MUNI
ECON

Reálný úrok v procesu diskrétního a spojitého úročení.

Efektivní úroková míra

– Jak velká roční nominální míra při ročním skládání odpovídá roční nominální míře při denním, měsíčním nebo jiném skládání.

$$i_{efekt} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1$$

kde *i efekt*… roční efektivní úroková míra,
i… roční nominální úroková míra,
m … četnost skládání úroků.

Frekvence úročení:

p.a. = roční (*per annum*)

p.s. = pololetní (*per semestre*)

p.q. = čtvrtletní (*per quartale*)

p.m. = měsíční (*per mensem*)

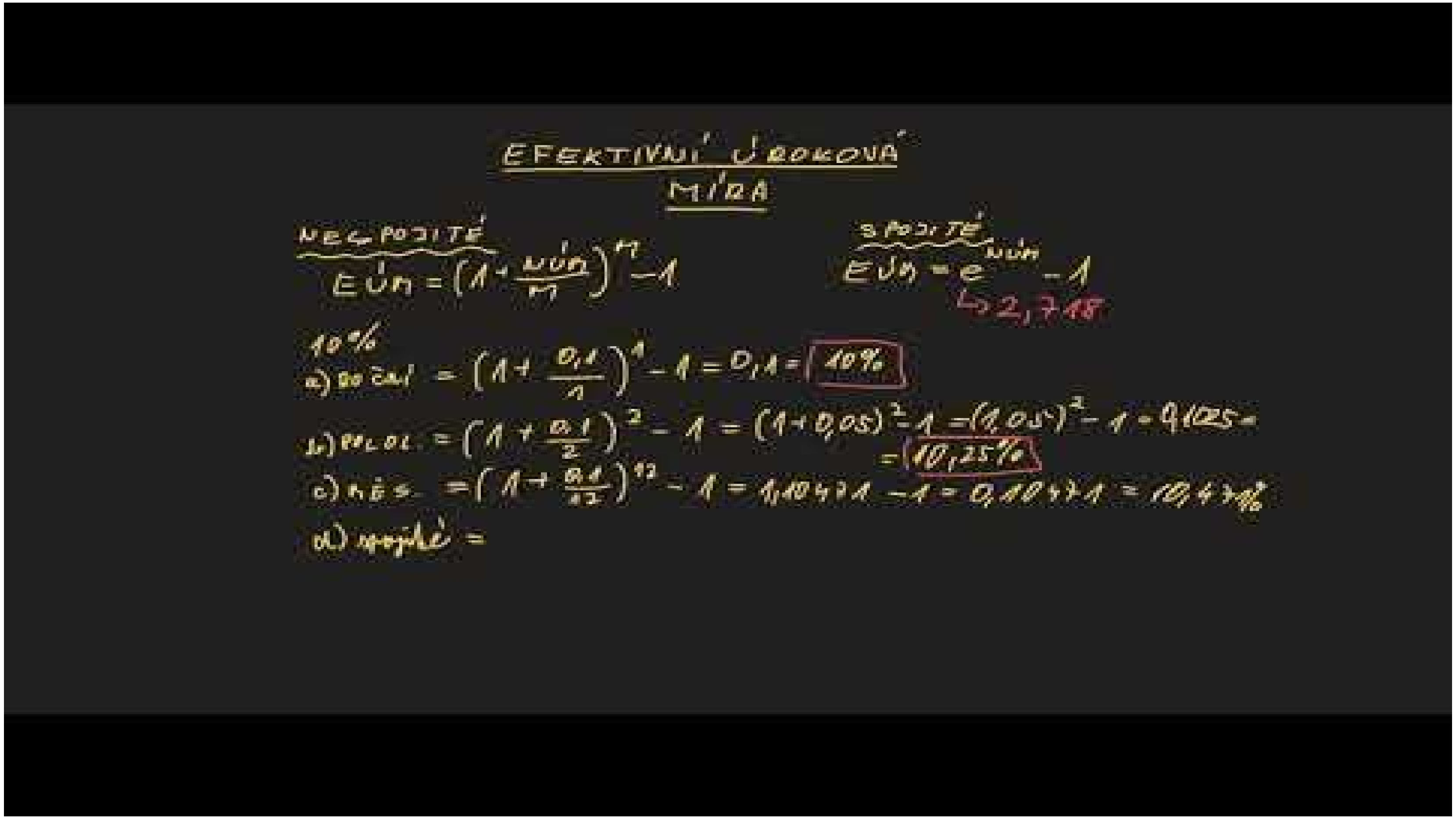
p.sept. = týdně (*per septimanam*)

p.d. = denně (*per diem*)

Lze i častěji?

MUNI ECON

Jak to funguje?



Spojité úročení

Vysvětlení:

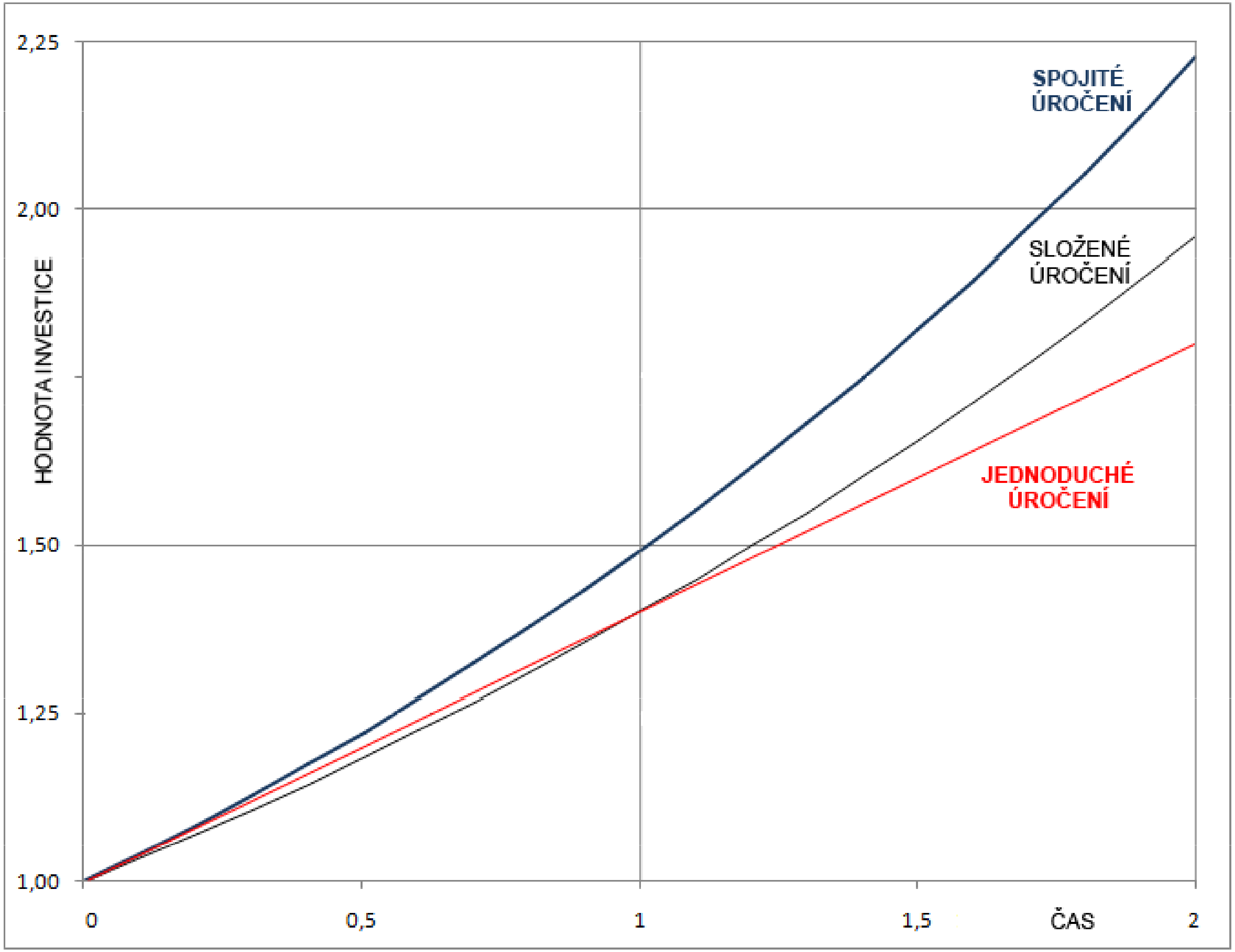
- Počet úrokovacích období se blíží nekonečnu
- Délka úrokovacích období se blíží nule
- Efektivní úroková sazba = úroková intenzita

$$f = ln(1 + r_{ef}) \longleftrightarrow r_{ef} = e^{f} - 1$$

f = úroková intenzita
r_{ef} = efektivní úroková sazba
t = čas v letech

$$\boxed{FV = PV \times e^{f \times t}}$$

MUNI ECON


2,25
2,00
1,50
1,25
1,00
HODNOTA INVESTICE
0
0,5
1
1,5
ČAS
2
SPOJITÉ ÚROČENÍ
SLOŽENÉ ÚROČENÍ
JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ

MUNI
ECON

Vzorový příklad – spojité úročení

Jaká bude reálná hodnota kapitálu z vkladu 500 000 Kč, který necháte po dobu 3 let úročit měsíčním připisováním úroků? Úroková sazba, kterou finanční ústav poskytuje je 3,8 % p. a. Dále víte, že měsíční odhad inflace je 0,2 %.

Řešte předchozí příklad, se stejným dopadem na kapitál, pokud úročení i inflace budou spojité. Řešte taky za předpokladu, že sazby zůstávají stejné, jenom **proces je spojitý.**

Vzorový příklad – řešení 1. polovina

$FV_r = ?$

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

ú.o. = 1 měsíc = 12/rok

r = 3,8 % p. a.

$\text{inflace}_m = 0{,}2\ \% = \pi_m$

Nominální zhodnocení:

$$\boldsymbol{FV = \left(500\ 000\ \times (1 + 0,00317\ )^{12\times 3}\right)}$$
$$\boldsymbol{= 560275,1367}$$

1. Jaká je reálná měsíční úroková míra?

a) diskontuji úrokovou míru inflací:

$$\mathbf{r_{r\_m}} = \left(\frac{1 + r_m}{1 + \pi_m}\right) - 1 = \frac{1 + \frac{0{,}038}{12}}{1 + 0{,}002} - 1 = \mathbf{0{,}1164\%}$$

b) Fisherova rovnice

$$\mathbf{r_{r\_m}} = \left(\frac{r_m - \pi_m}{1 + \pi_m}\right) = \frac{\frac{0{,}038}{12} - 0{,}002}{1 + 0{,}002} = \mathbf{0{,}1164\%}$$

2. Jaká bude reálná hodnota kapitálu?

MUNI ECON

Vzorový příklad – 2. polovina

Řešte předchozí příklad, se stejným dopadem na kapitál, pokud úročení i inflace budou spojité = **s jakou úrokovou intenzitou dosáhnu stejného zhodnocení?**

Řešte za předpokladu, že sazby zůstávají stejné, jenom proces je spojitý = **zadané hodnoty pro inflaci a úrokovou sazbu pouze dosadím do spojitého procesu.**

Vzorový příklad – řešení 2. polovina, a)

$PV = 500\,000$ Kč

$t = 3$ roky

$\text{inflace}_m = 0{,}2\,\%$; $r = 3{,}8\,\%$ p. a. (12 ú.o.)

$FV_r = ? = FV_{r\,(1)}$

spojité úročení = ∞ ú.o./ rok

f_r **= ?**

1. Jaká je reálná úroková intenzita?

$$r_{r\_m} = \left(\frac{1 + r_{\ m}}{1 + \pi_m}\right) - 1 = \frac{1 + 0{,}038/12}{1 + 0{,}002} - 1 = \mathbf{\mathit{0{,}116434\%}}$$

a) přes měsíční reálnou úrokovou sazbu

$$f_r(m) = ln\left(1 + r_{r\_m}\right) = 0{,}116366\%$$

b) Přes efektivní reálnou úrokovou sazbu

$$f_r(rok) = ln\left(1 + r_{ef}\right) = \ln(1 + r\quad)^{12} = \mathbf{\mathit{1{,}396\%}}$$

2. Jaká bude reálná hodnota kapitálu?

$$FV_r = PV \times e^{f \times m \times t}$$

$$FV_r = PV \times e^{f \times t}$$

$$FV_r = (500\,000 \times e^{0{,}01396\,\times 3})$$

$$\boldsymbol{FV_r = 521390{,}81\ K\check{c}}$$

MUNI ECON

Vzorový příklad – řešení 2. polovina, b)

b) Pouze spojitý proces

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

FV_r = ?

spojité úročení = ∞ ú.o./ rok

r = 3,8 % p. a. = **f**

inflace $_m$ = 0,2 % = f(π)

$$FVr = PV\left(\frac{r_{ef}+1}{\pi_{ef}+1}\right)^t = PV\left(\frac{e^{f(rok)\times t}}{e^{\pi(rok)\times t}}\right)$$

$$FVr = PV\left(\frac{e^{r\times t}}{e^{\pi\times m\times t}}\right) = 500\,000 \times \left(\frac{e^{0,038\times 3}}{e^{0,002\times 12\times 3}}\right)$$

$$FV_r = 521447,2394$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 1

Zjistěte nominální úrokovou sazbu s počtem konverzí 4, pokud víte, že kapitál vzrostl z 500 000 Kč na 768 000 Kč během 8 let při spojitém úročení = sazbu, kterou by banka inzerovala jako p. a. s kvartálním úrokovým obdobím při stejném zhodnocení. Ve výpočtu využijte úrokovou intenzitu.

Socrative room name: ABCDE

Příklad Socrative 1 - řešení

- PV = 500 000
- FV = 768 000
- t = 8
- Úročení spojité
- r_{nom} = ? p. a.
- m = 4 = „kvartální úročení“

1. $f = \frac{ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{t} = 0{,}053647704 = 5{,}36\ \%$
2. $r_{ef} = e^{f} - 1 = 0{,}05511 = 5{,}511\ \%$
3. $r_{nom} = \left((1 + r_{ef})^{\frac{1}{4}} - 1\right) \times 4 = 0{,}054009$

$$r_{nom} = 5{,}4009\ \%$$

MUNI ECON

Prezentace příkladů

- Tým 5
- Tým 6
- Tým 7

Příklad Socrative 2

Která úroková sazba je nejvýhodnější?

a) 15 % p. a. s ročním připsáním úroků

b) 1,24 % p. m. s půlročním připsáním úroků

c) 14,8 % p. a. s čtvrtletním připsáním úroků

d) 3,675 % p. q. s měsíčním připsáním úroků

e) 7,3 % p. s. ve spojitém úročení

Socrative room name: FIMA

Příklad Socrative 2 - řešení

Efektivní úroková sazba:

a) $r_{ef} = r$

b) $r_{ef} = (1 + r \times 6)^2 - 1$

c) $r_{ef} = (1 + \frac{r}{4})^4 - 1$

d) $r_{ef} = (1 + \frac{r}{3})^{12} - 1$

e) $r_{ef} = e^f - 1$

zadání	r(x)	p. a.	r_{ef}
15 % p. a. roční připsání úroků	0,15	15,0%	15,00%
1,24 % p. m. půlroční připsání úroků	0,0124	14,9%	15,43%
14,8 % p. a. čtvrtletní připsání úroků	0,148	14,8%	15,64%
3,675 % p. q. měsíční připsání úroků	0,03675	14,7%	**15,73%**
7,3 % p. s. spojité úročení	0,073	14,6%	15,13%

MUNI ECON

Příklad Socrative 3

Vybrali jste si spořící účet s nabídkou 3,68 % p. q. s měsíčním připsáním úroků a vložili jste na něj 300 000. Po prvním roce jste se ale rozhodli, že využijete konkurenční nabídky, která vám umožnila úročit prostředky sazbou 8 % p. s. ve spojitém úročení. Kolik za další 2 roky získáte prostředků, jestliže víte, že se při výběru platí jednorázová 15 % daň = jaká je FV(3 roky) netto?

Zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

MUNI ECON

Příklad Socrative 3 - řešení

PV	300 000 Kč
r(1)	3,68% p. q.
m(1)	12
t(1)	1
t(2)	2
r(2)	8% p. s.
m(2)	nekonečno
Tax	15%
FV(1)	347196
FV2()	472356
FV netto	448576

1. **Jaká je FV za první rok = na prvním účtu?**

$$FV(1) = PV\left(1+\frac{r}{3}\right)^{m\times t} = 300\,000\,(1+\frac{0{,}0368}{3})^{12\times 1} = 347\,196$$

2. **Jaká je FV na konci spoření = po dalších dvou letech za nových podmínek?**

$$FV(2) = FV(1)\times e^{f\times 2\times t} = 348196\ \times e^{\ln(1+0{,}08)\times 2\times 2} = 472\,356{,}289$$

3. **Jak vysoká je daň?**

$$Tax = 0{,}15\times(FV(2)-PV) = 0{,}15\times(472\,356{,}289 - 300\,000) = 25853{,}44$$

4. **Kolik prostředků získáme?**

$$\textbf{FV netto} = 472\,356{,}289 - 25853{,}44 = 448\,575{,}8$$

V jednom vzorci:

$$FV\ netto = \mathbf{300\,000}\times\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{0,0368}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{12}}\times e^{ln(1+0{,}08)\times 2\times 2} - 0{,}15\times(\mathbf{300\,000}\times\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{0,0368}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{12\times 1}}\times e^{ln(1+0{,}08)\times 2\times 2} - 300\,000)$$

$$\textbf{FV netto} = 300\,000\times\left(1+\frac{0{,}0368}{3}\right)^{12}\times e^{\ln(1+0{,}08)\times 2\times 2}\times 0{,}85 + 0{,}15\times 300\,000)$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 4

Pokračujte v předešlém příkladu: kolik reálně získáte, jestliže předpokládáte, že roční inflace (dnes 3 %) každý rok o 10 % skokově vzroste, přičemž inflace působí na prostředky spojitě?

Vybrali jste si spořící účet s nabídkou 3,68 % p. q. s měsíčním připsáním úroků a vložili jste na něj 300 000. Po prvním roce jste se ale rozhodli, že využijete konkurenční nabídky, která vám umožnila úročit prostředky sazbou 8 % p. s. ve spojitém úročení. Kolik za další 2 roky získáte prostředků, jestliže víte, že se při výběru platí jednorázová 15 % daň?

Příklad Socrative 4 - řešení

FV netto	**448 576**
Inflace t(1)	**3%**
Inflace t(2)	**0,033**
Inflace t(3)	**0,0363**
FV(netto_real)	**406 829,8627**

1. **Zjistíme inflační intenzity**

$$f(\pi_1) = ln(1+\pi_1) = ln(1{,}03) = 0{,}029558802$$
$$f(\pi_2) = ln(1+\pi_2) = ln(1{,}033) = 0{,}03246719$$
$$f(\pi_3) = ln(1+\pi_3) = ln(1{,}0363) = 0{,}0356567$$

1. **Diskontujeme inflací**

$$\boldsymbol{FV_r} = \frac{\boldsymbol{FV\ netto}}{e^{f(\pi_1)} \times e^{f(\pi_2)} \times e^{f(\pi_3)}} = \frac{\boldsymbol{FV\ netto}}{e^{f(\pi_1)+f(\pi_2)+f(\pi_3)}}$$

$$\boldsymbol{FVr} = \left(\frac{448\,575{,}8}{e^{0{,}029558802\ +0{,}03246719\ +0{,}0356567}}\right)$$

$$\boldsymbol{FV\ netto\_real = 406\ 829{,}8627\ K\check{c}}$$

Děkuji za aktivní účast

v případě dotazů piště ☺