_q$  leží přímo na efektivní hranici, je-li totožná s nalezenou virtuální jednotkou. Nutně tedy musí být optimální hodnota účelové funkce modelu  $\theta^*$  (tzv. **Farrellova efektivnost**) vyjadřující potřebnou radiální redukci vstupů k dosažení efektivní hranice jednotková,  $\theta^* = 1$ . Při splnění této podmínky je jednotka  $U_q$  též nazvána **technicky efektivní**.

K dosažení CCR-efektivnosti však současně musí být nulové všechny přidavné proměnné převádějící omezující nerovnosti na rovnosti:

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda = \mathbf{0}, \mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_q = \mathbf{0}.$$

Při splnění všech těchto podmínek vyhovuje hodnocená jednotka tzv. **Pareto-Koopmansově definici** efektivnosti, tj. není možné zlepšit žádný z jejích vstupů a výstupů, aniž by současně nedošlo ke zhoršení jiného.

# Duální CCR model - alternativní formulace

Uvažujme primární CCR model s požadavkem nenulovosti vah  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \varepsilon > 0$  a označme  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^\top$ . Duální úlohu lze též formulovat ve tvaru

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \min_{\theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

# Duální CCR model - alternativní formulace

Uvažujme primární CCR model s požadavkem nenulovosti vah  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \varepsilon > 0$  a označme  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^\top$ . Duální úlohu lze též formulovat ve tvaru

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \min_{\theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

Optimální hodnoty modelu dávají jednotce  $U_q$  návod pro zlepšení vstupů a výstupů na  $\mathbf{x}'_q, \mathbf{y}'_q$  pomocí tzv. **CCR - projekce**:

$$\mathbf{x}'_q = \theta^* \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{-*}, \mathbf{y}'_q = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{+*},$$

nebo též

$$\mathbf{x}'_q = \mathbf{X}\lambda^*, \mathbf{y}'_q = \mathbf{Y}\lambda^*.$$

Přitom ty indexy  $j \in \{1, \dots, n\}$ , pro něž jsou hodnoty  $\lambda_j^*$  kladné, určují **referenční jednotky** pro  $U_q$ .

# CCR model orientovaný na výstupy

Pro jednotku  $U_q$  můžeme také formulovat CCR model orientovaný na výstupy, zapišme jej rovnou v upravené duální podobě:

$$z = \Theta + \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \max_{\Theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \Theta \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

# CCR model orientovaný na výstupy

Pro jednotku  $U_q$  můžeme také formulovat CCR model orientovaný na výstupy, zapišme jej rovnou v upravené duální podobě:

$$z = \Theta + \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \max_{\Theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \Theta \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

Pokud je  $\Theta^* > 1$ , jednotka  $U_q$  není efektivní a hodnota  $\Theta^*$  vyjadřuje potřebnou míru proporcionalního navýšení vstupů. Opět lze analogicky definovat CCR projekci na efektivní hranici jako

$$\mathbf{x}'_q = \mathbf{X}\lambda^*, \mathbf{y}'_q = \mathbf{Y}\lambda^*.$$



# CCR model orientovaný na výstupy

Pro jednotku  $U_q$  můžeme také formulovat CCR model orientovaný na výstupy, zapišme jej rovnou v upravené duální podobě:

$$z = \Theta + \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \max_{\Theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \Theta \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

Pokud je  $\Theta^* > 1$ , jednotka  $U_q$  není efektivní a hodnota  $\Theta^*$  vyjadřuje potřebnou míru proporcionalního navýšení vstupů. Opět lze analogicky definovat CCR projekci na efektivní hranici jako

$$\mathbf{x}'_q = \mathbf{X}\lambda^*, \mathbf{y}'_q = \mathbf{Y}\lambda^*.$$

V CCR modelech platí, že míry efektivnosti jednotky  $U_q$  při orientaci na vstupy či výstupy (tj. optimální hodnoty účelových funkcí modelů) jsou vzájemně převrácenými hodnotami  $\theta^* \cdot \Theta^* = 1$

# BCC model orientovaný na vstupy

Jako modifikaci modelu CCR, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat, navrhli Banker, Charnes a Cooper model využívající variabilní výnosy z rozsahu, tzv. **BCC model**. Při tomto přístupu jsou data obalována konvexním obalem, jako virtuální jednotky se neuvažují libovolné nezáporné kombinace  $\mathbf{X}\lambda$ ,  $\mathbf{Y}\lambda$ , ale pouze kombinace splňující podmínku  $\mathbf{e}\lambda = 1$ . Díky této dodatečné podmínce vychází zpravidla jako efektivní větší počet hodnocených jednotek.

# BCC model orientovaný na vstupy

Jako modifikaci modelu CCR, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat, navrhli Banker, Charnes a Cooper model využívající variabilní výnosy z rozsahu, tzv. **BCC model**. Při tomto přístupu jsou data obalována konvexním obalem, jako virtuální jednotky se neuvažují libovolné nezáporné kombinace  $\mathbf{X}\lambda$ ,  $\mathbf{Y}\lambda$ , ale pouze kombinace splňující podmínku  $\mathbf{e}\lambda = 1$ . Díky této dodatečné podmínce vychází zpravidla jako efektivní větší počet hodnocených jednotek.

Uveďme formulaci duálního BCC modelu orientovaného na vstupy:

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \min_{\theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_q,$$

$$\mathbf{e}\lambda = 1$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

# BCC model orientovaný na vstupy

Jako modifikaci modelu CCR, který předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat, navrhli Banker, Charnes a Cooper model využívající variabilní výnosy z rozsahu, tzv. **BCC model**. Při tomto přístupu jsou data obalována konvexním obalem, jako virtuální jednotky se neuvažují libovolné nezáporné kombinace  $\mathbf{X}\lambda$ ,  $\mathbf{Y}\lambda$ , ale pouze kombinace splňující podmínku  $\mathbf{e}\lambda = 1$ . Díky této dodatečné podmínce vychází zpravidla jako efektivní větší počet hodnocených jednotek.

Uveďme formulaci duálního BCC modelu orientovaného na vstupy:

$$z = \theta - \varepsilon \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}^-) \rightarrow \min_{\theta, \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^-}$$

za omezení

$$\mathbf{s}^- = \theta \mathbf{x}_q - \mathbf{X}\lambda,$$

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_q,$$

$$\mathbf{e}\lambda = 1$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

Jako **BCC efektivní** jsou identifikovány ty jednotky, pro něž je

$$\theta^* = 1, \mathbf{s}^{+*} = \mathbf{0}, \mathbf{s}^{-*} = \mathbf{0}.$$

# Další DEA modely

Kromě základních DEA modelů byla navržena řada jejich modifikací, mimo jiné:

- aditivní, též **SBM (Slack-Based Measure) model**: nenutí uživatele rozlišovat mezi orientací na vstupy nebo výstupy, měří efektivnost přímo pomocí přídatných proměnných  $s^-$ ,  $s^+$
- DEA modely s nekontrolovatelnými výstupy a vstupy
- DEA modely s nežádoucími výstupy a vstupy
- Modely **superefektivnosti**
- diskrétní modely, např. **FDH (Free Disposable Hull) model**
- pro hodnocení změn efektivnosti v čase navržený **Malmquistův index**

Metody jsou podrobněji popsány v použité literatuře:

- J. Jablonský, M. Dlouhý: Modely hodnocení produkčních jednotek, Professional Publishing, Praha 2004
- W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone: Data Envelopment Analysis, Springer, New York 2007

# Použití DEA k hodnocení efektivnosti dopravních podniků

Údaje z výroční zprávy Sdružení dopravních podniků za rok 2012 (<http://www.sdp-cr.cz/o-nas/vyrocní-zpravy/>) byly použity k hodnocení efektivnosti podniků z 19 měst. V první tabulce jsou uvedeny údaje v následujícím pořadí:

- počet přepravených osob (tis. osob)
- tržby (tis. Kč)
- vozové kilometry (tis.)
- počet zaměstnanců
- z toho řidičů

Druhá tabulka popisuje vozový park.

město	převprav.	tržby	vozokm	zaměst.	řidičů
1. Brno	352 052	994 040	38 118	2 727	1 375
2. České Budějovice	38 091	129 059	5 673	384	187
3. Děčín	8 938	42 731	3 678	207	132
4. Hradec Králové	35 162	120 854	6 242	401	226
5. Chomutov-Jirkov	5 223	50 367	1 838	253	163
6. Jihlava	13 530	50 232	2 821	170	94
7. Karlovy Vary	13 436	65 174	2 624	260	148
8. Liberec	32 656	192 236	8 648	377	169
9. Mariánské Lázně	3 844	11 439	495	30	19
10. Most-Litvínov	27 418	110 059	4 908	471	216
11. Olomouc	52 737	143 318	5 902	432	255
12. Opava	10 750	50 476	3 046	180	115
13. Ostrava	96 389	519 873	33 773	2 008	1 026
14. Pardubice	27 178	119 280	5 721	406	189
15. Plzeň	99 154	300 097	15 102	1 030	570
16. Praha	1 383 124	4 508 422	167 760	10 595	4 207
17. Teplice	15 039	94 159	5 726	265	176
18. Ústí nad Labem	47 091	203 278	7 347	501	253
19. Zlín-Otrokovice	32 335	119 506	4 812	340	184

město	autobusy	tramvaje	trolejbusy	metro	celkem
1. Brno	298	309	151	0	758
2. České Budějovice	83	0	58	0	141
3. Děčín	55	0	0	0	55
4. Hradec Králové	95	0	36	0	131
5. Chomutov-Jirkov	29	0	19	0	48
6. Jihlava	32	0	32	0	64
7. Karlovy Vary	67	0	0	0	67
8. Liberec	139	68	0	0	207
9. Mariánské Lázně	4	0	9	0	30
10. Most-Litvínov	80	57	0	0	137
11. Olomouc	77	60	0	0	137
12. Opava	34	0	34	0	68
13. Ostrava	297	273	62	0	632
14. Pardubice	73	0	55	0	128
15. Plzeň	113	122	88	0	323
16. Praha	1214	920	0	738	2872
17. Teplice	65	0	38	0	103
18. Ústí n. Labem	73	0	68	0	141
19. Zlín-Otrokovice	37	0	57	0	94



# Použití DEA k hodnocení efektivnosti dopravních podniků

Jako vstupy pro analýzu byly použity celkové počty zaměstnanců a celkový vozový park, jako výstupy počty přepravených osob, tržby a ujeté vozové kilometry. Byl zvolen model CCR orientovaný na vstupy, výpočty byly realizovány prostřednictvím doplňku Solver pro MS Excel a aplikace pro DEA (<http://nb.vse.cz/jablon/>)

# Použití DEA k hodnocení efektivnosti dopravních podniků

Jako vstupy pro analýzu byly použity celkové počty zaměstnanců a celkový vozový park, jako výstupy počty přepravených osob, tržby a ujeté vozové kilometry. Byl zvolen model CCR orientovaný na vstupy, výpočty byly realizovány prostřednictvím doplňku Solver pro MS Excel a aplikace pro DEA (<http://nb.vse.cz/jablon/>)

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce, červeně jsou vyznačeny podniky, které vyšly jako efektivní.

město	efektivnost	čísla	refer.	jednot.
1. Brno	0,9889	16		
2. České Budějovice	0,833	8	9	16
3. Děčín	1	3		
4. Hradec Králové	0,8546	8	16	17
5. Chomutov-Jirkov	0,6684	16		
6. Jihlava	0,8493	8	16	17
7. Karlovy Vary	0,6592	3	16	
8. Liberec	1	8		
9. Mariánské Lázně	1	9		
10. Most-Litvínov	0,6092	3	16	17
11. Olomouc	0,9351	16		
12. Opava	0,8209	8	16	17
13. Ostrava	0,8838	3	16	17
14. Pardubice	0,7743	3	16	17
15. Plzeň	0,8426	8	16	17
16. Praha	1	16		
17. Teplice	1	17		
18. Ústí n. Labem	0,9465	8	16	
19. Zlín-Otrokovice	0,8695	3	16	17

# Modely řízení zásob

Tato kapitola je zpracována podle učebnic

Fajmon B., Koláček J.: Pravděpodobnost, statistika a operační výzkum a

Gros I., Dytnar J.: Matematické modely pro manažerské rozhodování.

Nejčastějším typem modelů řízení zásob jsou nákladově orientované modely, jejichž cílem je minimalizace nákladů spojených s pořízením zásob a s jejich skladováním, popř. minimalizace ztrát vzniklých z nedostatku zásob.

# Modely řízení zásob

Tato kapitola je zpracována podle učebnic

Fajmon B., Koláček J.: Pravděpodobnost, statistika a operační výzkum a

Gros I., Dytnar J.: Matematické modely pro manažerské rozhodování.

Nejčastějším typem modelů řízení zásob jsou nákladově orientované modely, jejichž cílem je minimalizace nákladů spojených s pořízením zásob a s jejich skladováním, popř. minimalizace ztrát vzniklých z nedostatku zásob.

Důležitým pojmem v teorii zásob je **poptávka**, která může být buď jednoznačně určena, nebo může představovat náhodnou veličinu se známým rozdělením pravděpodobnosti. Náhodný charakter může mít i čas, který uplyne od vystavení a odeslání objednávky do okamžiku, kdy zásoba skutečně přijde na sklad. Tento časový interval se nazývá **pořizovací lhůta dodávky** (též předstih objednávky).

# Klasifikace modelů zásob

Podle typu poptávky po zboží rozdělujeme matematické modely na:

- 1 deterministické – je známa velikost poptávky zboží
  - 1 statické - velikost poptávky je konstantní
  - 2 dynamické - velikost poptávky je v různých obdobích rovna různým konstantám
- 2 pravděpodobnostní – poptávka (případně další veličiny) přesne není známa, pouze hustota (nebo pravděpodobnostní funkce), která vyjadřuje jistou pravděpodobnou hodnotu poptávky
  - 1 stacionární - hustota (nebo psní funkce) poptávky se nemění v čase
  - 2 nestacionární - hustota (nebo psní funkce) v čase mění svůj tvar

# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Předpoklady modelu:

- zásoby se doplňují v jednom časovém okamžiku, vždy v okamžiku vyčerpání
- je předem znám požadavek na nakupovanou položku za celé zásobovací období ( $Q$ )
- jsou známy fixní objednávací náklady ( $c_2$ ) a jednotkové skladovací náklady ( $c_1$ )
- v důsledku konstantní poptávky je čerpání zásob rovnoměrné
- nákupní cena je nezávislá na velikosti objednávky

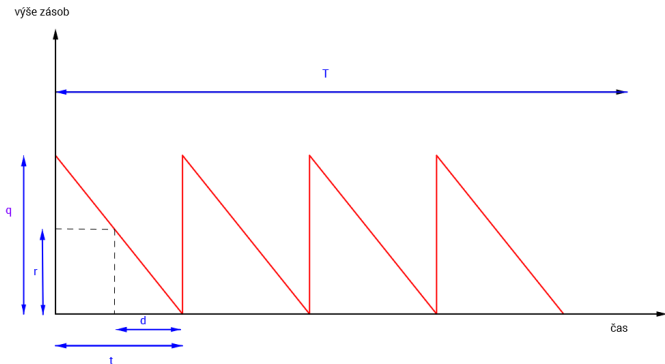
Budeme používat ještě další značení:

- $T$  ... doba, po kterou sledujeme zásobovací proces (zpravidla jeden rok)
- $t$  ... délka dodacího cyklu (doba mezi dvěma dodávkami)
- $q$  ... velikost jedné objednávky
- $d$  ... předstih objednávky
- $r$  ... bod znovuobjednávky nebo též objednacích úroveň (velikost zásob, při které je nutné vystavit objednávku)



Budeme používat ještě další značení:

- $T$  ... doba, po kterou sledujeme zásobovací proces (zpravidla jeden rok)
- $t$  ... délka dodacího cyklu (doba mezi dvěma dodávkami)
- $q$  ... velikost jedné objednávky
- $d$  ... předstih objednávky
- $r$  ... bod znovuobjednávky nebo též objednací úroveň (velikost zásob, při které je nutné vystavit objednávku)



# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Za uvedených předpokladů je možné určit, v jak velkých dodávkách ( $q$ ) a jak často ( $t$ ) by měl majitel zásob položku objednávat, aby náklady spojené s pořizováním a udržováním zásob byly co nejnižší. Obě proměnné jsou spolu svázány vztahem  $t/T = q/Q$ , takže úloha jde převést na jednorozměrný problém.

# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Za uvedených předpokladů je možné určit, v jak velkých dodávkách ( $q$ ) a jak často ( $t$ ) by měl majitel zásob položku objednávat, aby náklady spojené s pořizováním a udržováním zásob byly co nejnižší. Obě proměnné jsou spolu svázány vztahem  $t/T = q/Q$ , takže úloha jde převést na jednorozměrný problém.

Během jednoho dodacího cyklu nabývají objednávací náklady a skladovací náklady dohromady hodnoty  $c_2 + c_1 \frac{q}{2} t$ . Protože počet dodacích cyklů za skladovací období  $T$  je roven podílu  $Q/q$ , pro nákladovou funkci za celé toto období platí

$$C(q, t) = (c_2 + c_1 \frac{q}{2} t) \cdot \frac{Q}{q}$$

# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Za uvedených předpokladů je možné určit, v jak velkých dodávkách ( $q$ ) a jak často ( $t$ ) by měl majitel zásob položku objednávat, aby náklady spojené s pořizováním a udržováním zásob byly co nejnižší. Obě proměnné jsou spolu svázány vztahem  $t/T = q/Q$ , takže úloha jde převést na jednorozměrný problém.

Během jednoho dodacího cyklu nabývají objednávací náklady a skladovací náklady dohromady hodnoty  $c_2 + c_1 \frac{q}{2} t$ . Protože počet dodacích cyklů za skladovací období  $T$  je roven podílu  $Q/q$ , pro nákladovou funkci za celé toto období platí

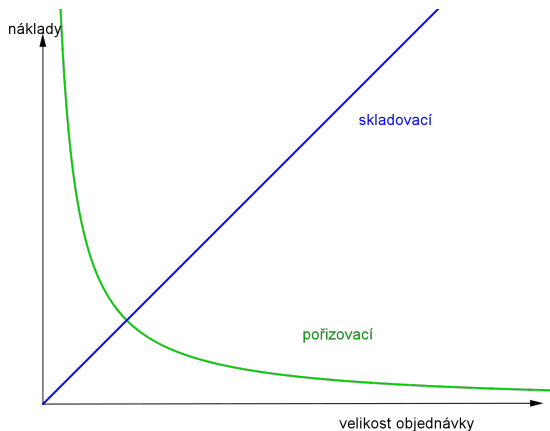
$$C(q, t) = (c_2 + c_1 \frac{q}{2} t) \cdot \frac{Q}{q}$$

Tuto funkci chceme minimalizovat za omezení  $t/T = q/Q$ , vyjádříme-li z tohoto vztahu  $t$  a dosadíme do nákladové funkce, dostaneme

$$C(q) = \left( c_2 + c_1 \frac{q}{2} \frac{qT}{Q} \right) \cdot \frac{Q}{q} = c_2 \frac{Q}{q} + c_1 \frac{qT}{2},$$

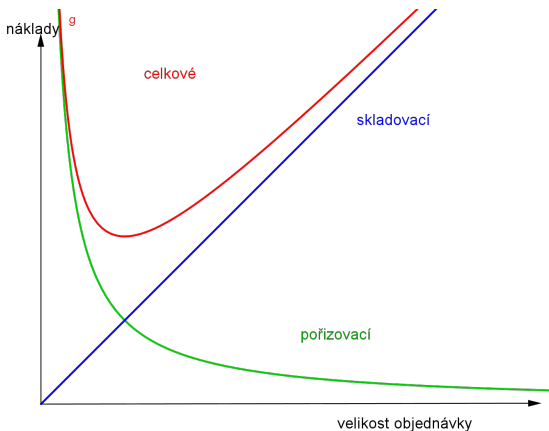
# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Znázorněme graf funkce  $C(q) = c_2 \frac{Q}{q} + c_1 \frac{qT}{2}$ . Náklady na pořízení jsou nepřímo úměrné  $q$ , kdežto skladovací náklady rostou lineárně s rostoucím  $q$ .



# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Znázorněme graf funkce  $C(q) = c_2 \frac{Q}{q} + c_1 \frac{qT}{2}$ . Náklady na pořízení jsou nepřímo úměrné  $q$ , kdežto skladovací náklady rostou lineárně s rostoucím  $q$ .



Lze ukázat, že funkce celkových nákladů je konvexní, pro nalezení minima tedy stačí nalézt stacionární bod.

# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou

Podmínka pro **Optimální velikosti objednávky**  $q^*$  (v angloamerické literatuře značena EOQ = Economic Order Quantity):

$$C'(q) = -c_2 \frac{Q}{q^2} + c_1 \frac{T}{2} = 0,$$

odtud vyjádříme  $q^* = \sqrt{\frac{2c_2Q}{c_1T}}$ , (tzv. Wilsonův nebo Harrisův vzorec).

Celkové náklady dosahují v  $q^*$  svého minima  $C(q^*) = \sqrt{2c_2c_1QT}$ .

**Optimální délka dodacího cyklu**, počítaná ze vztahu  $t^* = \frac{q^*T}{Q}$ , je pak dána

výrazem  $t^* = \sqrt{\frac{2c_2T}{c_1Q}}$ . V případě, že  $d < t^*$ , lze odvodit vzorec pro výši

zásob, při které je nutné vystavit objednávku, aby byla vyřízena do okamžiku vyčerpání zásob:  $r^* = Qd/T$

# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou, příklad

**Příklad :** Podnik potřebuje pro výrobu ročně 18 tisíc kusů úzkoprofilových součástek. Fixní náklady na jednu objednávku činí 1 tis. Kč, náklady na skladování jednoho kusu za rok činí 1 Kč. Průměrná pořizovací lhůta dodávky je 2 měsíce. Určete  $q^*$ ,  $t^*$ ,  $C(q^*)$ ,  $r^*$



# Model pro jednu položku s okamžitou dodávkou, příklad

**Příklad :** Podnik potřebuje pro výrobu ročně 18 tisíc kusů úzkoprofilových součástek. Fixní náklady na jednu objednávku činí 1 tis. Kč, náklady na skladování jednoho kusu za rok činí 1 Kč. Průměrná pořizovací lhůta dodávky je 2 měsíce. Určete  $q^*$ ,  $t^*$ ,  $C(q^*)$ ,  $r^*$

**Řešení:** Dosadíme do  $q^* = \sqrt{\frac{2c_2Q}{c_1T}} = \sqrt{\frac{2000 \cdot 18000}{1}} = 6000$  ks. Potom

$C(q^*) = \sqrt{2c_2c_1QT} = \sqrt{2000 \cdot 18000} = 6000K$ . Dále

$t^* = \sqrt{\frac{2c_2T}{c_1Q}} = \sqrt{\frac{2000 \cdot 1}{18000}} = 1/3$  roku, tedy 4 měsíce. Protože  $d < t^*$ , můžeme použít vzorec pro výpočet  $r^*$ . Nejprve vyjádříme  $d$  v kompatibilních jednotkách, tj.  $d = 1/6$  roku. Dostaneme  $r^* = Qd/T = 18000/6 = 3000$  ks.

# Model zásob s přechodně neuspokojenou poptávkou

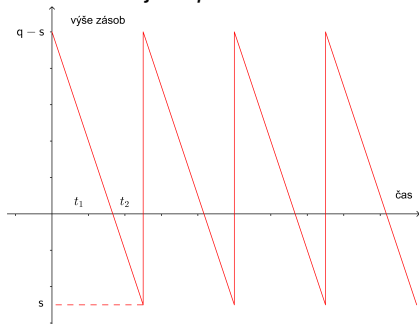
Uvažujme modifikaci předchozího modelu, kdy připustíme **přechodný nedostatek zásoby** na skladě. Potom:

- Dodávkový cyklus se rozpadá na dva intervaly, v prvním intervalu délky  $t_1$  dochází k čerpání zásoby, ve druhém intervalu délky  $t_2$  nebudou požadavky na čerpání uspokojeny. Celková délka cyklu je pak  $t = t_1 + t_2$ .
- Celkovou výši neuspokojené poptávky v intervalu  $t_2$  označíme jako  $s$ . Model předpokládá, že tato poptávka bude uspokojena ihned po příchodu nejbližší dodávky. Z celkového objemu dodávky tedy půjde do skladu jen  $q - s$ .

# Model zásob s přechodně neuspokojenou poptávkou

Uvažujme modifikaci předchozího modelu, kdy připustíme **přechodný nedostatek zásoby** na skladě. Potom:

- Dodávkový cyklus se rozpadá na dva intervaly, v prvním intervalu délky  $t_1$  dochází k čerpání zásoby, ve druhém intervalu délky  $t_2$  nebudou požadavky na čerpání uspokojeny. Celková délka cyklu je pak  $t = t_1 + t_2$ .
- Celkovou výši neuspokojené poptávky v intervalu  $t_2$  označíme jako  $s$ . Model předpokládá, že tato poptávka bude uspokojena ihned po příchodu nejbližší dodávky. Z celkového objemu dodávky tedy půjde do skladu jen  $q - s$ . Průběh dodávkových cyklů je znázorněn na obrázku.



# Model zásob s přechodně neuspokojenou poptávkou

Nákladová funkce modelu je součtem tří položek:

- **Skladovací náklady** - v rámci jednoho dodávkového cyklu lze spočítat jako součin průměrné zásoby  $\frac{q-s}{2}$ , jednotkových skladovacích nákladů  $c_1$  a doby  $t_1$ , po kterou je zásoba čerpána.  $c_1 \frac{q-s}{2} t_1$ .
- V každém cyklu vznikají fixní **pořizovací náklady** ve výši  $c_2$ .
- **Náklady z nedostatku zásoby** - lze vyjádřit jako součin průměrného nedostatku zásoby  $\frac{s}{2}$ , jednotkových nákladů  $c_3$  a doby  $t_2$ , po kterou není zásoba k dispozici  $c_3 \frac{s}{2} t_2$ .

# Model zásob s přechodně neuspokojenou poptávkou

Nákladová funkce modelu je součtem tří položek:

- **Skladovací náklady** - v rámci jednoho dodávkového cyklu lze spočítat jako součin průměrné zásoby  $\frac{q-s}{2}$ , jednotkových skladovacích nákladů  $c_1$  a doby  $t_1$ , po kterou je zásoba čerpána.  $c_1 \frac{q-s}{2} t_1$ .
- V každém cyklu vznikají fixní **pořizovací náklady** ve výši  $c_2$ .
- **Náklady z nedostatku zásoby** - lze vyjádřit jako součin průměrného nedostatku zásoby  $\frac{s}{2}$ , jednotkových nákladů  $c_3$  a doby  $t_2$ , po kterou není zásoba k dispozici  $c_3 \frac{s}{2} t_2$ .

Výsledná nákladová funkce má potom tvar  $C(s, q) = c_1 \frac{q-s}{2} t_1 + c_2 + c_3 \frac{s}{2} t_2 \frac{Q}{q}$ .

# Model zásob s přechodně neuspokojenou poptávkou

Nákladová funkce modelu je součtem tří položek:

- **Skladovací náklady** - v rámci jednoho dodávkového cyklu lze spočítat jako součin průměrné zásoby  $\frac{q-s}{2}$ , jednotkových skladovacích nákladů  $c_1$  a doby  $t_1$ , po kterou je zásoba čerpána.  $c_1 \frac{q-s}{2} t_1$ .
- V každém cyklu vznikají fixní **pořizovací náklady** ve výši  $c_2$ .
- **Náklady z nedostatku zásoby** - lze vyjádřit jako součin průměrného nedostatku zásoby  $\frac{s}{2}$ , jednotkových nákladů  $c_3$  a doby  $t_2$ , po kterou není zásoba k dispozici  $c_3 \frac{s}{2} t_2$ .

Výsledná nákladová funkce má potom tvar  $C(s, q) = c_1 \frac{q-s}{2} t_1 + c_2 + c_3 \frac{s}{2} t_2 \frac{Q}{q}$ .

V uvedeném vztahu kromě proměnných  $s, q$  figurují ještě časové charakteristiky  $t_1$  a  $t_2$ . Tyto můžeme ale pomocí vztahu  $t = \frac{q}{Q}$  a díky vlastnostem podobných trojúhelníků vyjádřit jako

$$\frac{t_1}{t} = \frac{q-s}{q} \Rightarrow t_1 = \frac{q-s}{q} \frac{q}{Q} = \frac{q-s}{Q}, \quad \frac{t_2}{t} = \frac{s}{q} \Rightarrow t_2 = \frac{s}{q} \frac{q}{Q} = \frac{s}{Q}.$$

Po dosazení výsledných vztahů do nákladové funkce dostaneme výslednou podobu

$$C(s, q) = c_1 \frac{(q-s)^2}{2q} + c_2 \frac{Q}{q} + c_3 \frac{s^2}{2q}.$$

# Optimální výše dodávky v modelu přechodně neuspokojenou poptávkou

Optimální hodnoty  $q^*$  a  $s^*$  najdeme tak, že položíme parciální derivace funkce  $C(s, q)$  rovny nule, dostaneme tak

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}},$$

$$s^* = \frac{c_1}{c_1+c_3} q^*.$$

# Optimální výše dodávky v modelu přechodně neuspokojenou poptávkou

Optimální hodnoty  $q^*$  a  $s^*$  najdeme tak, že položíme parciální derivace funkce  $C(s, q)$  rovny nule, dostaneme tak

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}},$$

$$s^* = \frac{c_1}{c_1+c_3} q^*.$$

Všimněme si, že vzorec je pouhou modifikací výsledku modelu s okamžitou dodávkou o konstantu závisující pouze na nákladových parametrech  $c_1$  a  $c_3$ .



# Optimální výše dodávky v modelu přechodně neuspokojenou poptávkou

Optimální hodnoty  $q^*$  a  $s^*$  najdeme tak, že položíme parciální derivace funkce  $C(s, q)$  rovny nule, dostaneme tak

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}},$$

$$s^* = \frac{c_1}{c_1+c_3} q^*.$$

Všimněme si, že vzorec je pouhou modifikací výsledku modelu s okamžitou dodávkou o konstantu závisející pouze na nákladových parametrech  $c_1$  a  $c_3$ .

Označíme-li  $\alpha = \frac{t_1}{t}$  **pravděpodobnost vyřízení požadavku** a  $\beta = \frac{t_2}{t}$  **pravděpodobnost, že požadavek bude muset čekat**, máme

$$\beta = \frac{s^*}{q^*} = \frac{c_1}{c_1+c_3}, \quad \alpha = 1 - \beta = \frac{c_3}{c_1+c_3}.$$

# Optimální výše dodávky v modelu přechodně neuspokojenou poptávkou

Optimální hodnoty  $q^*$  a  $s^*$  najdeme tak, že položíme parciální derivace funkce  $C(s, q)$  rovny nule, dostaneme tak

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}},$$

$$s^* = \frac{c_1}{c_1+c_3} q^*.$$

Všimněme si, že vzorec je pouhou modifikací výsledku modelu s okamžitou dodávkou o konstantu závisící pouze na nákladových parametrech  $c_1$  a  $c_3$ . Označíme-li  $\alpha = \frac{t_1}{t}$  **pravděpodobnost vyřízení požadavku** a  $\beta = \frac{t_2}{t}$  **pravděpodobnost, že požadavek bude muset čekat**, máme

$$\beta = \frac{s^*}{q^*} = \frac{c_1}{c_1+c_3}, \quad \alpha = 1 - \beta = \frac{c_3}{c_1+c_3}.$$

Pomocí těchto pravděpodobností lze vyjádřit též optimální výši nákladů a délku dodávkového cyklu:

$$C^* = \sqrt{2Qc_1c_2} \sqrt{\frac{c_3}{c_1+c_3}} = \sqrt{2Qc_1c_2} \sqrt{\alpha}$$

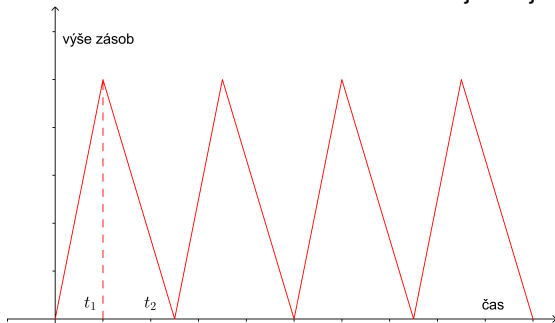
$$t^* = \frac{q^*}{Q} = \sqrt{\frac{2c_2}{Qc_1}} \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_2}{Qc_1}} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}.$$

# Produkčně-spotřební model (POQ)

V tomto modelu narozdíl od modelu s okamžitou dodávkou nepřichází dodávka do skladu v jednom okamžiku, ale postupně. Celý dodávkový cyklus se nám pak rozpadá na **výrobní a spotřební část**. V první části o délce  $t_1$  se rovnoměrně doplňuje sklad a současně dochází k jeho čerpání (předpokládá se větší intenzita produkce než spotřeby). Ve druhé části o délce  $t_2$  se pouze čerpá zásoba ze skladu - po jejím vyčerpání startuje nový cyklus. (nepředpokládá se možnost vzniku nedostatku jako ve druhém modelu).

# Produkčně-spotřební model (POQ)

V tomto modelu narozdíl od modelu s okamžitou dodávkou nepřichází dodávka do skladu v jednom okamžiku, ale postupně. Celý dodávkový cyklus se nám pak rozpadá na **výrobní a spotřební část**. V první části o délce  $t_1$  se rovnoměrně doplňuje sklad a současně dochází k jeho čerpání (předpokládá se větší intenzita produkce než spotřeby). Ve druhé části o délce  $t_2$  se pouze čerpá zásoba ze skladu - po jejím vyčerpání startuje nový cyklus. (nepředpokládá se možnost vzniku nedostatku jako ve druhém modelu). Průběh závislosti stavu zásob na čase je zřejmý z obrázku.



# Produkčně-spotřební model (POQ)

Použijme stejné označení jako v původním modelu, nákladová funkce  $C(q)$  bude mít opět podobnou strukturu (jde o kombinaci skladovacích a výrobních nákladů, kde jednotkové skladovací náklady označujeme  $c_1$  a fixní náklady jedné výrobní dávky  $c_2$ ).

# Produkčně-spotřební model (POQ)

Použijme stejné označení jako v původním modelu, nákladová funkce  $C(q)$  bude mít opět podobnou strukturu (jde o kombinaci skladovacích a výrobních nákladů, kde jednotkové skladovací náklady označujeme  $c_1$  a fixní náklady jedné výrobní dávky  $c_2$ ). Označme ještě symbolem  $p$  **intenzitu produkce** a  $h$  **intenzitu spotřeby**. Pak se za  $t_1$  dnů, po které trvá produkční cyklus, dosáhne maximální zásoby  $(p - h)t_1$ .

# Produkčně-spotřební model (POQ)

Použijme stejné označení jako v původním modelu, nákladová funkce  $C(q)$  bude mít opět podobnou strukturu (jde o kombinaci skladovacích a výrobních nákladů, kde jednotkové skladovací náklady označujeme  $c_1$  a fixní náklady jedné výrobní dávky  $c_2$ ). Označme ještě symbolem  $p$  **intenzitu produkce** a  $h$  **intenzitu spotřeby**. Pak se za  $t_1$  dnů, po které trvá produkční cyklus, dosáhne maximální zásoby  $(p - h)t_1$ .

Celkový objem produkce v rámci jedné výrobní dávky je  $q$ . Tento objem však můžeme též vyjádřit jako součin intenzity produkce  $p$  a délky výrobního cyklu  $t_1$ . Odtud tedy  $t_1 = \frac{q}{p}$ . Takže dostaneme vztah pro průměrnou výši zásoby  $\frac{p-h}{p} \frac{q}{2}$ . Nyní již můžeme konkretizovat obecný tvar nákladové funkce:

$$C(q) = c_1 \frac{p-h}{p} \frac{q}{2} + c_2 \frac{q}{q}.$$

# Produkčně-spotřební model (POQ)

Použijme stejné označení jako v původním modelu, nákladová funkce  $C(q)$  bude mít opět podobnou strukturu (jde o kombinaci skladovacích a výrobních nákladů, kde jednotkové skladovací náklady označujeme  $c_1$  a fixní náklady jedné výrobní dávky  $c_2$ ). Označme ještě symbolem  $p$  **intenzitu produkce** a  $h$  **intenzitu spotřeby**. Pak se za  $t_1$  dnů, po které trvá produkční cyklus, dosáhne maximální zásoby  $(p - h)t_1$ .

Celkový objem produkce v rámci jedné výrobní dávky je  $q$ . Tento objem však můžeme též vyjádřit jako součin intenzity produkce  $p$  a délky výrobního cyklu  $t_1$ . Odtud tedy  $t_1 = \frac{q}{p}$ . Takže dostaneme vztah pro průměrnou výši zásoby  $\frac{p-h}{p} \frac{q}{2}$ . Nyní již můžeme konkretizovat obecný tvar nákladové funkce:

$$C(q) = c_1 \frac{p-h}{p} \frac{q}{2} + c_2 \frac{Q}{q}.$$

Optimální objem výrobní dávky  $q^*$  se odvodí opět jako nulový bod derivace.

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{p}{p-h}},$$

$$C^* = \sqrt{2Qc_1c_2} \sqrt{\frac{p-h}{p}}$$



# Model pro jednu položku s diskontními cenami

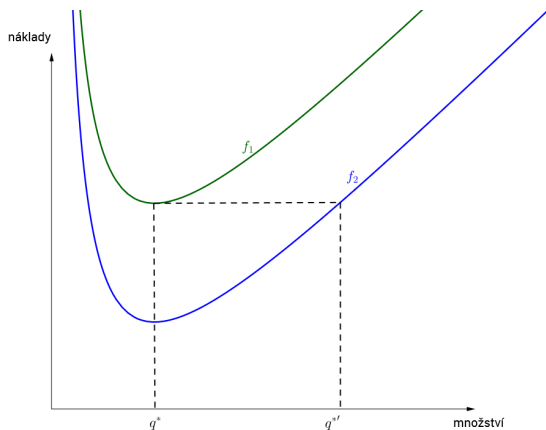
Předpoklady použití modelu jsou stejné jako u předchozího modelu až na to, že do celkové ceny se navíc započítává i fakt, že při větším objednaném množství klesá cena jednotky zboží. Označme standardní a diskontní cenu  $p_1$ , resp.  $p_2 < p_1$  když nárok na nižší cenu vzniká při objednávce alespoň  $q_0$  jednotek zboží. Nákladovou funkci musíme vyjádřit ve složitějším tvaru, který zohlední různé pořizovací ceny:

$$C(q) = \begin{cases} f_1(q) = p_1 Q + c_2 \frac{Q}{q} + c_1 \frac{qT}{2}, & q < q_0 \\ f_2(q) = p_2 Q + c_2 \frac{Q}{q} + c_1 \frac{qT}{2}, & q \geq q_0 \end{cases}$$

Obě funkce  $f_1$ ,  $f_2$  nabývají svého minima ve stejném bodě  $q^* = \sqrt{\frac{2c_2Q}{c_1T}}$ , důležitou roli hraje též množství  $q^{*'}$ , pro které platí  $f_1(q^*) = f_2(q^{*'})$ .

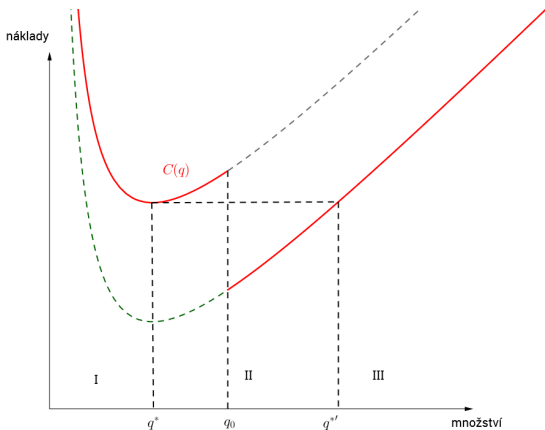
# Model pro jednu položku s diskontními cenami

Body  $q^*$ ,  $q^{*'}$  splňující  $f_1(q^*) = f_2(q^{*'})$  rozdělí vodorovnou osu na tři části  
Řešení modelu závisí na tom, ve které z částí se nachází kritické množství  $q_0$ ,  
od kterého dochází k diskontnímu snížení ceny jednotky zboží z  $p_1$  na  $p_2$ .



# Model pro jednu položku s diskontními cenami

- 1 I Pro  $q_0 < q^*$  minimum nastává v  $q^*$  a jeho hodnota bude  $f_2(q^*)$ .
- 2 II Pro  $q^* \geq q_0 < q^{*'}$  minimum nastává při objednání kritického množství  $q_0$ , viz obrázek.
- 3 III Pro  $q^{*'} \geq q_0$  minimum nastává v  $q^*$  a jeho hodnota bude  $f_1(q^*)$ .



# Model pro jednu položku s diskontními cenami

**Příklad :** Rozhodněte o optimální velikosti objednávky při následujících údajích:  $c_2 = 10$  Kč,  $c_1 = 1$  Kč, po dobu sledovaného období je konstantní poptávka ve výši 5 jednotek zboží na den (tj.  $Q/T = 5$ ),  $p_1 = 2$  Kč,  $p_2 = 1$  Kč,  $q_0 = 15$  jednotek.

# Model pro jednu položku s diskontními cenami

**Příklad :** Rozhodněte o optimální velikosti objednávky při následujících údajích:  $c_2 = 10$  Kč,  $c_1 = 1$  Kč, po dobu sledovaného období je konstantní poptávka ve výši 5 jednotek zboží na den (tj.  $Q/T = 5$ ),  $p_1 = 2$  Kč,  $p_2 = 1$  Kč,  $q_0 = 15$  jednotek.

**Řešení:** Spočteme  $q^* = \sqrt{\frac{2c_2Q}{c_1T}} = \sqrt{20 \cdot 5/1} = 10$ . Vzhledem k tomu, že  $q_0 > q^*$ , nejedná se o případ I a musíme dále určit  $q^{*'}$  z podmínky  $f_1(q^*) = p_1Q + c_2\frac{Q}{q^*} + c_1\frac{q^*T}{2} = f_2(q^{*'}) = p_2Q + c_2\frac{Q}{q^{*'}} + c_1\frac{q^{*'T}}{2}$ . Dostaneme rovnici  $2Q + 10\frac{Q}{10} + \frac{10T}{2} = Q + 10\frac{Q}{q^{*'}} + \frac{q^{*'T}}{2}$ . Po vydělení  $T$  máme:

# Model pro jednu položku s diskontními cenami

**Příklad :** Rozhodněte o optimální velikosti objednávky při následujících údajích:  $c_2 = 10$  Kč,  $c_1 = 1$  Kč, po dobu sledovaného období je konstantní poptávka ve výši 5 jednotek zboží na den (tj.  $Q/T = 5$ ),  $p_1 = 2$  Kč,  $p_2 = 1$  Kč,  $q_0 = 15$  jednotek.

**Řešení:** Spočteme  $q^* = \sqrt{\frac{2c_2Q}{c_1T}} = \sqrt{20 \cdot 5/1} = 10$ . Vzhledem k tomu, že  $q_0 > q^*$ , nejedná se o případ I a musíme dále určit  $q^{*'}$  z podmínky  $f_1(q^*) = p_1Q + c_2\frac{Q}{q^*} + c_1\frac{q^*T}{2} = f_2(q^{*'}) = p_2Q + c_2\frac{Q}{q^{*'}} + c_1\frac{q^{*'T}}{2}$ . Dostaneme rovnici  $2Q + 10\frac{Q}{10} + \frac{10T}{2} = Q + 10\frac{Q}{q^{*'}} + \frac{q^{*'T}}{2}$ . Po vydělení  $T$  máme:  $10 + 5 + 5 = 5 + \frac{50}{q^{*'}} + \frac{q^{*'}}{2}$ , což lze převést na kvadratickou rovnici:  $\frac{(q^{*'})^2}{2} - 15q^{*' } + 50 = 0$ . Její kořeny jsou  $q^{*' }_{1,2} = 15 \pm \sqrt{125}$ . zajímá nás pouze druhý kořen,  $q^{*' }_2 = 15 + 5\sqrt{3}$  a tento je větší než  $q_0$ , jedná se tedy o případ II a optimum nastává pro  $q_0 = 15$  ks.

# Stochastický model

Uvedeme si jeden z nejjednodušších stochastických modelů - **model jednorázově vytvářené zásoby při náhodné poptávce**. Tento model je vhodný pro zboží, které po jisté době zastarává - např. pro módní nebo sezónní výrobky, pečivo, ovoce, zeleninu, řezané květiny, noviny, náhradní součásti unikátních strojů apod. Předpokládejme, že pro dané časové období bylo zakoupeno zboží v množství  $q$  a že poptávka po tomto zboží představuje diskrétní náhodnou veličinu  $D$ , která nabývá hodnot  $d = 0, \dots, \infty$ . Po skončení uvažovaného období mohou nastat dvě krajní situace:

- $D < q$ , neboli zůstane neprodáno  $q - D$  jednotek zboží
- $D > q$ , neboli bude chybět  $D - q$  jednotek zboží

# Stochastický model

Ztráty vzniklé z přebytku nebo z nedostatku zboží v uvažovaném období jsou závislé jednak na rozdílu mezi zakoupeným množstvím zboží a poptávkou, jednak na velikosti **ztrát z jednotky přebývajícího množství (označme ji  $c_s$ )** a **nedostávajícího se množství zboží (označme ji  $c_z$ )**. Známe-li pravděpodobnost, s jakou poptávka po zboží v daném období nabude hodnoty  $d$  (označme ji  $P(D = d)$ ), pro **očekávanou celkovou ztrátu** z přebytku nebo z nedostatku zboží při počáteční zásobě  $q$  platí

$$EC(q) = c_s \sum_{d=0}^q (q - d)P(D = d) + c_z \sum_{d=q+1}^{\infty} (d - q)P(D = d)$$



# Stochastický model

Ztráty vzniklé z přebytku nebo z nedostatku zboží v uvažovaném období jsou závislé jednak na rozdílu mezi zakoupeným množstvím zboží a poptávkou, jednak na velikosti **ztrát z jednotky přebývajícího množství (označme ji  $c_s$ )** a **nedostávajícího se množství zboží (označme ji  $c_z$ )**. Známe-li pravděpodobnost, s jakou poptávka po zboží v daném období nabude hodnoty  $d$  (označme ji  $P(D = d)$ ), pro **očekávanou celkovou ztrátu** z přebytku nebo z nedostatku zboží při počáteční zásobě  $q$  platí

$$EC(q) = c_s \sum_{d=0}^q (q - d)P(D = d) + c_z \sum_{d=q+1}^{\infty} (d - q)P(D = d)$$

Jestliže neuvažujeme náklady na pořízení zásob (provádí se pouze jedna objednávka) a na skladování (předpokládáme, že skladovací doba není dlouhá), cílem řešení uvažovaného modelu je stanovení takové výše počáteční zásoby (a tudíž i velikosti jednorázové dodávky zboží), aby očekávaná ztráta byla minimální. Pro optimální hodnotu objednávky  $q^*$  lze odvodit vztah

$$P(D \leq q - 1) \leq \frac{c_z}{c_s + c_z} \leq P(D \leq q)$$

# Stochastický model

Při známých ztrátách  $c_z$  a  $c_s$  hodnotu  $q^*$  určíme z uvedeného vztahu tak, že při daném rozdělení pravděpodobnosti poptávky spočítáme kumulativní pravděpodobnosti (hodnoty distribuční funkce) a najdeme takové dvě jejich sousední hodnoty, aby mezi nimi ležela hodnota zlomku  $\frac{c_z}{c_s + c_z}$ . Tento zlomek představuje tzv. **úroveň obsluhy**, tzn. pravděpodobnost, že nedojde k nedostatku zásob.

# Stochastický model

**Příklad :** Prodejce vánočních stromků se rozhoduje, kolik stromků má objednat u lesního závodu. Na základě zkušeností z minulých let odhaduje zájem o stromky tak, jak je uvedeno v tabulce.

Poptávka (ks)	120	140	160	180	200
Pravděpodobnost	0,05	0,10	0,25	0,35	0,25

# Stochastický model

**Příklad :** Prodejce vánočních stromků se rozhoduje, kolik stromků má objednat u lesního závodu. Na základě zkušeností z minulých let odhaduje zájem o stromky tak, jak je uvedeno v tabulce.

Poptávka (ks)	120	140	160	180	200
Pravděpodobnost	0,05	0,10	0,25	0,35	0,25

Jestliže nebudou všechny stromky prodány, po Vánocích mohou být nabídnuty do zoologické zahrady nebo do zahradnictví, přičemž prodejce by trafil na každém stromku 80 Kč. Na stejnou částku prodejce odhadl i ušlý zisk z jednoho nedostávajícího se stromku v případě, že by zájem o stromky převýšil jejich objednaný počet. Při jakém počtu dodaných stromků budou očekávané ztráty z jejich přebytku nebo nedostatku co nejmenší?

# Stochastický model

**Příklad :** Prodejce vánočních stromků se rozhoduje, kolik stromků má objednat u lesního závodu. Na základě zkušeností z minulých let odhaduje zájem o stromky tak, jak je uvedeno v tabulce.

Poptávka (ks)	120	140	160	180	200
Pravděpodobnost	0,05	0,10	0,25	0,35	0,25

Jestliže nebudou všechny stromky prodány, po Vánocích mohou být nabídnuty do zoologické zahrady nebo do zahradnictví, přičemž prodejce by trafil na každém stromku 80 Kč. Na stejnou částku prodejce odhadl i ušlý zisk z jednoho nedostávajícího se stromku v případě, že by zájem o stromky převýšil jejich objednaný počet. Při jakém počtu dodaných stromků budou očekávané ztráty z jejich přebytku nebo nedostatku co nejmenší?

**Řešení:** Vyplníme tabulku kumulativních pravděpodobností:

$q$	120	140	160	180	200
$P(D \leq q)$	0,05	0,15	0,40	0,75	1

Spočteme podíl  $\frac{c_z}{c_s + c_z} = \frac{1}{2}$ . Vidíme, že tento podíl leží mezi hodnotami 0,4 a 0,75, což odpovídá množstvím 160 a 180, volíme tedy  $q^* = 180$  ks.

# Numerická optimalizace

Řadu problémů není možné řešit analyticky (neznalost analytického vyjádření, mnoho proměnných, složité funkce - nelineární rovnice při určování stacionárních bodů) nebo by bylo analytické řešení příliš výpočetně náročné a tudíž neefektivní. Často nám stačí nalézt pouze přibližné řešení (v reálném světě stejně zaokrouhlujeme). Proto se v praxi používají **metody iterační**. Jejich charakteristikou je konstrukce posloupnosti bodů definičního oboru  $x^0, x^1, x^2, \dots$ , které se blíží k optimálnímu řešení  $x^*$ . Nasazení těchto metod pro vyhledání extrému je velice výhodné v kombinaci s výpočetní technikou.

# Numerická optimalizace

Řadu problémů není možné řešit analyticky (neznalost analytického vyjádření, mnoho proměnných, složité funkce - nelineární rovnice při určování stacionárních bodů) nebo by bylo analytické řešení příliš výpočetně náročné a tudíž neefektivní. Často nám stačí nalézt pouze přibližné řešení (v reálném světě stejně zaokrouhlujeme). Proto se v praxi používají **metody iterační**. Jejich charakteristikou je konstrukce posloupnosti bodů definičního oboru  $x^0, x^1, x^2, \dots$ , které se blíží k optimálnímu řešení  $x^*$ . Nasazení těchto metod pro vyhledání extrému je velice výhodné v kombinaci s výpočetní technikou.

Existuje řada metod, a to jak pro funkce jedné proměnné, tak pro více proměnných. Zřejmě nejznámější jsou **pro funkce jedné proměnné:**

- metoda bisekce intervalu
- metoda zlatého řezu
- metoda kvadratické interpolace
- Newtonova metoda
- metoda Regula falsi

# Jednorozměrná optimalizace - komparativní metody

Nejprve se zaměříme na metody **jednorozměrné numerické optimalizace**, ty jsou totiž součástí některých vícerozměrných metod. Metody nevyžadující výpočet derivace funkce  $f$  nazýváme **komparativní**. Uvedeme tři z nich, a to trisekci, metodu zlatého řezu a metodu kvadratické interpolace. Většinou je třeba předem přibližně určit polohu bodu optima a stanovit počáteční interval  $I = \langle a, b \rangle$  tak, aby na změněném intervalu účelová funkce  $f$  měla jen jedno minimum, tj. byla **unimodální**. V jednotlivých iteracích nahrazujeme krajní body intervalu obsahujícího minimum novými body, tak abychom jej postupně zužovali. Jako odhad bodu optima se vezme střed posledního intervalu

$$I^n = \langle a^n, b^n \rangle.$$



# Jednorozměrná optimalizace - komparativní metody

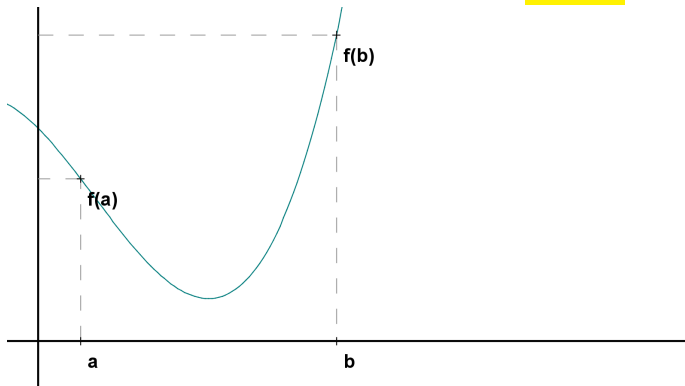
Nejprve se zaměříme na metody **jednorozměrné numerické optimalizace**, ty jsou totiž součástí některých vícerozměrných metod. Metody nevyžadující výpočet derivace funkce  $f$  nazýváme **komparativní**. Uvedeme tři z nich, a to trisekci, metodu zlatého řezu a metodu kvadratické interpolace. Většinou je třeba předem přibližně určit polohu bodu optima a stanovit počáteční interval  $I = \langle a, b \rangle$  tak, aby na změněném intervalu účelová funkce  $f$  měla jen jedno minimum, tj. byla **unimodální**. V jednotlivých iteracích nahrazujeme krajní body intervalu obsahujícího minimum novými body, tak abychom jej postupně zužovali. Jako odhad bodu optima se vezme střed posledního intervalu  $I^n = \langle a^n, b^n \rangle$ .

U všech iteračních metod musíme předem nastavit nějaké pravidlo **ukončení výpočtu**. Metody většinou vyžadují splnění jistých podmínek, za kterých platí, že čím více iteračních kroků provedeme, tím přesnější odhad hledaného extrému získáme. Možné přístupy, kdy výpočet ukončit jsou například:

- po provedení zadaného počtu kroků
- dosažením stanovené přesnosti  $\varepsilon$  (tedy když šířka intervalu  $I^n$  splňuje:  
 $|b^n - a^n| < 2\varepsilon$ )

# Jednorozměrná optimalizace - metoda trisekce

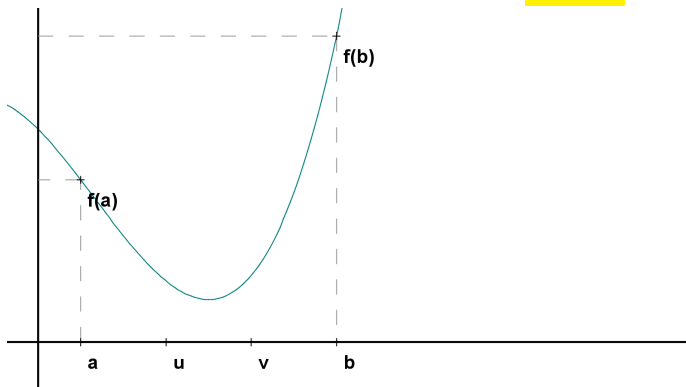
Jako úvodní motivaci ukážeme intervalovou **trisekci**.



Označme  $d = (b - a)$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda trisekce

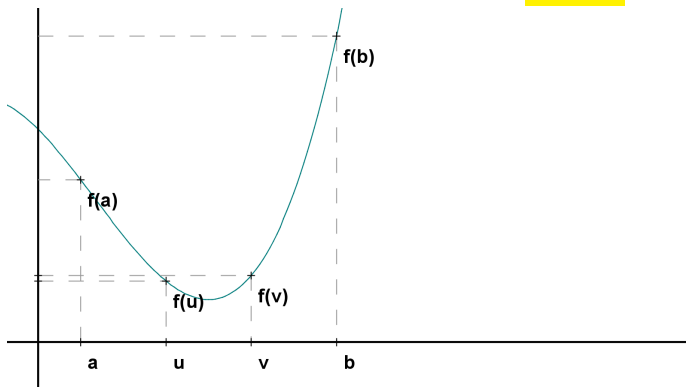
Jako úvodní motivaci ukážeme intervalovou **trisekci**.



Body  $u = a + d/3$  a  $v = b - d/3$  dělí interval  $\langle a, b \rangle$  na tři stejné části.

# Jednorozměrná optimalizace - metoda trisekce

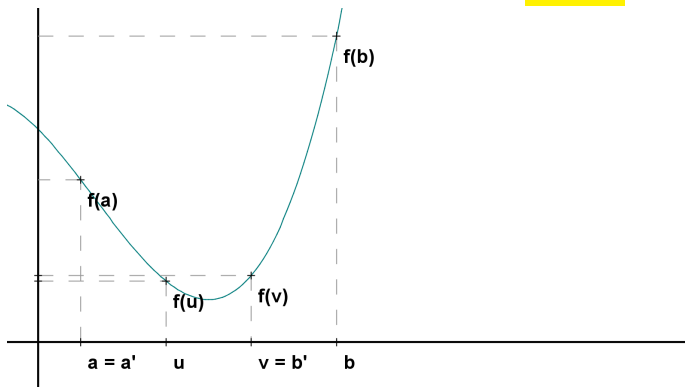
Jako úvodní motivaci ukážeme intervalovou **trisekci**.



Nejprve vyhodnotíme  $f(u)$  a  $f(v)$ . Předpokládejme, že  $f(u) < f(v)$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda trisekce

Jako úvodní motivaci ukážeme intervalovou **trisekci**.



Minimum jistě leží vlevo od  $v$ , takže  $b$  nahradíme pomocí  $b^1 = v$ , levá hranice zůstává  $a^1 = a$ . Tím se délka intervalu (obsahujícího minimum) zkrátí na dvě třetiny své původní délky. Dále pokračujeme s intervalem  $I^1 = \langle a^1, b^1 \rangle$ , atd. Bod  $u$  však už nelze v následujícím kroku využít. Funkci musíme vyhodnotit v každém kroku dvakrát, což je neefektivní.

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu

Metoda zlatého řezu je založena na šikovnějším výběru dělicích bodů  $u$  a  $v$ . Označme  $\rho$  číslo o něco větší než  $1/3$ , jehož přesnou hodnotu teprve určíme. Označme body  $u = a + \rho d$  a  $v = b - \rho d$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu

**Metoda zlatého řezu** je založena na šikovnějším výběru dělicích bodů  $u$  a  $v$ . Označme  $\rho$  číslo o něco větší než  $1/3$ , jehož přesnou hodnotu teprve určíme. Označme body  $u = a + \rho d$  a  $v = b - \rho d$ . Předpokládejme opět, že  $f(u) < f(v)$ , minimum je tedy mezi  $a$  a  $v$ . Nahradíme  $b$  pomocí  $v$  a proces opakujeme. Zvolíme-li správnou hodnotu  $\rho$ , bod  $u$  bude v pozici použitelné i v příštím kroku. Po prvním kroku se tak funkce  $f$  bude vyhodnocovat pokaždé už jen jednou.

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu

**Metoda zlatého řezu** je založena na šikovnějším výběru dělicích bodů  $u$  a  $v$ . Označme  $\rho$  číslo o něco větší než  $1/3$ , jehož přesnou hodnotu teprve určíme. Označme body  $u = a + \rho d$  a  $v = b - \rho d$ . Předpokládejme opět, že  $f(u) < f(v)$ , minimum je tedy mezi  $a$  a  $v$ . Nahradíme  $b$  pomocí  $v$  a proces opakujeme. Zvolíme-li správnou hodnotu  $\rho$ , bod  $u$  bude v pozici použitelné i v příštím kroku. Po prvním kroku se tak funkce  $f$  bude vyhodnocovat pokaždé už jen jednou.

**Jak tedy zvolit  $\rho$ ?** Tak, aby bod  $u$  hrál v redukovaném intervalu  $\langle a, v \rangle$  stejnou roli jako bod  $v$  v původním intervalu, tj. aby poměr délky intervalu  $\langle a, u \rangle$  k délce intervalu  $\langle a, v \rangle$  byl stejný jako poměr délky intervalu  $\langle a, v \rangle$  k délce intervalu  $\langle a, b \rangle$ , tj.  $\rho : (1 - \rho) = (1 - \rho) : 1$ .

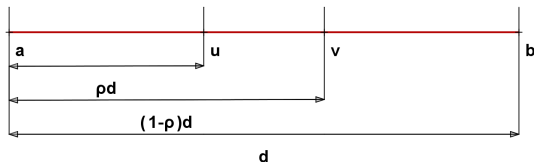


# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu

**Metoda zlatého řezu** je založena na šikovnějším výběru dělicích bodů  $u$  a  $v$ . Označme  $\rho$  číslo o něco větší než  $1/3$ , jehož přesnou hodnotu teprve určíme. Označme body  $u = a + \rho d$  a  $v = b - \rho d$ . Předpokládejme opět, že  $f(u) < f(v)$ , minimum je tedy mezi  $a$  a  $v$ . Nahradíme  $b$  pomocí  $v$  a proces opakujeme. Zvolíme-li správnou hodnotu  $\rho$ , bod  $u$  bude v pozici použitelné i v příštím kroku. Po prvním kroku se tak funkce  $f$  bude vyhodnocovat pokaždé už jen jednou.

**Jak tedy zvolit  $\rho$ ?** Tak, aby bod  $u$  hrál v redukovaném intervalu  $\langle a, v \rangle$  stejnou roli jako bod  $v$  v původním intervalu, tj. aby poměr délky intervalu  $\langle a, u \rangle$  k délce intervalu  $\langle a, v \rangle$  byl stejný jako poměr délky intervalu  $\langle a, v \rangle$  k délce intervalu  $\langle a, b \rangle$ , tj.  $\rho : (1 - \rho) = (1 - \rho) : 1$ . Po úpravě tohoto vztahu obdržíme kvadratickou rovnici  $\rho^2 - 3\rho + 1 = 0$ , jejímž řešením je

$\rho = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ , kde číslo  $1 - \rho \approx 0,618$  je tzv. **poměr zlatého řezu**.



# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad

Lze ukázat, že požadujeme-li při metodě zlatého řezu ukončení při dosažení stanovené přesnosti  $\varepsilon$ , stačí provést  $N$  iterací, kde

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{-\log(1-\rho)}.$$

Výsledný odhad bodu optima zapíšeme ve tvaru  $x^* = \frac{b^N + a^N}{2} \pm \varepsilon$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad

Lze ukázat, že požadujeme-li při metodě zlatého řezu ukončení při dosažení stanovené přesnosti  $\varepsilon$ , stačí provést  $N$  iterací, kde

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{-\log(1-\rho)}.$$

Výsledný odhad bodu optima zapíšeme ve tvaru  $x^* = \frac{b^N + a^N}{2} \pm \varepsilon$ .

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0, 5; 3 \rangle$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad

Lze ukázat, že požadujeme-li při metodě zlatého řezu ukončení při dosažení stanovené přesnosti  $\varepsilon$ , stačí provést  $N$  iterací, kde

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{-\log(1-\rho)}.$$

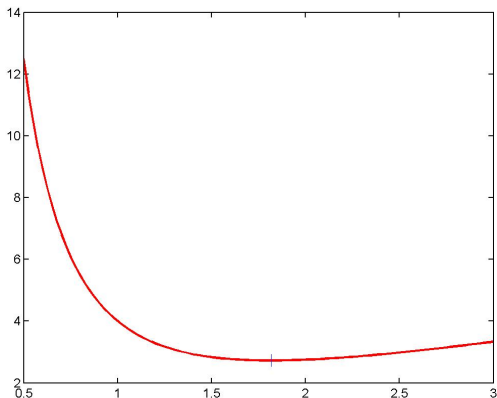
Výsledný odhad bodu optima zapíšeme ve tvaru  $x^* = \frac{b^N + a^N}{2} \pm \varepsilon$ .

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0, 5; 3 \rangle$ .

Spočteme nejprve, kolik bude třeba provést iterací:

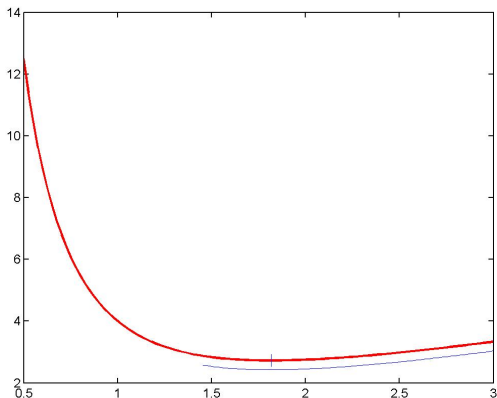
$$N \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{-\log(1-\rho)} = \frac{\log\left(\frac{2,5}{0,1}\right)}{-\log(0,618)} \approx 6,69, \text{ stačí tedy } 7 \text{ iterací.}$$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



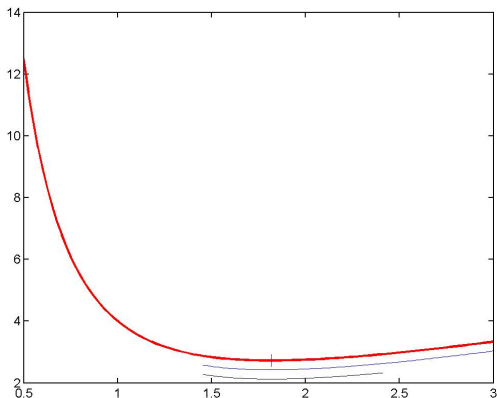
Graf funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $a = 0,5$ ;  $b = 3$ , svistou čarou je znázorněno skutečné minimum  $x^* = \sqrt[3]{6} \approx 1,817120$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



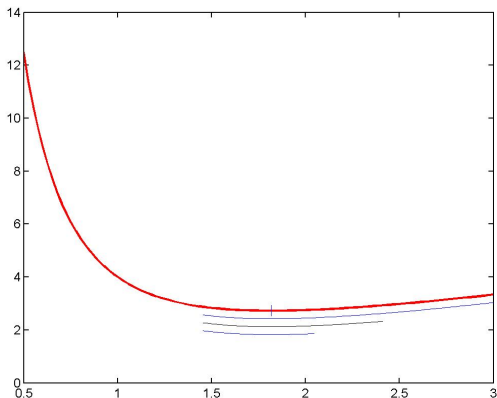
**1. krok:**  $u = 1.454915$ ,  $v = 2.045085$ ,  $f(u) = 2.872163$ ,  $f(v) = 2.762381$ .  
Nový interval je  $I^1 = \langle 1.454915, 3.000000 \rangle$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



**2. krok:**  $u = 2.045085$ ,  $v = 2.409830$ ,  $f(u) = 2.762381$ ,  $f(v) = 2.926423$ .  
Nový interval je  $I^2 = \langle 1.454915, 2.409830 \rangle$ .

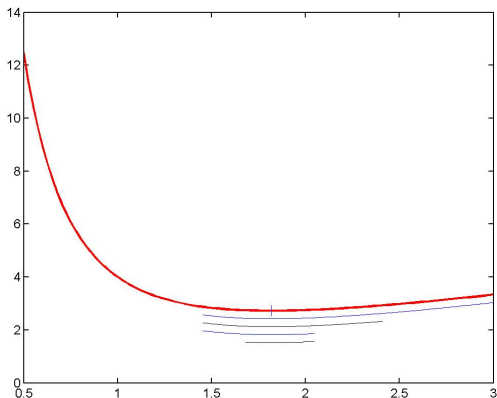
# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



**3. krok:**  $u = 1.819660$ ,  $v = 2.045085$ ,  $f(u) = 2.725686$ ,  $f(v) = 2.762381$ .  
Nový interval je  $I^3 = \langle 1.454915, 2.045085 \rangle$ .

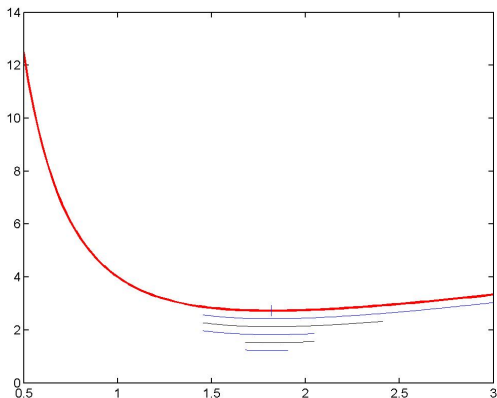


# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



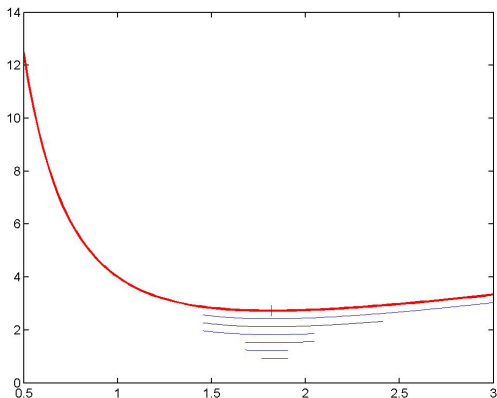
4. krok:  $u = 1.680340$ ,  $v = 1.819660$ ,  $f(u) = 2.742835$ ,  $f(v) = 2.725686$ .  
Nový interval je  $I^4 = \langle 1.680340, 2.045085 \rangle$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



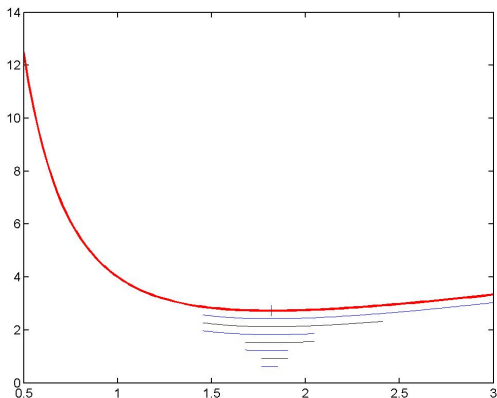
**5. krok:**  $u = 1.819660$ ,  $v = 1.905765$ ,  $f(u) = 2.725686$ ,  $f(v) = 2.731770$ .  
Nový interval je  $I^5 = \langle 1.680340, 1.905765 \rangle$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



**6. krok:**  $u = 1.766445$ ,  $v = 1.819660$ ,  $f(u) = 2.727882$ ,  $f(v) = 2.725686$ .  
Nový interval je  $I^6 = \langle 1.766445, 1.905765 \rangle$ .

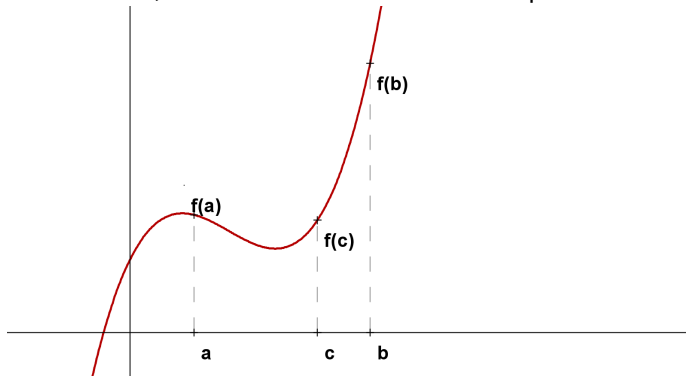
# Jednorozměrná optimalizace - metoda zlatého řezu, příklad



**7. krok:**  $u = 1.819660$ ,  $v = 1.852549$ ,  $f(u) = 2.725686$ ,  $f(v) = 2.726691$ .  
Nový interval je  $I^7 = \langle 1.766445, 1.852549 \rangle$ . Šířka intervalu je menší než 0, 1,  
tedy odhadneme bod optima jeho středem:  $x^* = 1,81 \pm 0,05$

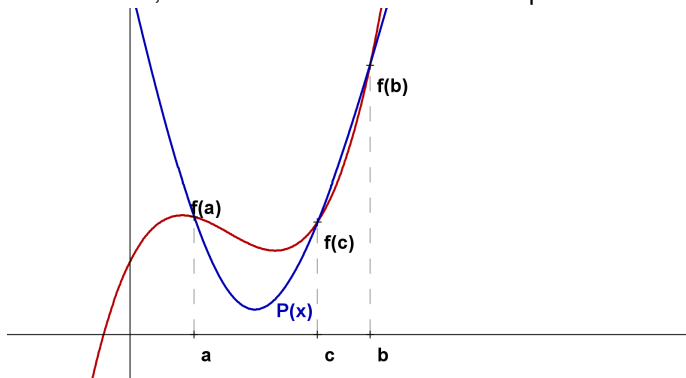
# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace

Předpokládejme, že minimum leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , a že je znám nějaký jeho vnitřní bod  $c$ , ve kterém hodnota funkce  $f$  nepřesáhne hodnoty  $f(a)$ ,  $f(b)$ .



# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace

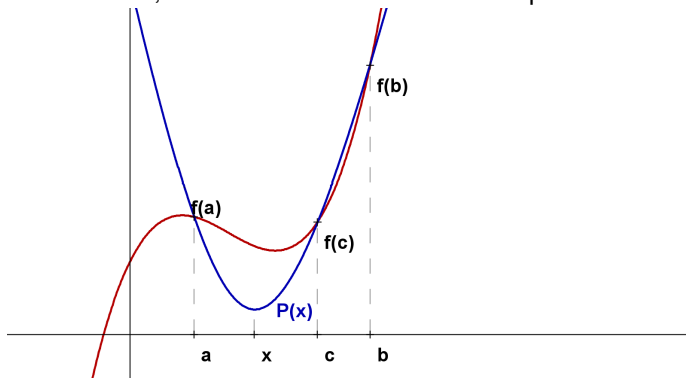
Předpokládejme, že minimum leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , a že je znám nějaký jeho vnitřní bod  $c$ , ve kterém hodnota funkce  $f$  nepřesáhne hodnoty  $f(a)$ ,  $f(b)$ .



Body  $[a, f(a)]$ ,  $[c, f(c)]$  a  $[b, f(b)]$  proložíme parabolou  $P(x)$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace

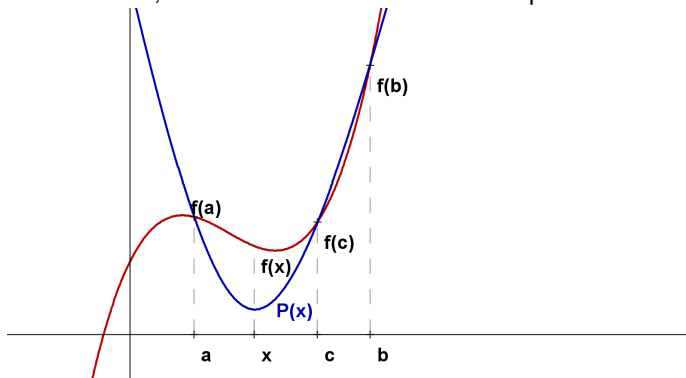
Předpokládejme, že minimum leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , a že je znám nějaký jeho vnitřní bod  $c$ , ve kterém hodnota funkce  $f$  nepřesáhne hodnoty  $f(a)$ ,  $f(b)$ .



Bod jejího minima  $x$  považujeme za aproximaci bodu optima  $x^*$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace

Předpokládejme, že minimum leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , a že je znám nějaký jeho vnitřní bod  $c$ , ve kterém hodnota funkce  $f$  nepřesáhne hodnoty  $f(a)$ ,  $f(b)$ .

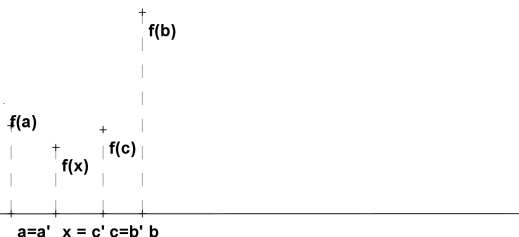


Dá se ukázat, že  $x = \frac{1}{2} \frac{f(a)(b^2 - c^2) + f(c)(a^2 - b^2) + f(b)(c^2 - a^2)}{f(a)(b - c) + f(c)(a - b) + f(b)(c - a)}$ . Další postup se volí podle hodnoty  $f(x)$ .



# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace

Víme, že  $x \in (a, b)$ , vyšlo nám  $x < c$ . Je-li  $f(x) < f(c)$ , do další iterace použijeme vypočtené  $x$  místo bodu  $c$ , který se stane novým krajním bodem (pokud  $x < c$ , tak jím nahradíme horní hranici  $b$ , viz obr., v opačném případě dolní hranici  $a$ ). Je-li naopak  $f(x) > f(c)$ , pak  $c$  ponecháme a novým krajovým bodem se stane  $x$ . Příklad  $x = c$  znamená, že buď jsme se strefili do optima nebo je nutná jiná volba  $c$ . Tento a další nedostatky překonává kombinovaný přístup, tzv. **Brentova metoda**.



Výpočet se zastaví, až rozdíl dvou po sobě jdoucích odhadů  $|x^n - x^{n-1}|$  klesne pod hodnotu  $\varepsilon$ .

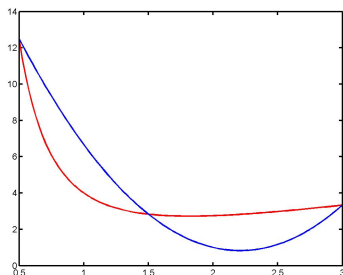
# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace, příklad

**Příklad:** Minimalizujte funkci  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na intervalu  $\langle 0, 5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , jako první aproximaci volte  $x^0 = 1,5$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace, příklad

**Příklad:** Minimalizujte funkci  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , jako první aproximaci volte  $x^0 = 1,5$ .

První interpolaci provedeme pro body  $a = 0,5$ ,  $c = 1,5$  a  $b = 3$ . Znázorníme červeně graf  $f(x)$  na  $\langle a, b \rangle$  a modře parabolou, protínající jej v bodech  $a, b, c$ :



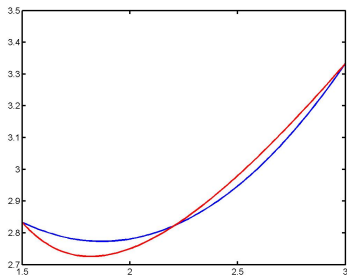
**1. krok:**  $f(a) = 12.500000$ ,  $f(c) = 2.833333$ ,  $f(b) = 3.333333 \Rightarrow$

$x = 2.208333$ ,  $f(x) = 2.823499 \Rightarrow$  Nově:

$a = 1.500000$ ,  $c = 2.208333$ ,  $b = 3.000000$ , chyba  $|x^1 - x^0| = 0.708333$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace, příklad

**Příklad:** Minimalizujte funkci  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , jako první aproximaci volte  $x^0 = 1,5$ .



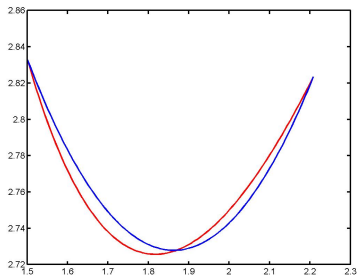
**2. krok:**  $f(a) = 2.833333$ ,  $f(c) = 2.823499$ ,  $f(b) = 3.333333 \Rightarrow$

$x = 1.869995$ ,  $f(x) = 2.727902 \Rightarrow$  Nově:

$a = 1.500000$ ,  $c = 1.869995$ ,  $b = 2.208333$ , chyba  $|x^2 - x^1| = 0.338339$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda kvadratické interpolace, příklad

**Příklad:** Minimalizujte funkci  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , jako první aproximaci volte  $x^0 = 1,5$ .



**3. krok:**  $f(a) = 2.833333$ ,  $f(c) = 2.727902$ ,  $f(b) = 2.823499 \Rightarrow$   
 $x = 1.862831$ ,  $f(x) = 2.727350 \Rightarrow$  Nově:

$a = 1.500000$ ,  $c = 1.862831$ ,  $b = 1.869995$ , chyba

$|x^3 - x^2| = 0.007163 < 0,05$ , výpočet se zastaví:  $x^* \approx 1,862831 \pm 0,05$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

Kromě standardního předpokladu unimodálnosti funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  předpokládejme dále, že  $f$  je zde diferencovatelná. Nejjednodušší iterační optimalizační metodou využívající derivaci funkce  $f$  je **metoda bisekce**, čili půlení intervalů. Jestliže označíme bod, v němž funkce  $f$  nabývá svého minima na intervalu  $\langle a, b \rangle$  jako  $p$ , pak je  $f$  klesající na  $\langle a, p \rangle$  (tudíž zde platí  $f'(x) < 0$ ) a rostoucí na intervalu  $\langle p, b \rangle$  (tudíž zde platí  $f'(x) > 0$ ).

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

Kromě standartního předpokladu unimodálnosti funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  předpokládejme dále, že  $f$  je zde diferencovatelná. Nejjednodušší iterační optimalizační metodou využívající derivaci funkce  $f$  je **metoda bisekce**, čili půlení intervalů. Jestliže označíme bod, v němž funkce  $f$  nabývá svého minima na intervalu  $\langle a, b \rangle$  jako  $p$ , pak je  $f$  klesající na  $\langle a, p \rangle$  (tudíž zde platí  $f'(x) < 0$ ) a rostoucí na intervalu  $\langle p, b \rangle$  (tudíž zde platí  $f'(x) > 0$ ).

Vezmeme-li jako odhad bodu minima střed intervalu  $s = \frac{a+b}{2}$ , pak pro  $f'(s) < 0$  leží minimum vpravo, klademe tedy  $a^1 = s$  a pro  $f'(s) > 0$  leží minimum vlevo a klademe  $b^1 = s$ , druhý krajní bod zůstává (pokud  $f'(s) = 0$ , našli jsme přímo bod optima  $x^*$ ).

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

Kromě standartního předpokladu unimodálnosti funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  předpokládejme dále, že  $f$  je zde diferencovatelná. Nejjednodušší iterační optimalizační metodou využívající derivaci funkce  $f$  je **metoda bisekce**, čili půlení intervalů. Jestliže označíme bod, v němž funkce  $f$  nabývá svého minima na intervalu  $\langle a, b \rangle$  jako  $p$ , pak je  $f$  klesající na  $\langle a, p \rangle$  (tudíž zde platí  $f'(x) < 0$ ) a rostoucí na intervalu  $\langle p, b \rangle$  (tudíž zde platí  $f'(x) > 0$ ).

Vezmeme-li jako odhad bodu minima střed intervalu  $s = \frac{a+b}{2}$ , pak pro  $f'(s) < 0$  leží minimum vpravo, klademe tedy  $a^1 = s$  a pro  $f'(s) > 0$  leží minimum vlevo a klademe  $b^1 = s$ , druhý krajní bod zůstává (pokud  $f'(s) = 0$ , našli jsme přímo bod optima  $x^*$ ).

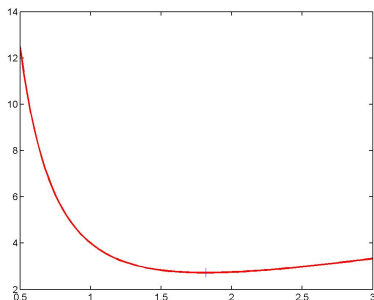
Výpočet se zastaví po stanoveném počtu kroků nebo klesne-li šířka intervalu pod  $2\varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je požadovaná přesnost. Lze ukázat, že pak stačí provést

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\log 2} \text{ iterací.}$$



# Jednorozměrná optimalizace - metoda bisekce, příklad

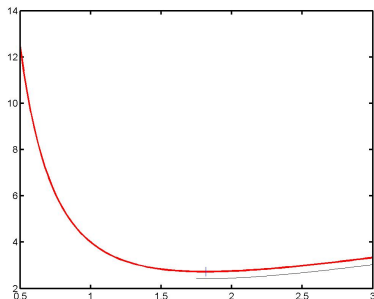
Ukažme si metodu opět pro minimalizaci funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ . Funkce má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ .



Graf funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $a = 0,5$ ;  $b = 3$ , svíslou čárou je znázorněno skutečné minimum  $x^* = \sqrt[3]{6} \approx 1,817120$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda bisekce, příklad

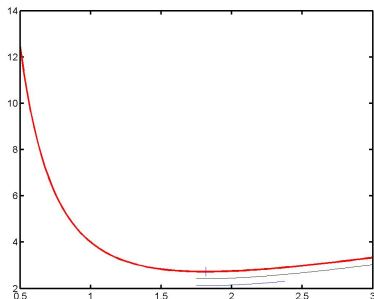
Ukažme si metodu opět pro minimalizaci funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ . Funkce má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ .



**1. krok:**  $s = 1.750000$ ,  $f'(s) = -0.119534 \Rightarrow$  nový interval bude:  
 $I^1 = \langle 1.750000, 3.000000 \rangle$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda bisekce, příklad

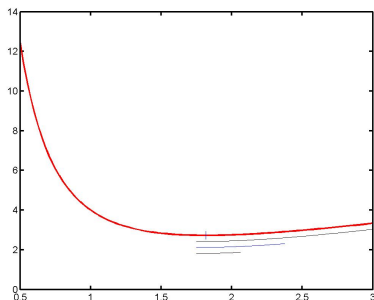
Ukažme si metodu opět pro minimalizaci funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ . Funkce má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ .



**2. krok:**  $s = 2.375000$ ,  $f'(s) = 0.552121 \Rightarrow$  nový interval bude:  
 $I^1 = \langle 1.750000, 2.375000 \rangle$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda bisekce, příklad

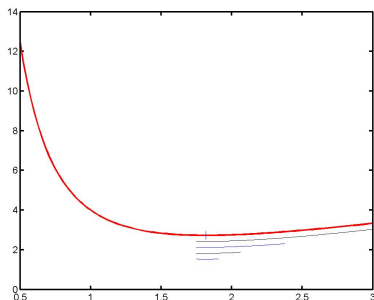
Ukažme si metodu opět pro minimalizaci funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ . Funkce má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ .



**3. krok:**  $s = 2.062500$ ,  $f'(s) = 0.316137 \Rightarrow$  nový interval bude:  
 $I^1 = \langle 1.750000, 2.062500 \rangle$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda bisekce, příklad

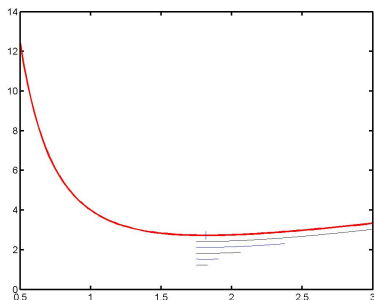
Ukažme si metodu opět pro minimalizaci funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ . Funkce má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ .



**4. krok:**  $s = 1.906250$ ,  $f'(s) = 0.133813 \Rightarrow$  nový interval bude:  
 $I^1 = \langle 1.750000, 1.906250 \rangle$

# Jednorozměrná optimalizace - metoda bisekce, příklad

Ukažme si metodu opět pro minimalizaci funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  na počátečním intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ . Funkce má derivaci  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ .



**5. krok:**  $s = 1.828125$ ,  $f'(s) = 0.017950 \Rightarrow$  nový interval bude:  
 $I^1 = \langle 1.750000, 1.828125 \rangle$ . protože šířka intervalu  $< \varepsilon$ , výpočet končí:  
 $x^* \approx 1.789063 \pm 0,05$

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

Další metoda hledá minimum jako kořen derivace. Nazývá se **Newtonova metoda** (též metoda tečen). Metoda využívá navíc i druhé derivace, předpokládejme tedy její existenci v každém bodě zadaného intervalu.

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

Další metoda hledá minimum jako kořen derivace. Nazývá se **Newtonova metoda** (též metoda tečen). Metoda využívá navíc i druhé derivace, předpokládejme tedy její existenci v každém bodě zadaného intervalu. Jak název napovídá, vedeme v bodě  $x_0$  tečnu ke grafu funkce  $f'(x)$  a jako následující odhad vezmeme průsečík této tečny s osou  $x$ . Rovnici tečny lze zapsat jako:  $y = f'(x_0) + f''(x_0) \cdot (x - x_0)$ . Položíme-li pravou stranu rovny

nule, spočteme odtud  $x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$



# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

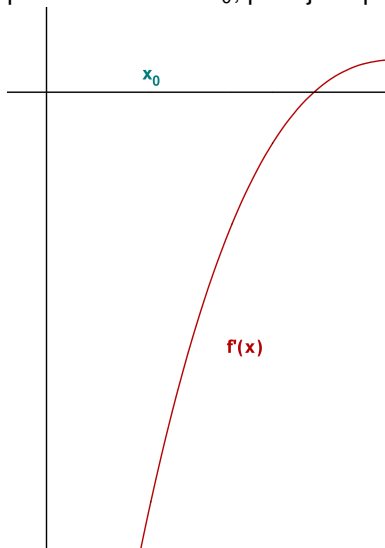
Další metoda hledá minimum jako kořen derivace. Nazývá se **Newtonova metoda** (též metoda tečen). Metoda využívá navíc i druhé derivace, předpokládejme tedy její existenci v každém bodě zadaného intervalu. Jak název napovídá, vedeme v bodě  $x_0$  tečnu ke grafu funkce  $f'(x)$  a jako následující odhad vezmeme průsečík této tečny s osou  $x$ . Rovnici tečny lze zapsat jako:  $y = f'(x_0) + f''(x_0) \cdot (x - x_0)$ . Položíme-li pravou stranu rovny

nule, spočteme odtud  $x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$

Tuto hodnotu označíme  $x_1$  a pokračujeme ve výpočtu až dokud není splněno  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ . Předností metody je její rychlost, značnou nevýhodou je ale fakt, že nekonverguje vždy. Ke konvergenci postačuje, aby na výchozím intervalu  $\langle a, b \rangle$  neměnila  $f''(x)$  ani  $f'''(x)$  znaménko a aby platilo  $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ . Důležité je též dobrá volba bodu  $x_0$ , doporučuje se volit tak, aby  $f'(x_0) \cdot f'''(x_0) > 0$ , jinak by  $x_1$  neležel v intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

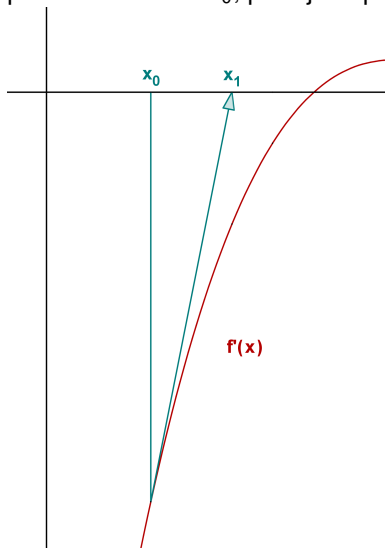
# Jednorozměrná optimalizace - Newtonova metoda

Geometrická interpretace je naznačena na obrázku, kde vidíme funkci  $f'(x)$  a počáteční iteraci  $x_0$ , poté jsou provedeny tři další iterace.



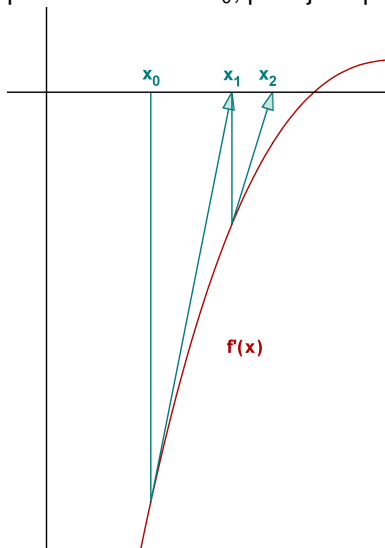
# Jednorozměrná optimalizace - Newtonova metoda

Geometrická interpretace je naznačena na obrázku, kde vidíme funkci  $f'(x)$  a počáteční iteraci  $x_0$ , poté jsou provedeny tři další iterace.



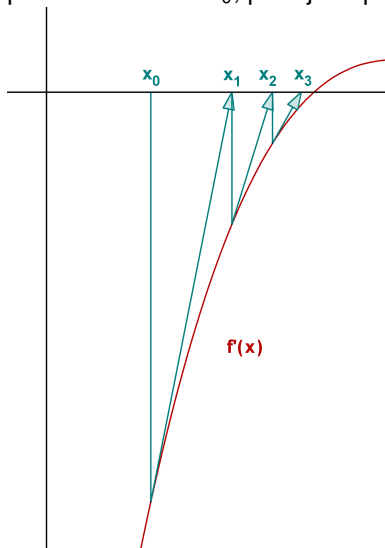
# Jednorozměrná optimalizace - Newtonova metoda

Geometrická interpretace je naznačena na obrázku, kde vidíme funkci  $f'(x)$  a počáteční iteraci  $x_0$ , poté jsou provedeny tři další iterace.



# Jednorozměrná optimalizace - Newtonova metoda

Geometrická interpretace je naznačena na obrázku, kde vidíme funkci  $f'(x)$  a počáteční iteraci  $x_0$ , poté jsou provedeny tři další iterace.



# Jednorozměrná optimalizace, Newtonova metoda, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0, 5; 3 \rangle$ .

# Jednorozměrná optimalizace, Newtonova metoda, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$ .

**Řešení:**  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ ,  $f''(x) = \frac{18}{x^4}$ .

Zvolme  $x_0 = 1.750000$  (1. aproximace z metody bisekce)

# Jednorozměrná optimalizace, Newtonova metoda, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$ .

**Řešení:**  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ ,  $f''(x) = \frac{18}{x^4}$ .

Zvolme  $x_0 = 1,750000$  (1. aproximace z metody bisekce)

**1.krok:**  $x_0 = 1,750000$ ,  $f'(x_0) = -0,119534$ ,  $f''(x_0) = -1,919200 \Rightarrow$   
 $x_1 = 1,812283$ ,  $|x_1 - x_0| = 0,062283$



# Jednorozměrná optimalizace, Newtonova metoda, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$ .

**Řešení:**  $f'(x) = 1 - \frac{6}{x^3}$ ,  $f''(x) = \frac{18}{x^4}$ .

Zvolme  $x_0 = 1,750000$  (1. aproximace z metody bisekce)

**1.krok:**  $x_0 = 1,750000$ ,  $f'(x_0) = -0,119534$ ,  $f''(x_0) = -1,919200 \Rightarrow$   
 $x_1 = 1,812283$ ,  $|x_1 - x_0| = 0,062283$

**2.krok:**  $x_1 = 1,812283$ ,  $f'(x_1) = -0,008029$ ,  $f''(x_1) = 1,668662 \Rightarrow$   
 $x_2 = 1,817095$ ,  $|x_2 - x_1| = 0,004812$ , výpočet končí:  $x^* \approx 1,817095 \pm 0,05$

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

V předchozí metodě potřebujeme v každém kroku spočítat jak první, tak druhou derivaci funkce v daném bodě. Jelikož výpočet derivace funkce nemusí být vždy snadný, nahrazuje se tzv. **poměrnou diferencí**:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

My tuto aproximaci provedeme pro druhou derivaci:

$$f''(x_k) \approx \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

V předchozí metodě potřebujeme v každém kroku spočítat jak první, tak druhou derivaci funkce v daném bodě. Jelikož výpočet derivace funkce nemusí být vždy snadný, nahrazuje se tzv. **poměrnou diferencí**:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

My tuto aproximaci provedeme pro druhou derivaci:

$$f''(x_k) \approx \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Nahradíme-li v iteračním vzorci Newtonovy metody druhou derivaci uvedenou aproximací, dostáváme:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_k)$$

Právě uvedený vzorec reprezentuje tzv. **metodu sečen**. K výpočtu jsou třeba dva počáteční body  $x_0, x_1$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metody využívající derivace

V předchozí metodě potřebujeme v každém kroku spočítat jak první, tak druhou derivaci funkce v daném bodě. Jelikož výpočet derivace funkce nemusí být vždy snadný, nahrazuje se tzv. **poměrnou diferencí**:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

My tuto aproximaci provedeme pro druhou derivaci:

$$f''(x_k) \approx \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

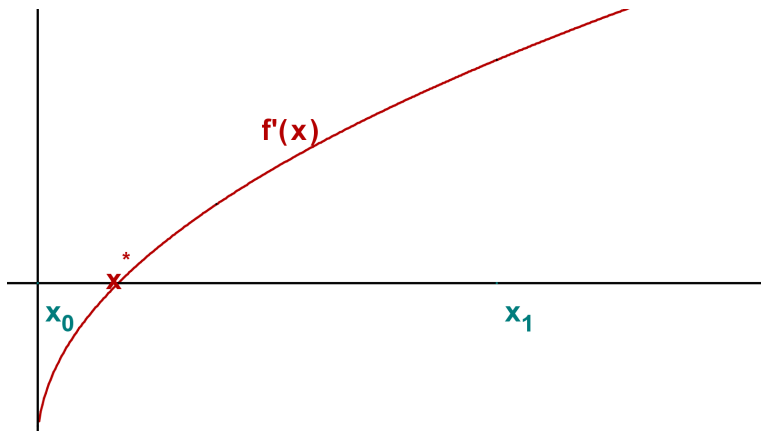
Nahradíme-li v iteračním vzorci Newtonovy metody druhou derivaci uvedenou aproximací, dostáváme:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_k)$$

Právě uvedený vzorec reprezentuje tzv. **metodu sečen**. K výpočtu jsou třeba dva počáteční body  $x_0, x_1$ . Tato metoda také není vždy konvergentní, lze ji však modifikovat tak, že do vzorce použijeme místo dvou po sobě jdoucích iterací body  $x_m, x_k$  s co největšími indexy, tak, aby platilo  $f'(x_m) \cdot f'(x_k) < 0$ . Tuto modifikaci nazýváme **metoda regula falsi**.

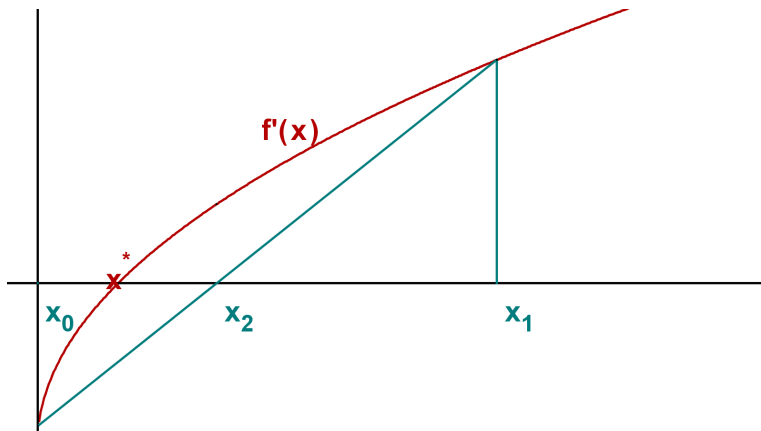
# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi

Zázorněme si metodu graficky, bod optima je  $x^*$  a počáteční iterace jsou  $x_0$ ,  $x_1$ , provedeme ještě další tři:



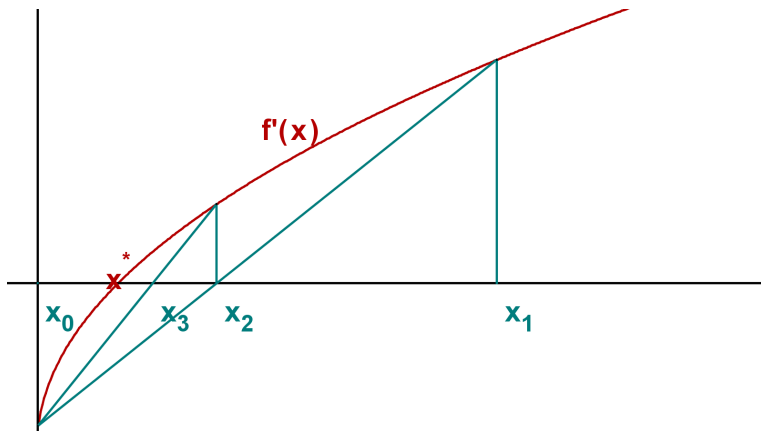
# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi

Zázorněme si metodu graficky, bod optima je  $x^*$  a počáteční iterace jsou  $x_0$ ,  $x_1$ , provedeme ještě další tři:



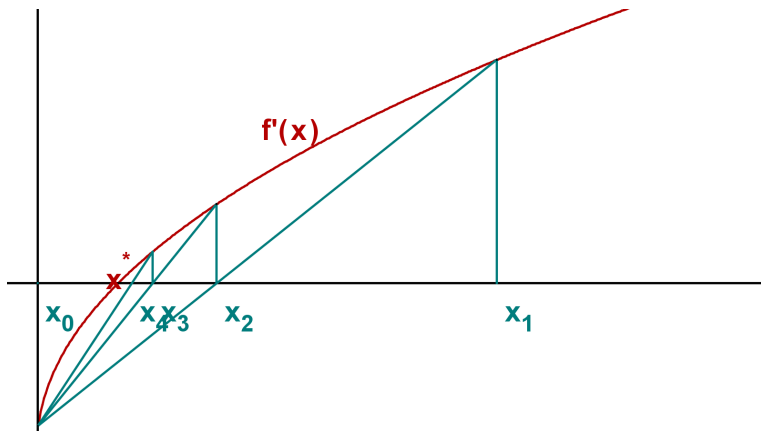
# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi

Zázorněme si metodu graficky, bod optima je  $x^*$  a počáteční iterace jsou  $x_0$ ,  $x_1$ , provedeme ještě další tři:



# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi

Zázorněme si metodu graficky, bod optima je  $x^*$  a počáteční iterace jsou  $x_0$ ,  $x_1$ , provedeme ještě další tři:





# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$ .

**Řešení:** Pro nalezení prvních dvou iterací můžeme použít např. metodu bisekce. Tedy:  $x_0 = 1,750000$ ,  $x_1 = 2,375000$ .

Ověříme, že  $f'(x_0)f'(x_1) = -0,119534 \cdot 0,552121 < 0$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0,5; 3 \rangle$ .

**Řešení:** Pro nalezení prvních dvou iterací můžeme použít např. metodu bisekce. Tedy:  $x_0 = 1,750000$ ,  $x_1 = 2,375000$ .

Ověříme, že  $f'(x_0)f'(x_1) = -0,119534 \cdot 0,552121 < 0$ .

**1.krok:**  $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f'(x_1) - f'(x_0)} f'(x_1) = 1,861230$ ,  $|x_2 - x_1| = 0,062283$

Protože  $f'(x_2) = 0,069426 > 0$ , použijeme dále  $x_0$  a  $x_2$ .

# Jednorozměrná optimalizace - metoda regula falsi, příklad

**Příklad:** Nalezněte minimum funkce  $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$  s přesností  $\varepsilon = 0,05$ , víte-li, že se nalézá v intervalu  $\langle 0, 5; 3 \rangle$ .

**Řešení:** Pro nalezení prvních dvou iterací můžeme použít např. metodu bisekce. Tedy:  $x_0 = 1,750000$ ,  $x_1 = 2,375000$ .

Ověříme, že  $f'(x_0)f'(x_1) = -0,119534 \cdot 0,552121 < 0$ .

**1.krok:**  $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f'(x_1) - f'(x_0)} f'(x_1) = 1,861230$ ,  $|x_2 - x_1| = 0,062283$

Protože  $f'(x_2) = 0,069426 > 0$ , použijeme dále  $x_0$  a  $x_2$ .

**2.krok:**  $x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_0}{f'(x_2) - f'(x_0)} f'(x_2) = 1,820363$ ,  $|x_3 - x_2| = 0,040867$ ,

výpočet končí:  $x^* \approx 1,820363 \pm 0,05$ .

## Numerické metody bez omezení

- Komparativní metody
- Gradientní metody
- Newtonova metoda a její modifikace
- Gaussova-Newtonova metoda
- Metody konjugovaných směrů
- Metoda konjugovaných gradientů
- Kvazi-newtonovské metody
- Simulované žíhání, genetické algoritmy, tabu search, atd.

## Numerické metody bez omezení

- Komparativní metody
- Gradientní metody
- Newtonova metoda a její modifikace
- Gaussova-Newtonova metoda
- Metody konjugovaných směrů
- Metoda konjugovaných gradientů
- Kvazi-newtonovské metody
- Simulované žíhání, genetické algoritmy, tabu search, atd.

## Numerické metody s omezením

- Metody přípustných směrů
- Metody aktivních množin
- Metoda projekce gradientu
- Metoda redukovaného gradientu
- Metody pokutových a bariérových funkcí
- Metody vnitřního bodu
- Sekvenční kvadratické programování

# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda cyklické záměny proměnných** převádí vícerozměrnou optimalizaci na posloupnost jednorozměrných optimalizačních úloh ve směru jednotlivých souřadnic: z výchozího bodu provádíme minimalizaci ve směru první souřadnice. Po nalezení lokálního extrému funkce  $f(\mathbf{x})$  ve směru

$\mathbf{s}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , pokračujeme ve směru druhé souřadnice

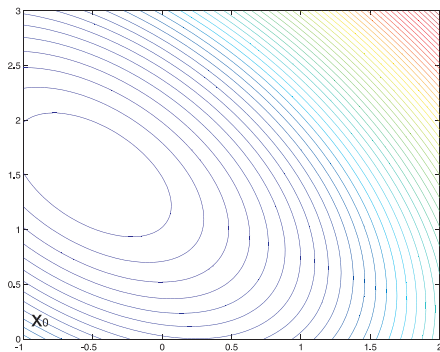
$\mathbf{s}_2 = (0, 1, \dots, 0)$  atd., až dostaneme první iteraci. Nevýhodou metody je pomalý výpočet, navíc není ani zaručena konvergence metody.

# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda cyklické záměny proměnných** převádí vícerozměrnou optimalizaci na posloupnost jednorozměrných optimalizačních úloh ve směru jednotlivých souřadnic: z výchozího bodu provádíme minimalizaci ve směru první souřadnice. Po nalezení lokálního extrému funkce  $f(\mathbf{x})$  ve směru

$\mathbf{s}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , pokračujeme ve směru druhé souřadnice

$\mathbf{s}_2 = (0, 1, \dots, 0)$  atd., až dostaneme první iteraci. Nevýhodou metody je pomalý výpočet, navíc není ani zaručena konvergence metody.



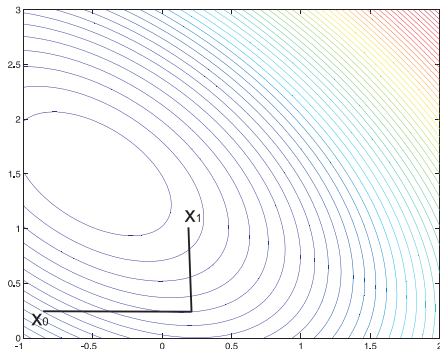


# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda cyklické záměny proměnných** převádí vícerozměrnou optimalizaci na posloupnost jednorozměrných optimalizačních úloh ve směru jednotlivých souřadnic: z výchozího bodu provádíme minimalizaci ve směru první souřadnice. Po nalezení lokálního extrému funkce  $f(\mathbf{x})$  ve směru

$\mathbf{s}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , pokračujeme ve směru druhé souřadnice

$\mathbf{s}_2 = (0, 1, \dots, 0)$  atd., až dostaneme první iteraci. Nevýhodou metody je pomalý výpočet, navíc není ani zaručena konvergence metody.

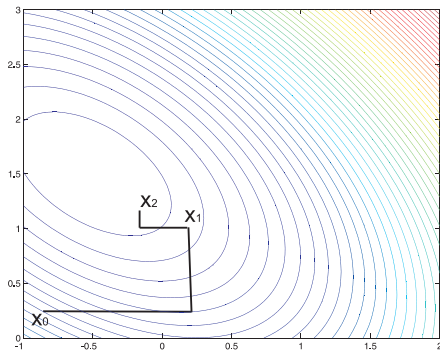


# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda cyklické záměny proměnných** převádí vícerozměrnou optimalizaci na posloupnost jednorozměrných optimalizačních úloh ve směru jednotlivých souřadnic: z výchozího bodu provádíme minimalizaci ve směru první souřadnice. Po nalezení lokálního extrému funkce  $f(\mathbf{x})$  ve směru

$\mathbf{s}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , pokračujeme ve směru druhé souřadnice

$\mathbf{s}_2 = (0, 1, \dots, 0)$  atd., až dostaneme první iteraci. Nevýhodou metody je pomalý výpočet, navíc není ani zaručena konvergence metody.

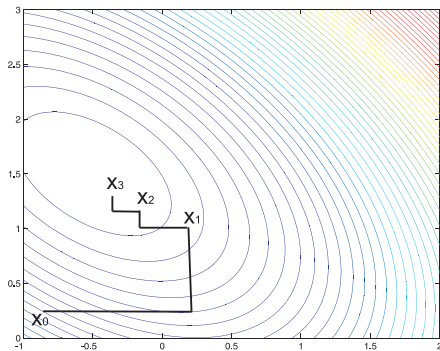


# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda cyklické záměny proměnných** převádí vícerozměrnou optimalizaci na posloupnost jednorozměrných optimalizačních úloh ve směru jednotlivých souřadnic: z výchozího bodu provádíme minimalizaci ve směru první souřadnice. Po nalezení lokálního extrému funkce  $f(\mathbf{x})$  ve směru

$\mathbf{s}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , pokračujeme ve směru druhé souřadnice

$\mathbf{s}_2 = (0, 1, \dots, 0)$  atd., až dostaneme první iteraci. Nevýhodou metody je pomalý výpočet, navíc není ani zaručena konvergence metody.



# Metoda cyklické záměny proměnných - příklad

Řešme následující úlohu z knihy V. Pánková, Nelineární optimalizace pro ekonomy: Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody cyklické záměny proměnných. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$ .

# Metoda cyklické záměny proměnných - příklad

Řešme následující úlohu z knihy V. Pánková, Nelineární optimalizace pro ekonomy: Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody cyklické záměny proměnných. Proveďte první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$ .

**Řešení:** Při postupu ve směru první proměnné optimalizujeme funkci  $f(x_1, 1) = -12 + 4x_1^2 + 4 + 4x_1$ , dostaneme  $x_1 = -\frac{1}{2}$ . Následně ve směru druhé proměnné minimalizujeme  $f(-\frac{1}{2}, x_2) = -12x_2 + 1 + 4x_2^2 - 2x_2$ , dostaneme  $x_2 = \frac{7}{4}$ .

# Metoda cyklické záměny proměnných - příklad

Řešme následující úlohu z knihy V. Pánková, Nelineární optimalizace pro ekonomy: Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí **metody cyklické záměny proměnných**. Proveďte první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$ .

**Řešení:** Při postupu ve směru první proměnné optimalizujeme funkci  $f(x_1, 1) = -12 + 4x_1^2 + 4 + 4x_1$ , dostaneme  $x_1 = -\frac{1}{2}$ . Následně ve směru druhé proměnné minimalizujeme  $f(-\frac{1}{2}, x_2) = -12x_2 + 1 + 4x_2^2 - 2x_2$ , dostaneme  $x_2 = \frac{7}{4}$ .

Dále postupujeme z bodu  $\mathbf{x}^1 = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})^\top$  ve směru první proměnné: minimalizujeme  $f(x_1, \frac{7}{4}) = -21 + 4x_1^2 + \frac{49}{4} + 7x_1$ , dostaneme  $x_1 = -\frac{7}{8}$ . Poté ve směru druhé proměnné: funkce  $f(-\frac{7}{8}, x_2) = -12x_2 + \frac{196}{64} + 4x_2^2 - \frac{7}{2}x_2$  nabývá minima pro  $x_2 = \frac{31}{16}$ .

# Metoda cyklické záměny proměnných - příklad

Řešme následující úlohu z knihy V. Pánková, Nelineární optimalizace pro ekonomy: Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí **metody cyklické záměny proměnných**. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$ .

**Řešení:** Při postupu ve směru první proměnné optimalizujeme funkci  $f(x_1, 1) = -12 + 4x_1^2 + 4 + 4x_1$ , dostaneme  $x_1 = -\frac{1}{2}$ . Následně ve směru druhé proměnné minimalizujeme  $f(-\frac{1}{2}, x_2) = -12x_2 + 1 + 4x_2^2 - 2x_2$ , dostaneme  $x_2 = \frac{7}{4}$ .

Dále postupujeme z bodu  $\mathbf{x}^1 = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})^\top$  ve směru první proměnné: minimalizujeme  $f(x_1, \frac{7}{4}) = -21 + 4x_1^2 + \frac{49}{4} + 7x_1$ , dostaneme  $x_1 = -\frac{7}{8}$ . Poté ve směru druhé proměnné: funkce  $f(-\frac{7}{8}, x_2) = -12x_2 + \frac{196}{64} + 4x_2^2 - \frac{7}{2}x_2$  nabývá minima pro  $x_2 = \frac{31}{16}$ .

Dostali jsme odhad  $\mathbf{x}^2 = (-\frac{7}{8}, \frac{31}{16})^\top$ , skutečné minimum nastává v bodě  $\mathbf{x}^* = (-1, 2)^\top$ .

# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda pravidelného a flexibilního simplexu:** Startuje vytvořením výchozího **simplexu** v zadaném prostoru (Simplexem v  $n$  - rozměrném prostoru rozumíme konvexní obal  $n + 1$  vrcholů v obecné poloze, tj. v rovině je to trojúhelník, v třírozměrném prostoru je to čtyřstěn atd.). Z vrcholů nahradíme ten s nejhorší hodnotou účelové funkce pomocí **reflexe** vzhledem k těžišti ostatních vrcholů novým vrcholem, čímž vznikne nový simplex, tj. další iterace. Metoda je heuristická, ale názorná a snadno implementovatelná.



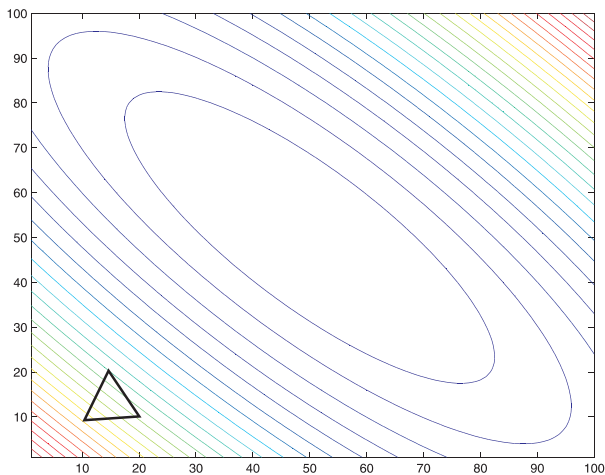
# Vícerozměrná optimalizace - Komparativní metody

**Metoda pravidelného a flexibilního simplexu:** Startuje vytvořením výchozího **simplexu** v zadaném prostoru (Simplexem v  $n$  - rozměrném prostoru rozumíme konvexní obal  $n + 1$  vrcholů v obecné poloze, tj. v rovině je to trojúhelník, v třírozměrném prostoru je to čtyřstěn atd.). Z vrcholů nahradíme ten s nejhorší hodnotou účelové funkce pomocí **reflexe** vzhledem k těžišti ostatních vrcholů novým vrcholem, čímž vznikne nový simplex, tj. další iterace. Metoda je heuristická, ale názorná a snadno implementovatelná.

Rychlost a přesnost nalezení optimálního bodu záleží na velikosti simplexu. Čím větší je simplex, tím se rychleji blížíme k optimu. Přesnost výpočtu naopak vyžaduje malou velikost simplexu. Proto je při výpočtu třeba měnit délku hrany simplexu. V **Nelder-Meadově metodě** se toto zajistí pomocí operací **expanze, kontrakce a redukce** základního simplexu.

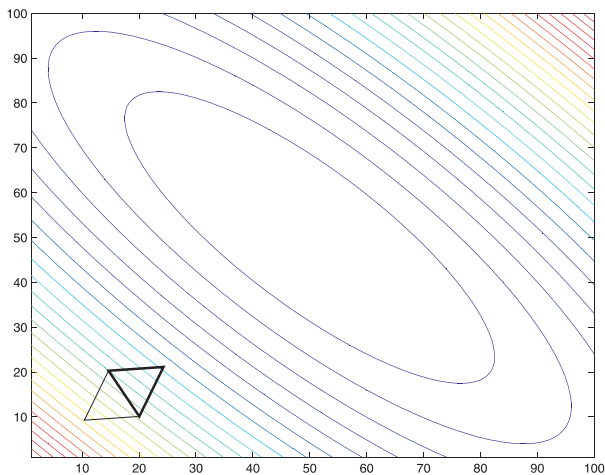
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



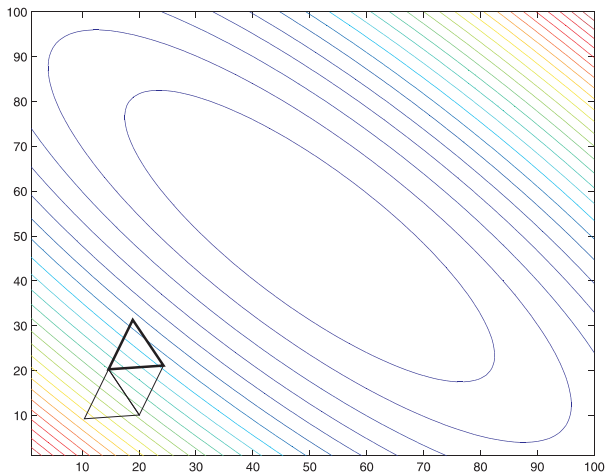
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



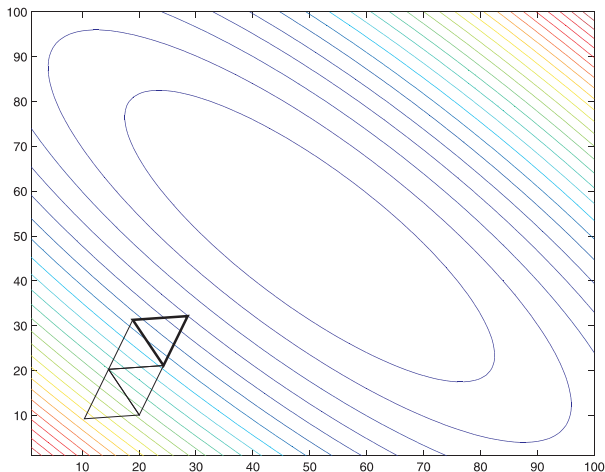
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



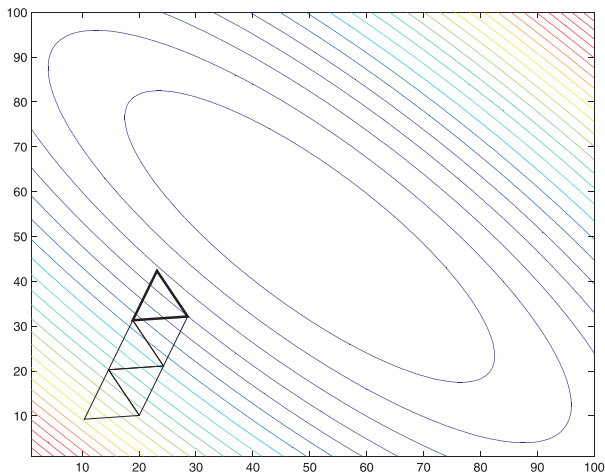
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



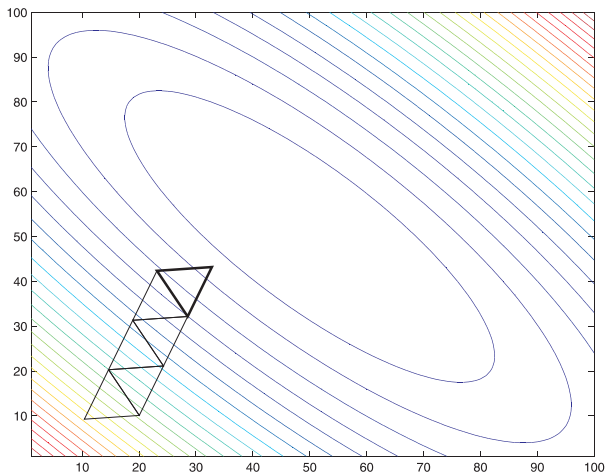
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



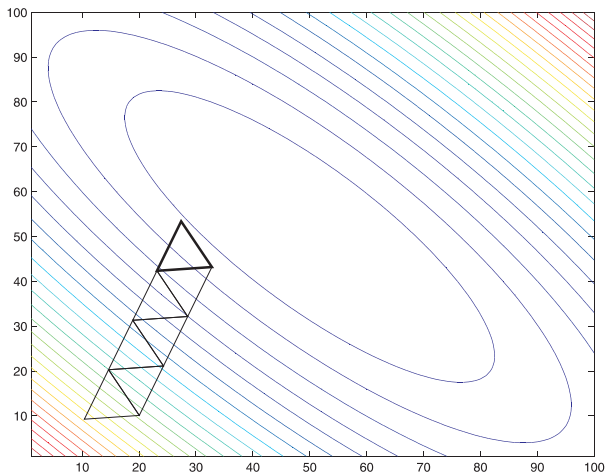
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

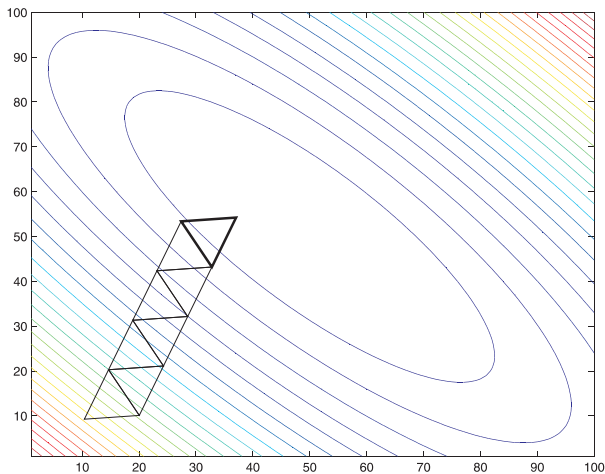
Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.





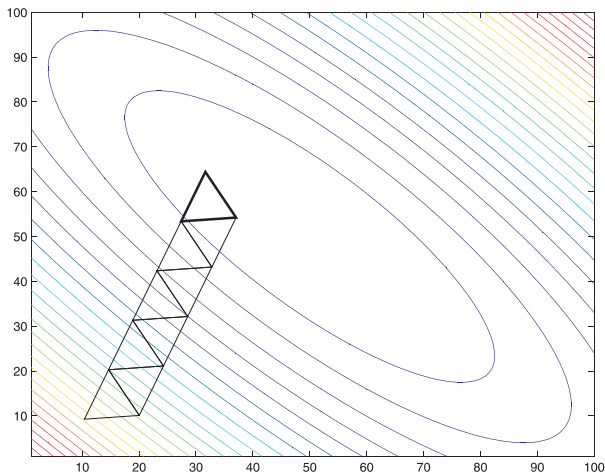
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



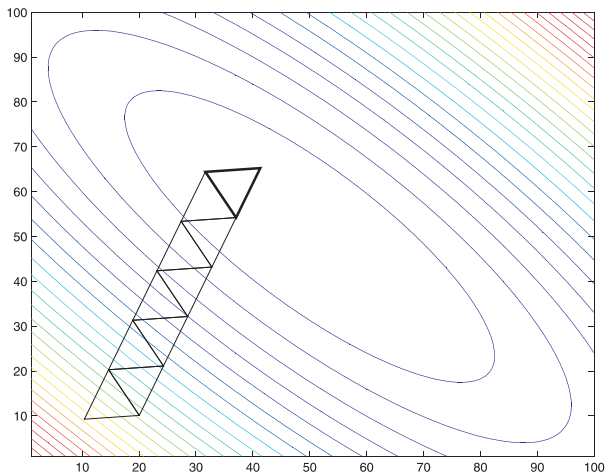
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



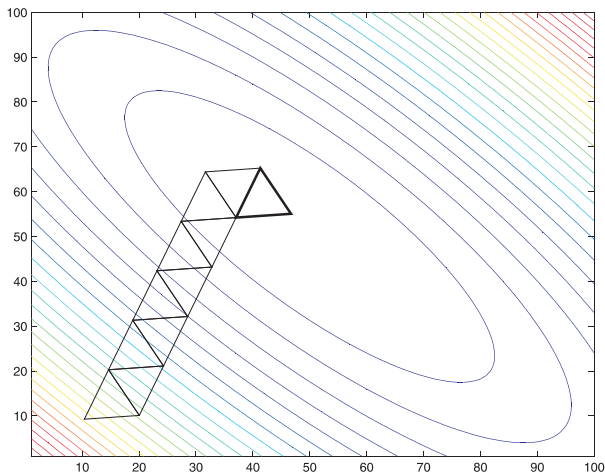
# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



# Vícerozměrná optimalizace - metoda pravidelného simplexu

Pro volbu pevné velikosti simplexu dosáhneme pouze omezené přesnosti.



# Vícerozměrná optimalizace - gradientní metody

K nejstarším a zároveň nejpoužívanějším přístupům vícerozměrné numerické optimalizace patří **gradientové metody**. Ukažme si obecný princip gradientové metody pro minimalizaci diferencovatelné funkce  $f(\mathbf{x})$  pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

- 1 urči výchozí bod  $\mathbf{x}^0$
- 2 urči gradient funkce  $f$  v tomto bodě:  $\nabla f(\mathbf{x}^0)$
- 3 přejdi z bodu  $\mathbf{x}^0$  do bodu  $\mathbf{x}^1$  ve směru "antigradientu"  $-\nabla f(\mathbf{x}^0)$  tak, aby  $f(\mathbf{x}^0) > f(\mathbf{x}^1)$ .
- 4 celý postup opakuj z bodu  $\mathbf{x}^1$ , atd. dokud není splněno pravidlo ukončení výpočtu

# Vícerozměrná optimalizace - gradientní metody

K nejstarším a zároveň nejpoužívanějším přístupům vícerozměrné numerické optimalizace patří **gradientové metody**. Ukažme si obecný princip gradientové metody pro minimalizaci diferencovatelné funkce  $f(\mathbf{x})$  pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

- 1 urči výchozí bod  $\mathbf{x}^0$
- 2 urči gradient funkce  $f$  v tomto bodě:  $\nabla f(\mathbf{x}^0)$
- 3 přejdi z bodu  $\mathbf{x}^0$  do bodu  $\mathbf{x}^1$  ve směru "antigradientu"  $-\nabla f(\mathbf{x}^0)$  tak, aby  $f(\mathbf{x}^0) > f(\mathbf{x}^1)$ .
- 4 celý postup opakuj z bodu  $\mathbf{x}^1$ , atd. dokud není splněno pravidlo ukončení výpočtu

Výpočet je možné ukončit:

- po provedení předem stanoveného počtu iterací
- pokud hodnota účelové funkce klesne o méně než předem stanovené  $\varepsilon$ , tedy  $f(\mathbf{x}^i) - f(\mathbf{x}^{i+1}) < \varepsilon$
- pokud vzdálenost dvou po sobě jdoucích iterací je menší než předem stanovené  $\varepsilon$ , tedy  $|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i+1}| < \varepsilon$ , kde symbolem  $|\cdot|$  rozumíme vzdálenost vycházející z euklidovské metriky dané vztahem  $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .

# Vícerozměrná optimalizace - gradientová metoda s pevným krokem

V obecném principu gradientových metod je třeba specifikovat, jak přecházet z bodu  $\mathbf{x}^i$  do bodu  $\mathbf{x}^{i+1}$ . Víme, že máme postupovat ve směru opačném ke gradientu, ale je třeba stanovit délku kroku. U gradientové **metody s pevným krokem** je stanovena počáteční délka iteračního kroku, označme ji  $\alpha$ . Dále se postupuje následovně:

Spočítáme  $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - \alpha \frac{\nabla f(\mathbf{x}^i)}{|\nabla f(\mathbf{x}^i)|}$ . Potom:

- je-li  $f(\mathbf{x}^{i+1}) < f(\mathbf{x}^i)$ , pak pokračujeme s další iterací
- jestliže nedošlo k poklesu účelové funkce, pak zmenšíme  $\alpha$  (zpravidla na polovinu), iteraci  $\mathbf{x}^{i+1}$  přepočítáme a dále už pokračujeme s novou hodnotou  $\alpha$ . Při tomto přístupu se nabízí možnost ukončit výpočet při splnění podmínky  $\alpha < \varepsilon$

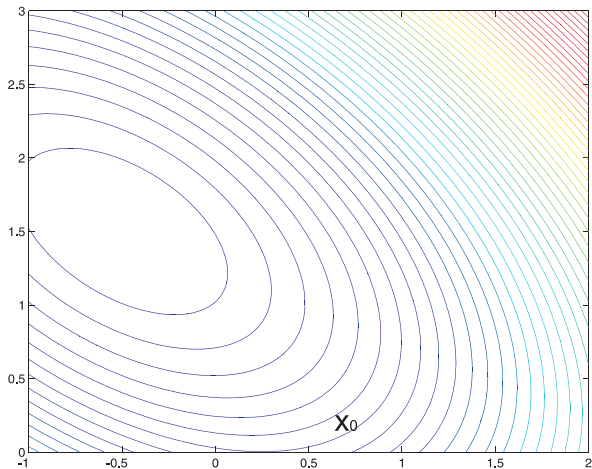
# Vícerozměrná optimalizace - gradientová metoda s pevným krokem

Znázorněme si postup metody graficky. V každé iteraci vycházíme ve směru kolmém k vrstevnicím.



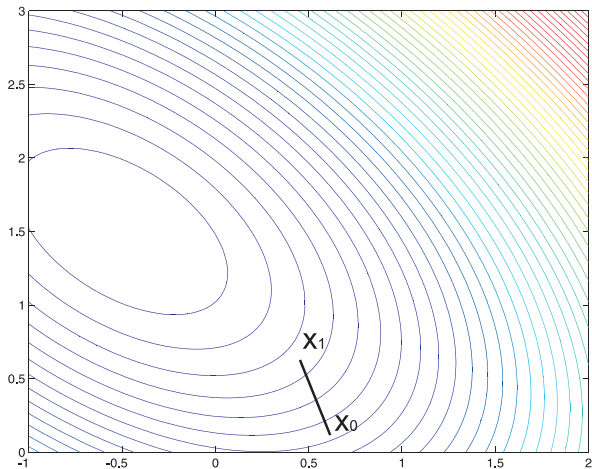
# Vícerozměrná optimalizace - gradientová metoda s pevným krokem

Znáznorněme si postup metody graficky. V každé iteraci vycházíme ve směru kolmém k vrstevnicím.



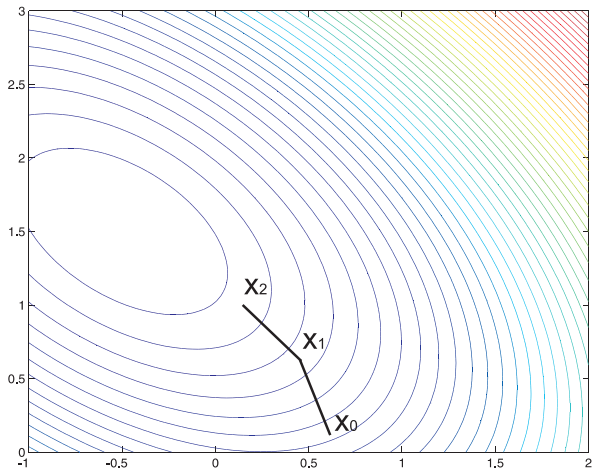
# Vícerozměrná optimalizace - gradientová metoda s pevným krokem

Znáznorněme si postup metody graficky. V každé iteraci vycházíme ve směru kolmém k vrstevnicím.



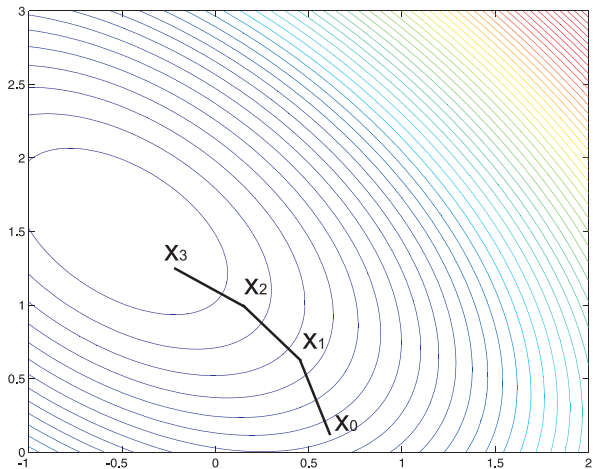
# Vícerozměrná optimalizace - gradientová metoda s pevným krokem

Znáznorněme si postup metody graficky. V každé iteraci vycházíme ve směru kolmém k vrstevnicím.



# Vícerozměrná optimalizace - gradientová metoda s pevným krokem

Znáznorněme si postup metody graficky. V každé iteraci vycházíme ve směru kolmém k vrstevnicím.



# Gradientová metoda s pevným krokem-příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody s pevným krokem  $\alpha = 0, 1$ . Proved'te první tři iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 1)^\top$ .

# Gradientová metoda s pevným krokem-příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody s pevným krokem  $\alpha = 0,1$ . Proved'te první tři iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 1)^\top$ .

**Řešení:** Spočteme gradient  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$  a vyčíslíme

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \alpha \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{|\nabla f(\mathbf{x}^0)|} = (0, 1)^\top - 0,1 \cdot (4, -4)^\top \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} = (-0.0707; 1.0707)^\top.$$

# Gradientová metoda s pevným krokem-příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody s pevným krokem  $\alpha = 0,1$ . Proved'te první tři iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 1)^\top$ .

**Řešení:** Spočteme gradient  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$  a vyčíslíme

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \alpha \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{|\nabla f(\mathbf{x}^0)|} = (0, 1)^\top - 0,1 \cdot (4, -4)^\top \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} = (-0.0707; 1.0707)^\top.$$

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \alpha \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}^1)}{|\nabla f(\mathbf{x}^1)|} = (-0.0707; 1.0707)^\top - 0,1 \cdot (3.7172; -3.7172)^\top \cdot \frac{1}{5.2569} = (-0.1414; 1.1414)^\top.$$

# Gradientová metoda s pevným krokem-příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody s pevným krokem  $\alpha = 0,1$ . Proved'te první tři iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 1)^\top$ .

**Řešení:** Spočteme gradient  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$  a vyčíslíme

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \alpha \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{|\nabla f(\mathbf{x}^0)|} = (0, 1)^\top - 0,1 \cdot (4, -4)^\top \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} = (-0.0707; 1.0707)^\top.$$

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \alpha \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}^1)}{|\nabla f(\mathbf{x}^1)|} = (-0.0707; 1.0707)^\top - 0,1 \cdot (3.7172; -3.7172)^\top \cdot \frac{1}{5.2569} = (-0.1414; 1.1414)^\top.$$

$$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 - \alpha \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}^2)}{|\nabla f(\mathbf{x}^2)|} = (-0.1414; 1.1414)^\top - 0,1 \cdot (3.4343; -3.4343)^\top \cdot \frac{1}{4.8569} = (-0.2121; 1.2121)^\top.$$



# Vícerozměrná optimalizace - metoda největšího spádu

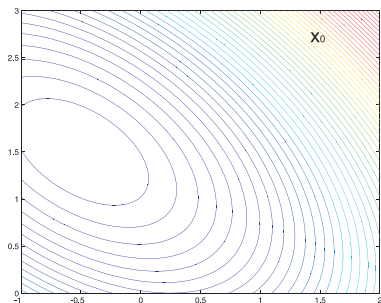
Narozdíl od předchozí metody je velikost iteračního kroku proměnlivá. Novou iteraci  $\mathbf{x}^{i+1}$  hledáme tak, že postupujeme z  $\mathbf{x}^i$  ve směru antigradientu tak dlouho, dokud účelová funkce klesá. Jinými slovy, zvolíme délku  $\alpha_i$  tak, aby hodnota  $f(\mathbf{x}^i - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^i))$  byla **minimální**. Tuto jednorozměrnou minimalizační úlohu můžeme řešit analyticky nebo numericky.

# Vícerozměrná optimalizace - metoda největšího spádu

Narozdíl od předchozí metody je velikost iteračního kroku proměnlivá. Novou iteraci  $\mathbf{x}^{i+1}$  hledáme tak, že postupujeme z  $\mathbf{x}^i$  ve směru antigradientu tak dlouho, dokud účelová funkce klesá. Jinými slovy, zvolíme délku  $\alpha_i$  tak, aby hodnota  $f(\mathbf{x}^i - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^i))$  byla **minimální**. Tuto jednorozměrnou minimalizační úlohu můžeme řešit analyticky nebo numericky. Metoda největšího spádu rychleji konverguje než metoda s pevným krokem, která navíc může být silně ovlivněna počáteční volbou  $\alpha$ . To se samozřejmě odráží i v časové výpočetní náročnosti výpočtu. Na druhou stranu metoda s pevným krokem může být snadnější na implementaci.

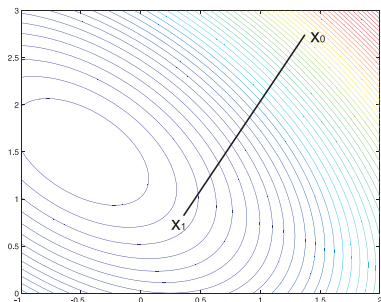
# Vícerozměrná optimalizace - metoda největšího spádu

Narozdíl od předchozí metody je velikost iteračního kroku proměnlivá. Novou iteraci  $\mathbf{x}^{i+1}$  hledáme tak, že postupujeme z  $\mathbf{x}^i$  ve směru antigradientu tak dlouho, dokud účelová funkce klesá. Jinými slovy, zvolíme délku  $\alpha_i$  tak, aby hodnota  $f(\mathbf{x}^i - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^i))$  byla **minimální**. Tuto jednorozměrnou minimalizační úlohu můžeme řešit analyticky nebo numericky. Metoda největšího spádu rychleji konverguje než metoda s pevným krokem, která navíc může být silně ovlivněna počáteční volbou  $\alpha$ . To se samozřejmě odráží i v časové výpočetní náročnosti výpočtu. Na druhou stranu metoda s pevným krokem může být snadnější na implementaci.



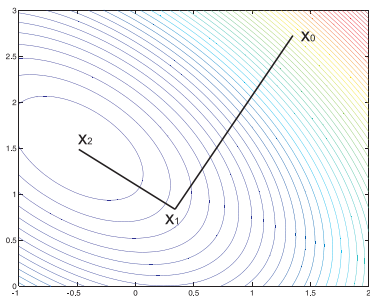
# Vícerozměrná optimalizace - metoda největšího spádu

Narozdíl od předchozí metody je velikost iteračního kroku proměnlivá. Novou iteraci  $\mathbf{x}^{i+1}$  hledáme tak, že postupujeme z  $\mathbf{x}^i$  ve směru antigradientu tak dlouho, dokud účelová funkce klesá. Jinými slovy, zvolíme délku  $\alpha_i$  tak, aby hodnota  $f(\mathbf{x}^i - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^i))$  byla **minimální**. Tuto jednorozměrnou minimalizační úlohu můžeme řešit analyticky nebo numericky. Metoda největšího spádu rychleji konverguje než metoda s pevným krokem, která navíc může být silně ovlivněna počáteční volbou  $\alpha$ . To se samozřejmě odráží i v časové výpočetní náročnosti výpočtu. Na druhou stranu metoda s pevným krokem může být snadnější na implementaci.



# Vícerozměrná optimalizace - metoda největšího spádu

Narozdíl od předchozí metody je velikost iteračního kroku proměnlivá. Novou iteraci  $\mathbf{x}^{i+1}$  hledáme tak, že postupujeme z  $\mathbf{x}^i$  ve směru antigradientu tak dlouho, dokud účelová funkce klesá. Jinými slovy, zvolíme délku  $\alpha_i$  tak, aby hodnota  $f(\mathbf{x}^i - \alpha \nabla f(\mathbf{x}^i))$  byla **minimální**. Tuto jednorozměrnou minimalizační úlohu můžeme řešit analyticky nebo numericky. Metoda největšího spádu rychleji konverguje než metoda s pevným krokem, která navíc může být silně ovlivněna počáteční volbou  $\alpha$ . To se samozřejmě odráží i v časové výpočetní náročnosti výpočtu. Na druhou stranu metoda s pevným krokem může být snadnější na implementaci.



# Metoda největšího spádu- příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody největšího spádu. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^\top$ .

# Metoda největšího spádu- příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody největšího spádu. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^\top$ .

**Řešení:** Víme, že  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$ . Minimalizujeme tedy funkci  $g_1(\alpha) = f(\mathbf{x}^0 - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0)) = f(0, 12\alpha) = -144\alpha + 576\alpha^2$ , dostaneme optimum pro  $\alpha = 0,125$ .

# Metoda největšího spádu- příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody největšího spádu. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^\top$ .

**Řešení:** Víme, že  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$ . Minimalizujeme tedy funkci  $g_1(\alpha) = f(\mathbf{x}^0 - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0)) = f(0, 12\alpha) = -144\alpha + 576\alpha^2$ , dostaneme optimum pro  $\alpha = 0,125$ .

Tedy  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^0 - 0,125 \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0) = (0; 1,5)^\top$ . Dále minimalizujeme funkci  $g_2(\alpha) = f(\mathbf{x}^1 - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}^1)) = f(-6\alpha; 1,5) = -9 - 36\alpha + 144\alpha^2$ , minimum opět nastává pro  $\alpha = 0,125$ .



# Metoda největšího spádu- příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody největšího spádu. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^\top$ .

**Řešení:** Víme, že  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$ . Minimalizujeme tedy funkci  $g_1(\alpha) = f(\mathbf{x}^0 - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0)) = f(0, 12\alpha) = -144\alpha + 576\alpha^2$ , dostaneme optimum pro  $\alpha = 0,125$ .

Tedy  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^0 - 0,125 \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0) = (0; 1,5)^\top$ . Dále minimalizujeme funkci  $g_2(\alpha) = f(\mathbf{x}^1 - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}^1)) = f(-6\alpha; 1,5) = -9 - 36\alpha + 144\alpha^2$ , minimum opět nastává pro  $\alpha = 0,125$ .

Tedy  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^1 - 0,125 \cdot \nabla f(\mathbf{x}^1) = (-0,75; 1,5)^\top$ . Dále bychom minimalizovali funkci  $g_3(\alpha) = f(\mathbf{x}^2 - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}^2)) = f(-0,75; 1,5 + 0,375\alpha)$ , atd.

# Vícerozměrná optimalizace - newtonovské metody

Podobně jako v jednorozměrném případě v **newtonovských metodách** funkci  $f(\mathbf{x})$  aproximujeme při přechodu z bodu  $\mathbf{x}_k$  kvadratickou funkcí, tedy Taylorovým polynomem

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^\top \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

a zapíšeme podmínku pro stacionární bod  $\nabla T_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , neboli

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.$$

# Vícerozměrná optimalizace - newtonovské metody

Podobně jako v jednorozměrném případě v **newtonovských metodách** funkci  $f(\mathbf{x})$  aproximujeme při přechodu z bodu  $\mathbf{x}_k$  kvadratickou funkcí, tedy Taylorovým polynomem

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^\top \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

a zapíšeme podmínku pro stacionární bod  $\nabla T_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , neboli

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.$$

Další iteraci  $\mathbf{x}_{k+1}$  dostaneme jako řešení této soustavy.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

# Vícerozměrná optimalizace - newtonovské metody

Podobně jako v jednorozměrném případě v **newtonovských metodách** funkci  $f(\mathbf{x})$  aproximujeme při přechodu z bodu  $\mathbf{x}_k$  kvadratickou funkcí, tedy Taylorovým polynomem

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^\top \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

a zapíšeme podmínku pro stacionární bod  $\nabla T_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , neboli

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top + H(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.$$

Další iteraci  $\mathbf{x}_{k+1}$  dostaneme jako řešení této soustavy.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - H(\mathbf{x}_k)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

Pokud startujeme daleko od minima, je kvadratická aproximace nepřesná a Hessova matice může být singulární nebo negativně definitní. Newtonova metoda pak nefunguje nebo vede k maximu. Proto se používají **modifikace Newtonovy metody**, například **Levenberg - Marquardtova metoda** nebo **trust region algoritmus**.

# Newtonovské metody - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí

**Newtonovy metody** . Proveďte první iteraci z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$  .

# Newtonovské metody - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí **Newtonovy metody**. Proved'te první iteraci z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^\top$ .

**Řešení:** Již známe gradient  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$ .

Spočteme Hessovu matici:  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ , její inverze je

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}.$$

# Newtonovské metody - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí **Newtonovy metody**. Proveďte první iteraci z bodu  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^\top$ .

**Řešení:** Již známe gradient  $\nabla f(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2, -12 + 4x_1 + 8x_2)^\top$ .

Spočteme Hessovu matici:  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ , její inverze je

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}.$$

Tedy můžeme spočítat první iteraci

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix} = (-1, 2)^\top.$$

Nalezli jsme přesně bod optima.

# Vícerozměrná optimalizace - metoda sdružených směrů

Metody **sdružených (konjugovaných) směrů** byly vyvinuty proto, aby urychlily konvergenci gradientních metod a vyhnuly se potížím spojeným s modifikací Newtonovy metody. Nejprve uveďme definici:

**Definice:** Vektory  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p$  jsou konjugované vzhledem k symetrické matici  $\mathbf{Q}$  tehdy, když platí  $\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s}_j = 0, \forall 1 \leq i, j \leq p, i \neq j$



# Vícerozměrná optimalizace - metoda sdružených směrů

Metody **sdružených (konjugovaných) směrů** byly vyvinuty proto, aby urychlily konvergenci gradientních metod a vyhnuly se potížím spojeným s modifikací Newtonovy metody. Nejprve uveďme definici:

**Definice:** Vektory  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p$  jsou konjugované vzhledem k symetrické matici  $\mathbf{Q}$  tehdy, když platí  $\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s}_j = 0, \forall 1 \leq i, j \leq p, i \neq j$

Pokud funkci  $f(\mathbf{x})$  optimalizujeme postupně ve směrech  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p$  konjugovaných vzhledem k Hessově matici  $\mathbf{H}$ , pro kvadratické funkce máme zajištěnu konvergenci pro  $p = n$ . Pro nekvadratické funkce je nutné metodu nejpozději po  $n + 1$  krocích nastartovat znovu. Metoda bohužel není konstruktivní, neříká, jak sdružené směry určit. V případě, že se směry generují z gradientů a dosavadního směru pohybu, dostaneme modifikaci známou jako **metoda sdružených gradientů**. Další modifikací je metoda paralelních tečen, **PARTAN**.

# Metoda sdružených směrů - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody konjugovaných směrů. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$  a jako výchozí směr vezměte  $\mathbf{s}_1 = (1, 0)$ .

# Metoda sdružených směrů - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody konjugovaných směrů. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$  a jako výchozí směr vezměte  $\mathbf{s}_1 = (1, 0)$ .

**Řešení:** Hessova matice je  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ . Směr  $\mathbf{s}_2 = (a, b)^\top$  je sdružený s  $\mathbf{s}_1$  vzhledem k matici  $\mathbf{H}$  pokud  $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_2 = 8a + 4b = 0$ . To je splněno například pro  $a = 1$ ,  $b = -2$ .

# Metoda sdružených směrů - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody konjugovaných směrů. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$  a jako výchozí směr vezměte  $\mathbf{s}_1 = (1, 0)$ .

**Řešení:** Hessova matice je  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ . Směr  $\mathbf{s}_2 = (a, b)^\top$  je sdružený s  $\mathbf{s}_1$  vzhledem k matici  $\mathbf{H}$  pokud  $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_2 = 8a + 4b = 0$ . To je splněno například pro  $a = 1$ ,  $b = -2$ .

Začneme minimalizaci z  $\mathbf{x}^0$  ve směru  $\mathbf{s}_1$ :  $g_1(\alpha) = f(1 + \alpha, 1) = 12\alpha + 4\alpha^2$ , což je minimální pro  $\alpha = -\frac{3}{2}$ , takže  $\mathbf{x}^1 = (-\frac{1}{2}, 1)^\top$ .

# Metoda sdružených směrů - příklad

Hledejte minimum funkce  $f(x_1, x_2) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x^2 + 4x_1x_2$  pomocí metody konjugovaných směrů. Proved'te první dvě iterace z bodu  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^\top$  a jako výchozí směr vezměte  $\mathbf{s}_1 = (1, 0)$ .

**Řešení:** Hessova matice je  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ . Směr  $\mathbf{s}_2 = (a, b)^\top$  je sdružený s  $\mathbf{s}_1$  vzhledem k matici  $\mathbf{H}$  pokud  $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_2 = 8a + 4b = 0$ . To je splněno například pro  $a = 1, b = -2$ .

Začneme minimalizací z  $\mathbf{x}^0$  ve směru  $\mathbf{s}_1$ :  $g_1(\alpha) = f(1 + \alpha, 1) = 12\alpha + 4\alpha^2$ , což je minimální pro  $\alpha = -\frac{3}{2}$ , takže  $\mathbf{x}^1 = (-\frac{1}{2}, 1)^\top$ .

Pokračujeme minimalizací z  $\mathbf{x}^1$  ve směru  $\mathbf{s}_2$ :  
 $g_2(\alpha) = f(-\frac{1}{2} + \alpha, 1 - 2\alpha) = 9 + 12\alpha + 12\alpha^2$ , což je minimální pro  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , takže  $\mathbf{x}^2 = (-1, 2)^\top$ . Nalezli jsme přesně optimum funkce.

# Vícerozměrná optimalizace - kvazi-newtonovské metody a Gauss-Newtonova metoda

**Kvazi-newtonovské metody** jsou gradientní metody, které leží někde mezi metodou nejrychlejšího spádu a Newtonovou metodou a snaží se využít předností obou metod. Gradientní metody mají zaručenou konvergenci a Newtonova metoda v okolí optima konverguje rychle. Newtonova metoda ale vyžaduje výpočet Hessianovy matice, respektive její inverze. Aproximujeme-li tyto matice na základě dat z jednotlivých kroků iteračního algoritmu, dostaneme metodu **Broydena, Fletchera, Goldfarba a Shannoa (BFGS)** nebo metodu **Davidona, Fletchera a Powella (DFP)**.

# Vícerozměrná optimalizace - kvazi-newtonovské metody a Gauss-Newtonova metoda

**Kvazi-newtonovské metody** jsou gradientní metody, které leží někde mezi metodou nejrychlejšího spádu a Newtonovou metodou a snaží se využít předností obou metod. Gradientní metody mají zaručenou konvergenci a Newtonova metoda v okolí optima konverguje rychle. Newtonova metoda ale vyžaduje výpočet Hessianovy matice, respektive její inverze. Aproximujeme-li tyto matice na základě dat z jednotlivých kroků iteračního algoritmu, dostaneme metodu **Broydena, Fletchera, Goldfarba a Shannoa (BFGS)** nebo metodu **Davidona, Fletchera a Powella (DFP)**.

**Gaussova-Newtonova metoda** řeší problém minimalizace kritéria ve tvaru nejmenších čtverců nelineární funkce.

# Vícerozměrná optimalizace - kvazi-newtonovské metody a Gauss-Newtonova metoda

**Kvazi-newtonovské metody** jsou gradientní metody, které leží někde mezi metodou nejrychlejšího spádu a Newtonovou metodou a snaží se využít předností obou metod. Gradientní metody mají zaručenou konvergenci a Newtonova metoda v okolí optima konverguje rychle. Newtonova metoda ale vyžaduje výpočet Hessianovy matice, respektive její inverze. Aproximujeme-li tyto matice na základě dat z jednotlivých kroků iteračního algoritmu, dostaneme metodu **Broydena, Fletchera, Goldfarba a Shannoa (BFGS)** nebo metodu **Davidona, Fletchera a Powella (DFP)**.

**Gaussova-Newtonova metoda** řeší problém minimalizace kritéria ve tvaru nejmenších čtverců nelineární funkce.

Na závěr ještě podotkněme, že metody obecně nejsou globálně konvergentní, doporučuje se tedy optimalizaci spustit vícekrát z různých počátečních bodů. Stále jsou vyvíjeny nové algoritmy, z modernějších metod můžeme zmínit **simulované žíhání, genetické algoritmy, tabu search**, atd.



- Fletcher, Roger: Practical methods of optimization, 1st ed., Chichester : John Wiley and Sons, 1987.
- Šubrt, Tomáš a kol.: Ekonomicko-matematické metody, Plzeň : Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2011
- Pánková, Václava: Nelineární optimalizace pro ekonomy, 1. vyd., Praha : Professional Publishing, 2003
- Intriligator, Michael D.: Mathematical optimization and economic theory, Philadelphia : Siam, 2002
- Jablonský, Josef, Petr Fiala, Miroslav Maňas: Vícekriteriální rozhodování, 1. vyd., Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze, 1994.
- Klapka, Jindřich, Jiří Dvořák, Pavel Popela Metody operačního výzkumu, Vyd. 2., Brno : VUTIUM, 2001
- Klein, Michael W.: Mathematical methods for economics, 2nd ed., Boston : Addison-Wesley, c2002
- JABLONSKÝ, Josef: Operační výzkum : kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování, 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2002
- PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav ŽIŽKA: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování, Vyd. 2. Plzeň: Západočeská univerzita, 2010
- GROS, Ivan: Kvantitativní metody v manažerském rozhodování, 1. vyd. Praha: Grada, 2003