Analytická geometrie v rovině

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Parametrické vyjádření přímky

Víme, že každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB, nebo častěji p apod. Rozumíme tomu, že přímka je množina bodů, které splňují nějaké pravidlo.

Příklad

Bod $A[1,2]$ a bod $B[5,4]$ jednoznačně určují přímku p. Najděte body C, D, E na přímce p, tak aby:

- *bod bod B byl středem úsečky AC*
- *bod bod C byl středem úsečky AD*
- *bod bod D byl středem úsečky AE*

Při nalezení bodu C je úsečka $|AC|$ dvakrát delší než $|AB|$, a $|AD|$ čtyřikrát delší než $|AB|$, atd. Vymyslete obecný vzoreček pro nalezení koncového bodu úsečky B', tak abychom úsečku AB mohli zvětěěšit n-krát a náležela přímce p.

Parametrické vyjádření přímky

Víme, že každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB, nebo častěji p apod. Rozumíme tomu, že přímka je množina bodů, které splňují nějaké pravidlo.

Příklad

Bod $A[1,2]$ a bod $B[5,4]$ jednoznačně určují přímku p. Najděte body C, D, E na přímce p, tak aby:

- *bod bod B byl středem úsečky AC*
- *bod bod C byl středem úsečky AD*
- *bod bod D byl středem úsečky AE*

Při nalezení bodu C je úsečka $|AC|$ dvakrát delší než $|AB|$, a $|AD|$ čtyřikrát delší než $|AB|$, atd. Vymyslete obecný vzoreček pro nalezení koncového bodu úsečky B', tak abychom úsečku AB mohli zvětěěšit n-krát a náležela přímce p.

Parametrické vyjádření přímky

Jestliže pomocí navrženého vzorečku umíme najít takto speciální body, které leží na přímce p. Můžeme potom jednoduchou modifikaci nalézt všechny body ležící na přímce p.

Rovnice

$$X = A + t\mathbf{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

se nazývá **parametrická rovnice přímky** nebo také **parametrické vyjádření přímky** určené bodem A a vektorem $\vec{u}$. Proměnná t se nazývá **parametr**.

Parametrické vyjádření přímky

Jestliže pomocí navrženého vzorečku umíme najít takto speciální body, které leží na přímce p. Můžeme potom jednoduchou modifikaci nalézt všechny body ležící na přímce p.
Rovnice

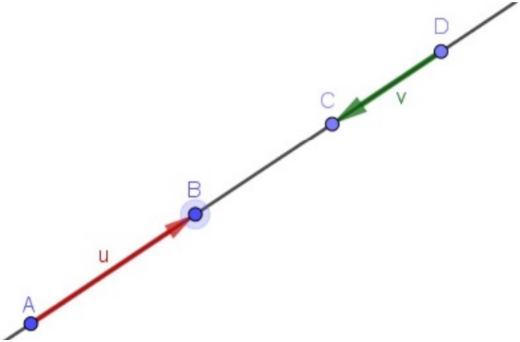
$$X = A + t\mathbf{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

se nazývá **parametrická rovnice přímky** nebo také **parametrické vyjádření přímky** určené bodem A a vektorem $\vec{u}$. Proměnná t se nazývá **parametr**.

Přímka v rovině

Otázky k zamyšlení:

- Je přímka určena jen jedinou dvojicí bodů?
- Má přímka jeden, nebo více směrových vektorů? Jestliže jich má víc, jak spolu souvisí?
- Je nulový vektor směrnicovým vektorem nějaké přímky?



Bod přímky

Příklad

Zjistěte zda body $P[1,2], Q[3,1]$ *leží na přímce p, která má parametrické vyjádření*

$$\begin{aligned} x &= 2 - t \\ z &= 3 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Příklad

Zjistěte zda body $P[1,2], Q[3,1]$ *leží na přímce p, která má parametrické vyjádření*

$$x = 2 - t$$
$$z = 3 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Řešení:

Aby bod P ležel na přímce p, muselo by existovat takové $t \in \mathbb{R}$, že následující rovnice by byly obě splněny.

$$1 = 2?t, \qquad 2 = 3 + 2t, t \in R.$$

Ovšem zde neexistuje t pro které by byly obě rovnice splněny. Tedy bod P neleží na přímce p. Pro Q máme rovnice

$$3 = 2?t, \qquad 1 = 3 + 2t, t \in R.$$

Z obou rovnic dostaneme $t =?1$, tedy Q je bodem přímky p.

Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v rovině mohou mít tyto vzájemné polohy:

- rovnoběžné
  - různé
  - totožné
- různoběžné

Dvě přímky $p(P, \mathbf{u})$ a $q(Q, \mathbf{v})$ jsou spolu rovnoběžné právě tehdy, když vektor $\mathbf{v}$ je k násobkem vektoru $\mathbf{u}$.
Pro dvě přímky $p(P, \mathbf{u})$ a $q(Q, \mathbf{v})$ platí: Je-li vektor $\mathbf{v}$ je k násobkem vektoru $\mathbf{u}$ a bod Q náleží zároveň přímce p, jsou přímky rovnoběžné totožné.

Obecná rovnice přínky

Vektor který je kolmý ke směrovému vektoru přímky se nazývá **normálový vektor**.

Úkol:

´ Předpokládejme, že máme přímku se směrovým vektorem $\mathbf{u} = (3, 2)$, najděte normálový vektor. Nejprve zakreslete obrázek a obecně stanovte pravidlo pro nalezení normálového vektoru. Dále ověřte pomocí skalárního součinu jeho platnost.

Úkol: ´ Zamyslete se nad podmínkou, případně najděte podmínku zahrnující dva vektory, kterou musí splňovat souřadnice bodu $X[x, y]$, aby tento bod ležel na přímce p která obsahuje bod $P[3, ?1]$ a má normálový vektor $\mathbf{n} = (1, 2)$. Nápověda: Bod X leží na přímce, když vektory $\mathbf{n}$ a $X?P$ jsou navzájem kolmé.

Hledaná podmínka tedy je:

$$
\begin{aligned}
(1, 2) \cdot (x - 3, y + 1) &= 0 \\
x - 3 + 2y + 2 &= 0 \\
x + 2y - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Úkol: ´ Zamyslete se nad podmínkou, případně najděte podmínku zahrnující dva vektory, kterou musí splňovat souřadnice bodu $X[x, y]$, aby tento bod ležel na přímce p která obsahuje bod $P[3, ?1]$ a má normálový vektor $\mathbf{n} = (1, 2)$. Nápověda: Bod X leží na přímce, když vektory $\mathbf{n}$ a $X?P$ jsou navzájem kolmé.

Hledaná podmínka tedy je:

$$\begin{aligned} (1, 2) \cdot (x - 3, y + 1) &= 0 \\ x - 3 + 2y + 2 &= 0 \\ x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Obecně:
Označíme $\mathbf{n} = (a, b)$, $P[p1, p2]$. Potom bod $X[x, y]$ leží na přímce p, která obsahuje normálový vektor $\mathbf{n}$ a bod P právě tehdy, když

$$\begin{aligned} n \cdot (X - P) &= 0 \\ (a, b) \cdot (x - p_1, y - p_2) &= 0 \\ ax - ap_1 + by - bp_2 &= 0 \\ ax + by - ap1 - bp2 &= 0 \end{aligned}$$

Položme $-ap_1 - bp_2 = c$ a dostaneme výsledný vztah ve tvaru

$$ax + by + c = 0$$

Tuto rovnici nazýváme **obecné vyjádření přímky**.

Dvě přímky zadané obecně mohou mít v rovině tyto vzájemné polohy:

- rovnoběžné
  - různé
  - totožné
- různoběžné

Dvě rovnice přímky určují stejnou přímku je-li jedna rovnice k násobkem druhé.
Dvě přímky které mají rovnice

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

jsou rovnoběžné právě tehdy, když vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ je k násobkem vektoru $n' = (a', b')$.

Úkol

Napište obecnou rovnici přímky p

$$p: x = 1 - t,$$
$$y = 3 + 2t, t \in R$$

Napište parametrické vyjádření přímky $q : 3x?2y + 1 = 0$

Polohové úlohy

Určete vzájemnou polohu p, q

$$p : x = 3?2t$$
$$y =?1 + t, t?R$$

$$q : 4x - y + 5 = 0$$

Úkol:
Určete vzdálenost bodu $A[1,5]$ od přímky $q : 2x?y?2 = 0$. Postup

řešení:

1. Bodem A vedeme kolmici p k přímce q.
2. Najdeme průsečík Q přímek q a p.
3. Určíme vzdálenost bodů A a Q.

Metrické úlohy

Odchylka dvou přímek p, q se směrnicovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je číslo $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Úkol: ´ Vypočítejte odchylku dvou přímek p, q

$$\begin{aligned} p : x &= 1 + t, \\ y &= 2 + 3t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$q : 2x + y - 1 = 0$$