

**MUNI  
ECON**

# **Anuitní počet s aplikací na výpočet budoucí hodnoty**

# Zhodnocení 1. půlky semestru

Socrative: FIMA

## Hlavní změny

- v 2. půlce semestru budeme počítat delší příklady = na seminář jsou jen dva týmy po jednom příkladu = více času na Socrative
- 2. průběžný test bude v hodnocení zohledňovat výpočet
- **Chceme zapojit studenty do Support centra**

# Základní pojmy

## – Spoření vs. investice

- Spořicí účty
- Termínované vklady, vkladní knížky
- Stavební spoření
- Je doplňkové penzijní spoření (penzijní připojištění) opravdu spoření (pojištění)?

## – **Důchod = pravidelný příjem (mzda, výnos z majetku, transfer)**

## – **Anuita**

Představuje stálou platbu hrazenou v pravidelných časových intervalech po dané období. Při hodnocení těchto plateb se uplatňuje koncept časové hodnoty peněz.

- **Předlůtní anuita**
- **Polhůtní anuita**

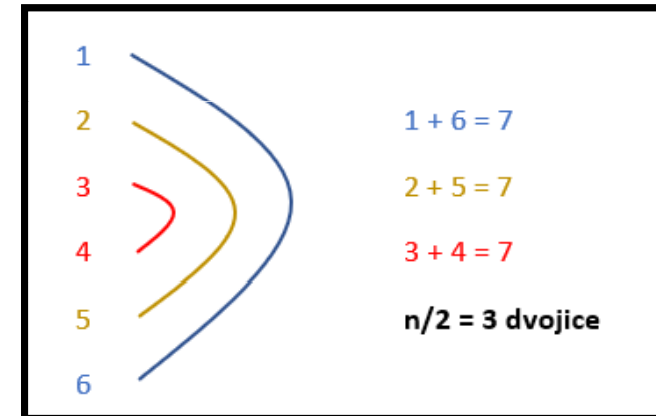
# Vše, co potřebujete znát

## 1. Aritmetická posloupnost (tvoří ji jednoduché úročení)

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Součet aritmetické posloupnosti = aritmetická řada

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

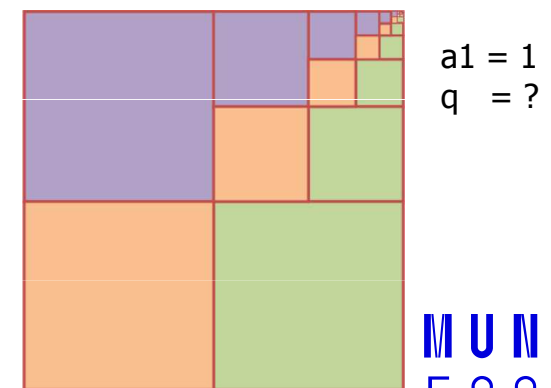


## 2. Geometrická posloupnost (tvoří ji složené úročení)

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

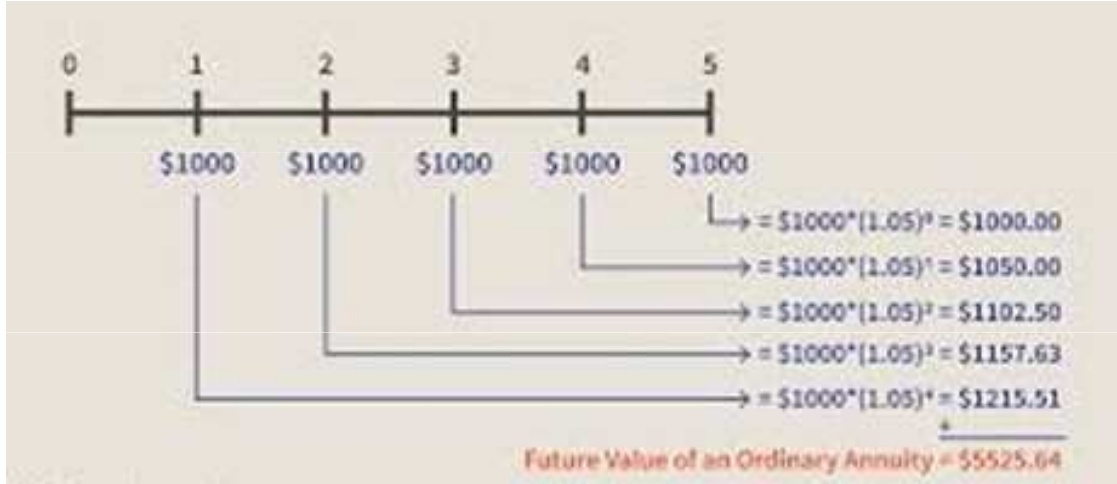
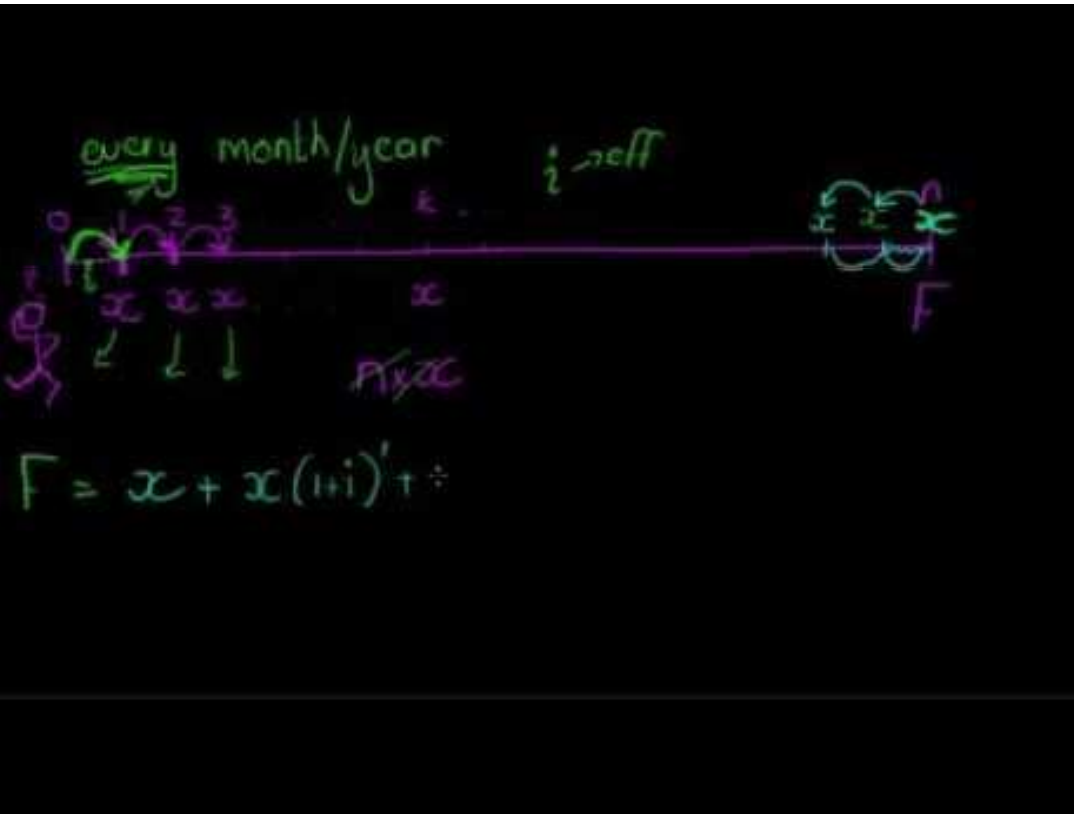
Součet geometrické posloupnosti = geometrická řada

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$



MUNI  
ECON

# Jak to funguje?



Začít v 1:40

# Budoucí hodnota annuity (= spoření)

= Pravidelné úložky (spoření) v pravidelných intervalech po určitou dobu za daných podmínek

**1. Polhůtní spoření**, vklad proveden na konci každého období, tzn. tento vklad není po toto období úročen:

$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

**2. Předhůtní spoření**, vklad proveden na začátku každého období, tzn. je nutno o celé první období déle úročit:

$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Kde *FVA* je budoucí hodnota annuity, *a* je výše anuitní platby, *r* je úroková míra, *n* je počet období.

# Jaké příklady budeme řešit?

## – Co hledám?

- Budoucí hodnotu = FVA
- Výši anuity =  $a$
- Délku spoření =  $n$

$$FVA = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow \frac{FVA \times i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$\ln \frac{FVA \times i}{a} + 1 = \ln (1+i)^n \rightarrow \ln \frac{FVA \times i}{a} + 1 = n \times \ln (1+i) \rightarrow n = \frac{\ln \frac{FVA \times i}{a} + 1}{\ln (1+i)}$$

## – Pozor na úrokové období, zadanou úrokovou míru a typ úročení

- Kdy ukládáme prostředky = před/polhůtní spoření?
- Ukládáme častěji během jednoho úrokového období?  $\longrightarrow$
- Ukládáme méně často, než je náš účet úročen?  $\longleftarrow$
- Je třeba upravit nominální úrokovou míru na úrokové období?
- Uročí banka standardně (složeně), nebo jinak (např. spojitě)?

*refektivní*

$$FVA = a \times X \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$



Součet aritmetické řady:

$$\frac{n}{2} \times (x_1 + x_n)$$

## – Zohledňuji daň, inflaci, poplatky

- Daň se platí vždy ze zisku!!!
- Pozor na období: rozdíl mezi ÚO a DO, roční poplatky za správu apod.
- Výpočet FVA lze využít i pro pravidelné měsíční poplatky apod.
- Diskontuji FVA na reálnou hodnotu = totožný postup co známe

## 7 – Dynamický vývoj: průběžné změny v úrokové sazbě, inflaci apod.

## Vzorový příklad - spoření

Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte při měsíčním spoření během 10 let částku 850.000 Kč? Banka připisuje úrok ročně a úroková sazba činí 3 % p. a. Prostředky vkládáte na BÚ **na začátku měsíce**. Kolik bude výška vkladu, jestli bude vklad **polhůtní**.

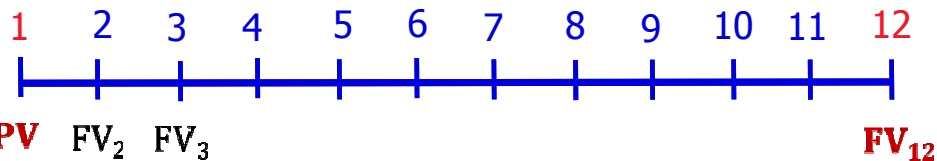
---

Jak řešíme?



# Vzorový příklad – řešení 1a

Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte při **měsíčním spoření** během 10 let částku 850.000 Kč? Banka **připisuje úrok ročně** a úroková sazba činí 3 % p. a. Prostředky vkládáte na BÚ **na začátku měsíce**.



$$FV_2 = a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = a + a \times \frac{r}{12}$$

$$FV_3 = a \cdot \left(1 + \frac{r}{12} + \frac{r}{12}\right) + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = 2a + a \cdot \frac{2r}{12} + a \cdot \frac{r}{12}$$

$$FV_{12} = 12a + a \left(\frac{12r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{11r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{10r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{9r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{8r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{7r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{6r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{5r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{4r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{3r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{2r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{r}{12}\right)$$

$$FV_{12} = 12a + a \left[ \frac{n}{2} \times (x_1 + x_n) \right] = a * \left( 12 + \left[ \frac{12}{2} \times \left( \frac{12r + 1r}{12} \right) \right] \right) = a \times \left( 12 + 12 \times \frac{13r}{24} \right) = a \times 12 \times \left( 1 + \frac{13r}{24} \right)$$

$$FVA = a \times m \times \left( 1 + \frac{12 + 1}{24} \times r \right) \times \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

$$a \times m \times \left( 1 + \frac{m + 1}{2 \times m} \times r \right)$$

Jaká je úložka za celé ÚO, jeden rok?  
Suma úložek = 12a, **ale co úroky?**

- V rámci jednoho ÚO jednoduché úročení
- Každý měsíc vložíme **a**, tedy každé další **a** je za rok úročené o  $r/12$  méně, než předešlé
- **Vzniká aritmetická řada:**



# Vzorový příklad – řešení 1a

$$a = ?$$

$$FVA = 850\,000$$

$$r = 3\% \text{ p. a.}$$

$$n = 10 \text{ let}$$

$$m(a) = 12 \text{ (měsíční spoření)}$$

$$m(r) = 1 \text{ (ÚO = 1 rok)}$$

$$m(a) > m(r) = \text{AR}$$

na začátku měsíce

Předhůtní spoření:

$$\text{Úložka za celé ÚO: } a \times m \times \left(1 + \frac{m+1}{2 \times m} \times r\right)$$

$$FVA = a \times m(a) \times \left(1 + \frac{12+1}{24} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

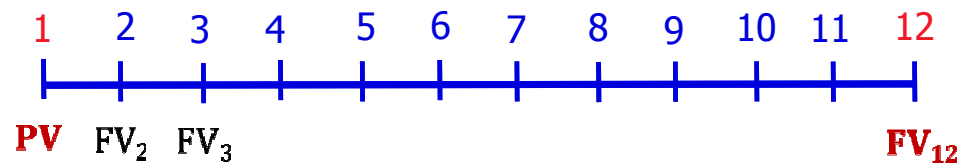
$$850\,000 = a \times 12 \times \left(1 + \frac{12+1}{24} \times 0,03\right) \times \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03}$$

→ vyjádřit:

$$a = \frac{FVA \times r}{(1+r)^n - 1} \div \left(1 + \frac{13}{24} \times 0,03\right) \div m = \mathbf{6080}$$

# Vzorový příklad – řešení 1b

Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte při **měsíčním spoření** během 10 let částku 850.000 Kč? Banka **připisuje úrok ročně** a úroková sazba činí 3 % p. a. Kolik bude výška vkladu, jestli bude **vklad polhůtní**.



$$FV_2 = a$$

$$FV_3 = a + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = 2a + a \times \frac{r}{12}$$

$$FV_4 = a + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12} + \frac{r}{12}\right) + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = 3a + a \cdot \frac{2r}{12} + a \cdot \frac{r}{12}$$

$$FV_{12} = 12a + a \cdot \left(\frac{11r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{10r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{9r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{8r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{7r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{6r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{5r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{4r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{3r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{2r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{1r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{0r}{12}\right)$$

$$FV_{12} = 12a + a \left[ \frac{n}{2} \times (x_1 + x_n) \right] = a * \left( 12 + \left[ \frac{12}{2} \times \left( \frac{11r + 0r}{12} \right) \right] \right) = a \times \left( 12 + 12 \times \frac{11r}{24} \right) = a \times 12 \times \left( 1 + \frac{11r}{24} \right)$$

11

$$FVA = a \times m \times \left( 1 + \frac{11 + 0}{24} \times r \right) \times \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

$$a \times m \times \left( 1 + \frac{m - 1}{2 \times m} \times r \right)$$

MUNI  
ECON

Jaká je úložka za celé ÚO, jeden rok?  
Suma úložek = 12a, **ale co úroky?**

- V rámci jednoho ÚO jednoduché úročení
- Každý měsíc vložíme a, tedy každé další a je za rok úročené o r/12 méně, než předešlé
- **Vzniká aritmetická řada**
- **PŘIDÁME ČLEN PRO ZJEDNODUŠENÍ:**

# Vzorový příklad – řešení 1b

$a = ?$

$FVA = 850\,000$

$r = 3\% \text{ p. a.}$

$n = 10 \text{ let}$

$m(a) = 12$  (měsíční spoření)

$m(r) = 1$  (ÚO = 1 rok)

$m(a) > m(r) = AR$

na konci měsíce

–Polhůtní spoření:

Úložka za celé ÚO:  $a \times m \times \left(1 + \frac{m-1}{2 \times m} \times r\right)$

$$FVA = a \times m \times \left(1 + \frac{11}{24} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$850\,000 = a \times 12 \times \left(1 + \frac{11}{24} \times 0,03\right) \times \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03}$$

→ vyjádřit:

Rozdíl mezi před – polhůtním spořením?

**6080 Kč vs. 6095 Kč = 15 Kč**

**→ 12 × 10 × 15 = 1 800 bez zohlednění ceny kapitálu!**

# Prezentace příkladů

- Tým 9
- Tým 10

# Příklad Socrative 1

Kolik naspoříte za pět a půl roku, pokud budete pravidelně ukládat na **konci** každého měsíce částku 1.500 Kč? Bankovní instituce nabízí sazbu 3,7 % p. a. a připisuje úrok každý měsíc.

# Příklad Socrative 1 – řešení

$$a = 1\,500$$

$$FVA = ?$$

$$r = 3,7 \% \text{ p. a.}$$

$$n = 5,5 \text{ let}$$

$$m(a) = 12 \text{ (měsíční spoření)}$$

$$m(r) = 12 \text{ (ÚO = 1 měsíc)}$$

na konci měsíce

**Polhůtní spoření:**

$$FVA = a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$FVA = 1\,500 \times \frac{\left(1 + \frac{0,037}{12}\right)^{12 \times 5,5} - 1}{\frac{0,037}{12}}$$

$$FVA = \mathbf{109\,606,1221}$$

## Příklad Socrative 2

Kolik naspoříte za pět a půl roku, pokud budete pravidelně ukládat na **začátku** každého měsíce částku 1.500 Kč? Bankovní instituce nabízí sazbu 3,7 % p. a. a připisuje úrok každý měsíc.



# Příklad Socrative 2 – řešení

$$a = 1\,500$$

$$FVA = ?$$

$$r = 3,7 \% \text{ p. a.}$$

$$n = 5,5 \text{ let}$$

$$m(a) = 12 \text{ (měsíční spoření)}$$

$$m(r) = 12 \text{ (ÚO = 1 měsíc)}$$

na začátku měsíce

**Předhůtní spoření:**

$$FVA = a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (1+r)$$

$$FVA = 1\,500 \times \frac{\left(1 + \frac{0,037}{12}\right)^{12 \times 5,5} - 1}{\frac{0,037}{12}} \times \left(1 + \frac{0,037}{12}\right)$$

$$FVA = \mathbf{109\,944,0743}$$

**Rozdíl FVA před – polhůtní spoření = 338 Kč**

## Příklad Socrative 3

Jak dlouho musíte spořit pravidelnou úložku ve výši 2 000 Kč vždy na konci pololetí, jestliže si chcete našetřit na dovolenou v hodnotě 82 238,05 Kč? Úroková sazba nabízená bankou je 1,8 % p. s. a úrok je připisován v měsíčních intervalech.

# Příklad Socratic 3 – řešení

$$a = 2\,000$$

$$FVA = 82\,238,05 \text{ Kč}$$

$$r = 1,8 \% \text{ p. s.}$$

$$n = ?$$

$$m(a) = 2 \text{ (pololetní spoření)}$$

$$m(r) = 6 \text{ (ÚO = 1 měsíc, 6x/půlrok)}$$

$m(a) < m(r)$ , úročí se častěji

na konci pololetí

## Polhútní spoření:

1) Jak zohledníme častější úročení?

$$r_{ef(m_{anuita})} = \left(1 + \frac{r_{p.s.}}{m_r}\right)^{m_r} - 1 = \left(1 + \frac{0,018}{6}\right)^6 - 1$$

2) Jak vypočítáme n?

$$FVA = a \times \frac{(1 + r_{ef})^{m_a \cdot n} - 1}{r_{ef}}$$

$$\ln\left(\frac{FVA}{a} \times r_{ef} + 1\right) = \ln(1 + r_{ef})^{m_a \cdot n}$$

$$\ln\left(\frac{FVA}{a} \times r_{ef} + 1\right) = n = 15,49999962 = 15,5 \text{ let}$$

## Příklad Socrative 4

Jak často musíte vkládat na bankovní účet částku 750 Kč vždy na začátku platební periody, jestliže za 8 let si naspoříte částku 250.275,3 Kč. Banka poskytuje úrokovou sazbu 0,3 % p. m. a úrokové období je tři měsíce.

# Příklad Socrative 4 – řešení

$$a = 750$$

$$FVA = 250\,275,3 \text{ Kč}$$

$$r = 0,3 \% \text{ p. m.}$$

$$n = 8 \text{ let}$$

$$m(a) = ?$$

$$m(r) = 4 \text{ (ÚO = 1 kvartál)}$$

na začátku periody

**Předhůtní spoření:**

$$FVA = a \times m \times \left(1 + \frac{m+1}{m \times 2} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$am + am \frac{m+1}{m \times 2} \times r = am + \frac{am+a}{2} r = am + \frac{amr}{2} + \frac{ar}{2} = m \left(a + \frac{ar}{2}\right) + \frac{ar}{2}$$

$$\left(\left(\frac{FVA}{(1+r_m)^{m \times n - 1}} \times r\right) - \frac{a \times r}{2}\right) / \left(a + \frac{a \times r_m}{2}\right) = m$$

$$m = \left(\frac{250275,3}{(1+0,009)^{4 \times 8} - 1} \times 0,009 - \frac{750 \times 0,009}{2}\right) / \left(750 + \frac{750 \times 0,009}{2}\right)$$

$$m = 9,000000983$$

**Vkládáme minimálně 9x za čtvrtletí = 3x za měsíc = co 10 dní**

## Příklad Socratic 5

Stanovte výši předlhůtní anuity, která vám při spojitém úročení vygeneruje během 15 let 900.000,-. Víte, že kvartální efektivní úroková sazba činí 0,8 %. Prostředky vkládáte na bankovní účet v 15-denních intervalech. Na konci každého roku platíte poplatek za vedení účtu 300 Kč. Poplatek za zřízení účtu je 9 000 Kč

# Příklad Socrative 5 – řešení

**Kolik musíme mít brutto, aby netto bylo 900 000 Kč?**

a = ? předlhůtní

FVA = 900 000 Kč

r = 0,8 % p. q.

n = 15 let

m(a) = 24 (15-denní interval)

m(r) = nekonečno = spojitě úročení

Poplatek správa = 300 Kč/rok/na konci

Zřizovací poplatek = 9 000 Kč

$$FVA_{brutto} = FVA_{netto} + FV_{vstup} + FVA_{poplatek}$$

$$= 900\,000 + 9\,000 \times e^{\ln(1+0,008)*4*15} + 300 \times \frac{e^{\ln(1+0,008)*4*15} - 1}{e^{\ln(1+0,008)*4}}$$

$$FVA_{brutto} = 920195,2 \text{ Kč} = \text{to spoříme}$$

**Předlhůtní anuita:**

$$FVA_{brutto} = a \times \frac{e^{fm \times m \times n} - 1}{e^{fm} - 1} \times e^{fm}$$

$$\frac{FVA_{brutto}}{e^{fm} \times (e^{fm \times m \times n} - 1)} \times (e^{fm} - 1) = a$$

$$a = \frac{920195,2}{e^{\frac{\ln(1+0,008)}{3*2}} \times (e^{\frac{\ln(1+0,008)}{3*2} \times 24 \times 15} - 1)} \times (e^{\frac{\ln(1+0,008)}{3*2}} - 1) = 1992 \text{ Kč}$$

## Příklad Socratic 6

Na účet jsme vložili 200 000 Kč na 5 let při sazbě 2% p.q. a čtvrtletním připisování úroků. Za zřízení účtu jsme zaplatili poplatek 5000 Kč. Dále jsme platili půlroční poplatek ve výši 200 Kč (na konci). Kolik jsme na konci spoření měli na účtu prostředků?



# Příklad Socratic 6 – řešení

PV = 200 000 Kč jednorázově

$r = 2\%$  p. q.

$n = 5$  let

$m(r) = 4$  (čtvrtletní ÚO)

Poplatek = 200 Kč/půlrok/polhůtní

$m(\text{poplatek}) = 2$

Zřizovací poplatek = 5 000 Kč

**FV<sub>netto</sub> = ?**

**Složené úročení:**

$$PV_{netto} = PV - \text{Zřizovací poplatek} = 195\,000 \text{ Kč}$$

$$FV_{brutto} = PV_{netto} \times (1 + r)^{m \times n} = 195\,000 \times (1 + 0,02)^{4 \times 5}$$

$$FV_{brutto} = 289\,759,74 \text{ Kč}$$

**Polhůtní anuita = poplatek = nutné sladit čas!**

$$FVA_{poplatek} = a \times \frac{(1+r)^{m(\text{poplatek}) \times n} - 1}{(1+r)^{m(\text{poplatek})} - 1}$$

$$FVA_{poplatek} = 200 \times \frac{(1 + 0,02)^{2 \times 4 / 2 \times 5} - 1}{(1 + 0,02)^2 - 1} = 2\,405,68 \text{ Kč}$$

$$FV_{netto} = FV_{brutto} - FVA_{poplatek} = 287\,354$$

MUNI  
ECON

## Příklad Socratic 7

Na účet jsme vložili 200 000 Kč na 5 let při sazbě 2% p.q. a čtvrtletním připisování úroků. Za zřízení účtu jsme zaplatili poplatek 5000 Kč. Dále jsme platili půlroční poplatek ve výši 200 Kč (na konci). **Jaká byla průměrná roční výnosnost investice?**

# Příklad Socratic 7 – řešení

PV = 200 000 Kč jednorázově

n = 5 let

**FV = 287 354 Kč**

**r<sub>výnosnost</sub> = ? p. a.**

$$r_{\text{výnosnost}} = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

$$r_{\text{výnosnost}} = \sqrt[5]{\frac{287\,354}{200\,000}} - 1$$

$$r_{\text{výnosnost}} = \mathbf{7,5\% \text{ p. a.}}$$

**Děkuji za aktivní účast  
v případě dotazů piště 😊**