

Komplexní příklady se zaměřením na FV

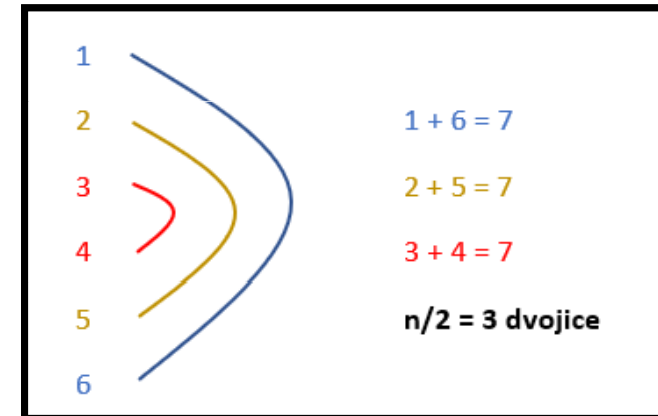
Vše co potřebujete znát

1. Aritmetická posloupnost (tvoří ji jednoduché úročení)

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Součet aritmetické posloupnosti = aritmetická řada

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

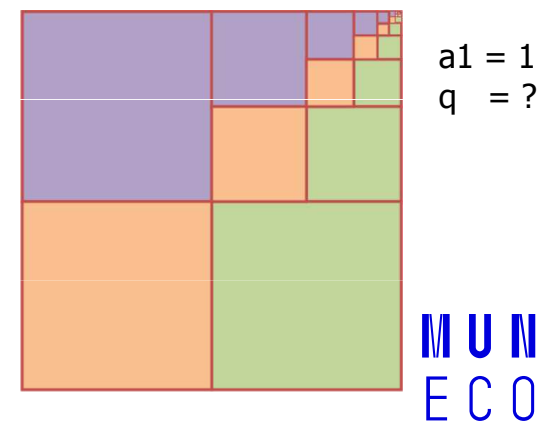


2. Geometrická posloupnost (tvoří ji složené úročení)

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Součet geometrické posloupnosti = geometrická řada

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$



Opakování: budoucí hodnota annuity

= Pravidelné úložky (spoření) v pravidelných intervalech po určitou dobu za daných podmínek

1. Polhůtní spoření, vklad proveden na konci každého období, tzn. tento vklad není po toto období úročen:

$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

2. Předhůtní spoření, vklad proveden na začátku každého období, tzn. je nutno o celé první období déle úročit:

$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Kde *FVA* je budoucí hodnota annuity, *a* je výše anuitní platby, *r* je úroková míra, *n* je počet období.

Opakování: co a jak lze řešit?

– Co hledám?

- Budoucí hodnotu = FVA
- Výši anuity = a
- Délku spoření = n

$$FVA = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow \frac{FVA \times i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$\ln \frac{FVA \times i}{a} + 1 = \ln (1+i)^n \rightarrow \ln \frac{FVA \times i}{a} + 1 = n \times \ln (1+i) \rightarrow n = \frac{\ln \frac{FVA \times i}{a} + 1}{\ln (1+i)}$$

– Pozor na úrokové období, zadanou úrokovou míru a typ úročení

- Kdy ukládáme prostředky = před/polhůtní spoření?
- Ukládáme častěji během jednoho úrokového období? \longrightarrow
- Ukládáme méně často, než je náš účet úročen? \longleftarrow
- Je třeba upravit nominální úrokovou míru na úrokové období?
- Uročí banka standardně (složeně), nebo jinak (např. spojitě)?

refektivní

$$FVA = a \times X \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$



Součet aritmetické řady:

$$\frac{n}{2} \times (x_1 + x_n)$$

– Zohledňuji daň, inflaci, poplatky

- Daň se platí vždy ze zisku!!!
- Pozor na období: rozdíl mezi ÚO a DO, roční poplatky za správu apod.
- Výpočet FVA lze využít i pro pravidelné měsíční poplatky apod.
- Diskontuji FVA na reálnou hodnotu = totožný postup co známe

4 – Dynamický vývoj: průběžné změny v úrokové sazbě, inflaci apod.

Návrat k semináři 6

- Socratic sebereflexe
- Ke kterým příkladům se musíme vrátit?

Příklad Socratic 1

Kolik naspoříte za 30 let, pokud budete každý den ukládat na spořicí účet 1 Kč? Roční úroková sazba činí 3,2 % a banka připisuje úrok jednou ročně.

Jak banka započítá vklad při denním ukládání?

Příklad Socratic 1

Kolik naspoříte za 30 let, pokud budete každý den ukládat na spořicí účet 1 Kč? Roční úroková sazba činí 3,2 % a banka připisuje úrok jednou ročně.

Jak banka započítá vklad při denním ukládání?

až v noci = na konci dne = polhůtní spoření

Příklad Socrative 1 – řešení

r (p. a.)	0,032
m	360
a	1 Kč
n	30
FV	17 975 Kč

- 1) Ukládám častěji, než se úročí.
- 2) Ukládáme polhůtně
- 3) Není třeba upravovat úrokovou míru (p. a., ÚO = 1 rok).
- 4) Za jedno ÚO se jedná o 360 úložek úročených v různém poměru = součet aritmetické řady.
- 5) Součet geometrické řady aplikujeme na celé roky = celé ÚO

$$q = (1 + r)$$

$$FVA = a * m * \left(1 + \frac{m - 1}{2 * m} * r \right) * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$FVA = 1 * 360 * \left(1 + \frac{360 - 1}{2 * 360} * 0,032 \right) * \frac{(1 + 0,032)^{30} - 1}{(1 + 0,032) - 1} = \mathbf{17\ 975\ Kč}$$

Příklad Socratic 2

Řešte výchozí zadání **přes spojitě úročení se stejným dopadem na kapitál**: Kolik naspoříte za 30 let, pokud budete každý den ukládat na spořicí účet 1 Kč? Roční úroková sazba činí 3,2 % a banka připisuje úrok jednou ročně.

Jaká bude hodnota q (kvocient geometrické řady)?

Zaokrouhlete na 5-7 desetinných míst

Příklad Socrative 2 – řešení

r (p. a.)	0,032
m	360
a	1 Kč
n	30
FV	17 975 Kč
f	0,0314987
q	1,0000875

1) Zjistím úrokovou intenzitu:

$$f = \ln(1 + r) = \ln(1 + 0,032)$$

2) Zjistím kvocient geometrické řady = úročitel na denní bázi

$$q = e^{\frac{f}{360}} = 1,0000875$$

ZKOUŠKA:

$$FVA = \frac{q^{m*n} - 1}{q - 1} = \frac{e^{\frac{f}{360} * 360 * 30} - 1}{\frac{f}{360}} = 17\,974 \text{ Kč} = \text{stejný dopad na kapitál}$$

Prezentace příkladů

- Tým 7
- Tým 8

Příklad Socratic: komplexní příklad

Kolik naspoříte za 25 let, pokud ukládáte v pravidelných čtvrtletních intervalech, vždy na začátku kvartálu částku 333 Kč. Banka garantuje po celou dobu 4,5 % roční úrokovou intenzitu = **úročí spojitě**. Abychom předešli dopadu inflace, navyšujeme každou novou anuitu o 0,5 % z předchozí výše.

Dále budete odvádět

- a) na konci každého roku daň z připsaného úroku,
- b) srážkovou daň,
- c) jednorázově daň v době realizace účtu.

Budeme počítat po částech (= 4 samostatné příklady)

Příklad Socratic 3 – část 1/4

Kolik naspoříte za 25 let, pokud ukládáte v pravidelných čtvrtletních intervalech, vždy na začátku kvartálu částku 333 Kč? Banka garantuje po celou dobu 4,5 % roční úrokovou intenzitu = **úročí spojitě**. Abychom předešli dopadu inflace, navyšujeme každou novou anuitu o 0,5 % z její předchozí výše.

Příklad Socratic 3 – řešení 1/4

a	333 Kč
n	25 let
m(vklad)	4/rok
f	4,50 %
růst a (π)	0,005 %
FVA	? Kč

- 1) Předhůtní spoření
- 2) Úročím častěji, než vkládám (spojitě)
- 3) Kvocient geometrické řady vychází z efektivní úrokové míry
- 4) Zároveň navyšuji anuitu = existuje 2. kvocient tvořící 2. geometrickou řadu
- 5) Tyto kvocienty lze spojit (řady jdou opačným směrem, proto musí jít o podíl = poslední nejvyšší anuita je zároveň nejméně úročena):

$$q = \frac{e^{\frac{f}{4}}}{1 + \pi}$$

$$a_n(\text{dle inflace}) = a * (1 + \pi)^{m*n-1} * e^{\frac{f}{4}} = a_1(\text{dle úroků})$$

$$FVA = a * (1 + \pi)^{m*n} * q * \frac{q^{m*n} - 1}{q - 1} = 333 * (1 + 0,005)^{4*25-1} * e^{\frac{0,045}{4}} * \frac{\left(\frac{e^{\frac{0,045}{4}}}{1 + 0,005}\right)^{4*25} - 1}{\left(\frac{e^{\frac{0,045}{4}}}{1 + 0,005}\right) - 1}$$

$$FVA = 76\,466 \text{ Kč}$$

Příklad Socrative 4 – část 2/4

Kolik naspoříte za 25 let, pokud ukládáte v pravidelných čtvrtletních intervalech, vždy na začátku kvartálu částku 333 Kč. Banka garantuje po celou dobu 4,5 % roční úrokovou intenzitu = úročí spojitě. Abychom předešli dopadu inflace, navyšujeme každou novou anuitu o 0,5 % z předchozí výše.

Navíc odvedete jednorázově daň v době realizace účtu ve výši 15 %.

Příklad Socratic 4 – řešení 2/4

a	333 Kč
n	25 let
m(vklad)	4/rok
f	4,50 %
růst a (π)	0,005 %
Daň 15 %	k realizaci

- 1) Postup totožný s výchozím příkladem
- 2) a = poslední anuita a(n), tzn. ta, která je nejvyšší + nejméně úročena
- 3) Daň pouze ze zisku = nutné zjistit součet řady anuit:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a * \frac{(1 + \pi)^{m*n} - 1}{(1 + \pi) - 1} = 333 * \frac{(1 + 0,005)^{100} - 1}{(1 + 0,005) - 1} = \mathbf{43\ 068\ Kč}$$

$$FVA_{brutto} = a * (1 + \pi)^{m*n} * q * \frac{q^{m*n} - 1}{q - 1} = 333 * (1 + 0,005)^{4*25} * \left(\frac{e^{\frac{0,045}{4}}}{1 + 0,005} \right) * \frac{\left(\frac{e^{\frac{0,045}{4}}}{1 + 0,005} \right)^{4*25} - 1}{\left(\frac{e^{\frac{0,045}{4}}}{1 + 0,005} \right) - 1} = \mathbf{76\ 466\ Kč}$$

$$FVA_{netto} = \left(FVA_{brutto} - \sum_{i=1}^n a_i \right) * 0.85 + \sum_{i=1}^n a_i = \mathbf{71\ 457\ Kč}$$

Příklad Socratic 5 – část 3/4

Kolik naspoříte za 25 let, pokud ukládáte v pravidelných čtvrtletních intervalech, vždy na začátku kvartálu částku 333 Kč. Banka garantuje po celou dobu 4,5 % roční úrokovou intenzitu = úročí spojitě. Abychom předešli dopadu inflace, navyšujeme každou novou anuitu o 0,5 % z předchozí výše.

Dále budete odvádět 15 % srážkovou daň.

Příklad Socratic 5 – řešení 3/4

a	333 Kč
n	25 let
m(vklad)	4/rok
f	4,50 %
růst a (π)	0,005 %
daň 15 %	srážková

- 1) Předlhůtní spoření + úročím častěji, než vkládám (spojitě)
- 2) a = poslední anuita a(n), tzn. ta, která je nejvyšší + nejméně úročena
- 3) Srážková daň = odvádí se v době připsání úroku = očistit q

$$q = \frac{e^{\frac{f*0,85}{m}}}{1 + \pi}$$

$$FVA = a * (1 + \pi)^{m*n} * q * \frac{q^{m*n} - 1}{q - 1} = 333 * (1 + 0,005)^{99} * e^{\frac{0,045*0,85}{4}} * \frac{\left(\frac{e^{\frac{0,045*0,85}{4}}}{1 + 0,005}\right)^{4*25} - 1}{\left(\frac{e^{\frac{0,045*0,85}{4}}}{1 + 0,005}\right) - 1}$$

$$FVA = 69\,690 \text{ Kč}$$

Matematický oříšek - část 4/4

Kolik naspoříte za 25 let, pokud ukládáte v pravidelných čtvrtletních intervalech, vždy na začátku kvartálu částku 333 Kč. Banka garantuje po celou dobu 4,5 % roční úrokovou intenzitu = úročí spojitě. Abychom předešli dopadu inflace, navyšujeme každou novou anuitu o 0,5 % z předchozí výše.

Budete odvádět na konci každého roku daň 15 % z připsaného úroku.

Matematický oříšek – řešení 4/4

a	333 Kč
n	25 let
m(vklad)	4/rok
f	4,50 %
růst a (π)	0,005 %
Daň 15 %	1/rok

- 1) Předhůtní spoření, úročím častěji, než vkládám (spojitě)
- 2) a = poslední anuita a(n), tzn. ta, která je nejvyšší + nejméně úročena
- 3) Daň jednou ročně = nejprve zjistit úložku za jedno DO vychází z q:

$$q_{\text{čtvrtrok}} = \frac{e^{\frac{f}{4}}}{1 + \pi}$$

- 4) Vypočítám úložku za celé DO (n=m), odečtu sumu anuit a očistím o daň
- 5) Očistit roční kvocient (celá DO), n = 25

$$q_{\text{celáDO}} = \frac{(e^f - 1) * 0,85 + 1}{(1 + \pi)^4}$$

$$FVA = \left[\left\{ a * (1 + \pi)^{m*n} * q_{\text{čtvrtrok}} * \frac{q_{\text{čtvrtrok}}^m - 1}{q_{\text{čtvrtrok}} - 1} - a * (1 + \pi)^{m*n-1} * \frac{\left(\frac{1}{1 + \pi}\right)^m - 1}{\left(\frac{1}{1 + \pi}\right) - 1} \right\} * 0,85 + a * (1 + \pi)^{m*n-1} * \frac{\left(\frac{1}{1 + \pi}\right)^m - 1}{\left(\frac{1}{1 + \pi}\right) - 1} \right] * \frac{q_{\text{celáDO}}^n - 1}{q_{\text{celáDO}} - 1}$$

$$FVA = \left[\left\{ 333 * (1,005)^{4*25} * q_{\text{čtvrtrok}} * \frac{q_{\text{čtvrtrok}}^4 - 1}{q_{\text{čtvrtrok}} - 1} - 333 * 1,005^{99} * \frac{(1,005)^4 - 1}{(1,005) - 1} \right\} * 0,85 + 333 * 1,005^{99} * \frac{(1,005)^4 - 1}{(1,005) - 1} \right] * \frac{q_{\text{celáDO}}^{25} - 1}{q_{\text{celáDO}} - 1}$$

$$FVA = 69\,809,25\text{Kč}$$

Komplexní příklad – srovnání výsledků

	Jak zakomponovat daň do vzorce?	Výsledek
Bez daně diskrétní	-	76 377 Kč
Bez daně spojitě	-	76 466 Kč
Daň odváděna ročně	Úložka za jedno DO, očistit, $q(\text{netto}, \text{celáDO})$	69 809 Kč
Daň jednorázová na konci	$(FV(\text{brutto}) - \text{suma}(a)) * 0,85 + \text{suma}(a)$	71 457 Kč
Daň srážková (= realita)	$r(\text{ÚO}) * 0,85$	69 690 Kč

**Děkuji za aktivní účast
v případě dotazů piště 😊**