Reálná funkce reálné proměnné

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

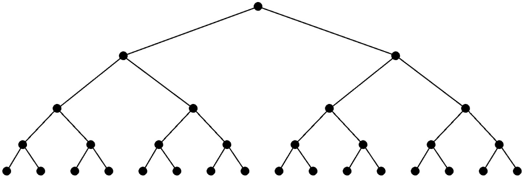
podzim 2018

Reálná funkce reálné proměnné

Z minulé přednášky známe:

- nejzákladnější typy funkcí
- základní vlastnosti
- grafy funkcí
- rovnost funkcí

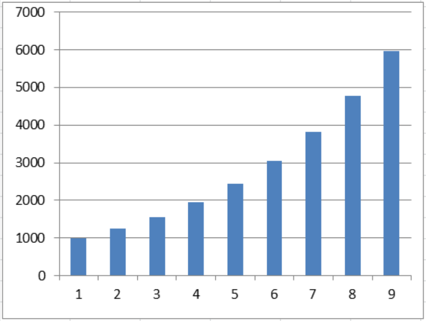
Dělení buněk:



Složené úročení

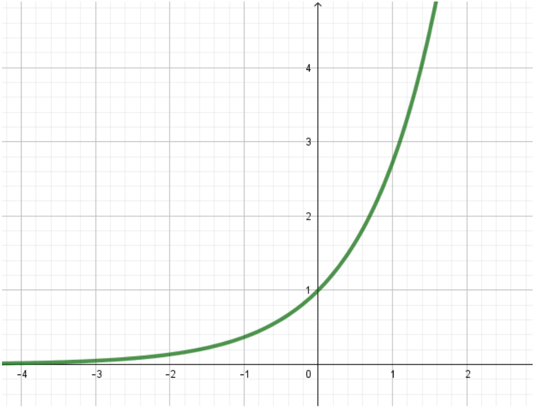
Počáteční kapitál 1000 Kč úročíme složeným úročením po dobu 9 let úrokovou sazbou 25 %. Úrokové období je jeden rok. Úroky jsou připisovány ke kapitálu vždy na konci roku.

roky	peníze
1	1000
2	1250
3	1562,5
4	1953,125
5	2441,406
6	3051,758
7	3814,698
8	4768,373
9	5960,466



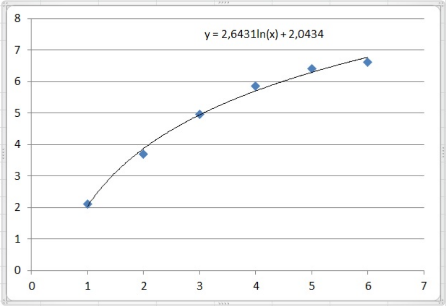
Základní typy funkcí (druhá část)

- Exponenciální funkce - obecný předpis $y = a^x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$
  - předpis $y = \exp(x)$ $\qquad y = e^x$
  - $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}^+$
  - spojitá, **je** prostá, rostoucí, není sudá ani lichá



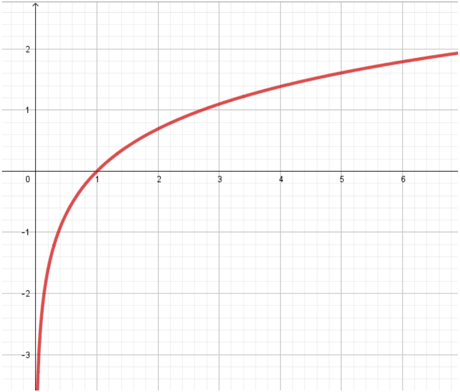
Model který popisuje jak narůstá promile alkoholu v krvi

Hodina	počet 12° piv	Promile alkholu v krvi
1	6	2,1
2	5	3,7
3	4	4,96
4	3	5,86
5	2	6,41
6	1	6,62



Základní typy funkcí (druhá část)

- Logaritmická funkce - obecný předpis $y = \log_a(x), a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$
  - předpis $y = \ln(x)$
  - $D(f) = \mathbb{R}^+, H(f) = \mathbb{R}$
  - spojitá, **je** prostá, rostoucí, není sudá ani lichá



Racionálně lomená funkce

Mějme $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ je nenulový polynom stupně m. Funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

se nazývá racionálně lomená funkce, a to

- **ryze lomená**, je-li $n < m$,
- **neryze lomená**, je-li $n \geq m$

Příklad

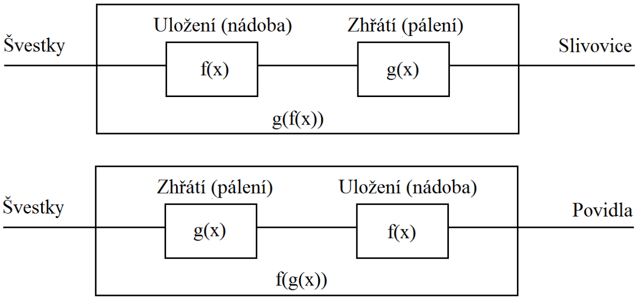
Racionální funkce $R(x) = \frac{x^3+2x-5}{x^2+1}$ *je neryze lomená.*

Racionální funkce $R(x) = \frac{x^3+2x-5}{x^5+x^3+1}$ *je ryze lomená.*

Operace s funkcemi:

- sčítání,
- odčítání,
- násobení,
- dělení,
- **skládání**.

Skládání funkcí:



Formální zavedení složené funkce:

Máme funkci $f : y = f(u)$ s definičním oborem $D(f)$ a funkci $g : u = g(x)$ s oborem hodnot $H(g)$. Jestliže je $H(g) \subseteq D(f)$, pak funkci $h : y = f(g(x))$ nazveme **složenou funkcí**.

Poznámka

Již víme, že $f \circ g \neq g \circ f$.

Složená reálná funkce

Příklad

Spotřebu elektrické energie 100 W žárovky můžeme vyjádřit jako funkci $q = 100 \cdot t$*, kde* t *je počet hodin. Dejme tomu, že cena jedné kWh je 4 Kč, pak funkce* $y = 4 \cdot \frac{q}{1000}$ *cenu za spotřebovanou energii, kde* q *je spotřebovaná energie v Wh. Jak zkombinovat tyto dvě funkce, aby jsme rovnou vypočítali cenu za:*

a) *10 hodin svícení?*

a) *4 hodiny svícení?*

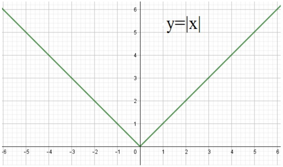
b) *50 hodin svícení?*

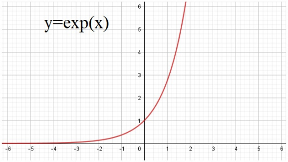
Složená reálná funkce

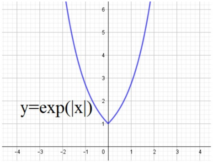
Nakreslete grafy funkcí:

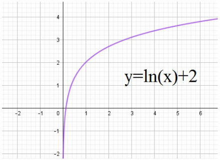
- $y = |x|$
- $y = \exp(x)$
- $y = |\exp(x)|$
- $y = \exp(|x|)$
- $y = \ln(x) + 2$
- $y = \ln^2(x)$

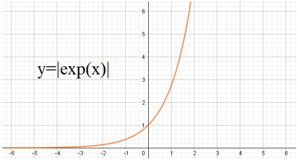
Řešení

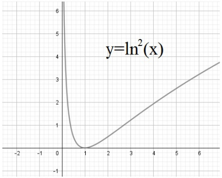












Transformace grafu funkce

- Posunutí ve směru osy x
  - $y = f(x \pm a)$
- Posunutí ve směru osy y
  - $y = f(x) \pm a$
- Kontrakce a dilatace ve směru osy x
  - $y = f(a \cdot x)$
- Kontrakce a dilatace ve směru osy y
  - $y = a \cdot f(x)$
- Překlopení podle osy y
  - $y = f(-x)$
- Překlopení podle osy x
  - $y = -f(x)$

Procvičení

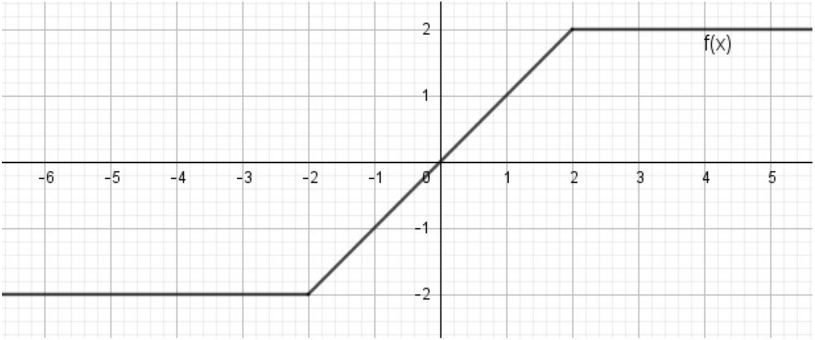
Za předpokladu, že znáte graf funkce $y = f(x)$, který je na obrázku, načrtněte grafy funkcí:

a) $y = f(x) + 3$

b) $y = f(x + 3)$

c) $y = -f(x)$

d) $y = |f(x + 3)|$



Procvičení

Nakreslete graf funkce $y = e^x$ a dále pak načrtněte:

a) $y = e^x + 2$

b) $y = e^{x-1}$

c) $y = e^{-x}$

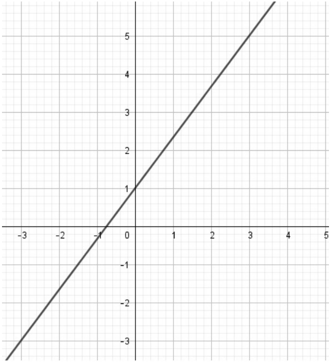
d) $y = -(e^{x-1})$

e) $y = -0,5^x$

Načrtněte grafy funkce $y = -\log_2(x)$ a ukažte, že $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ se rovná $y = -\log_2(x)$.

Procvičení

Určete předpis lineární funkce na obrázku



Periodické funkce

Periodická funkce je v matematice funkce, jejíž hodnoty se pravidelně opakují s určitou periodou.

Přesněji můžeme říci, že funkce f je periodická s periodou P, jestliže

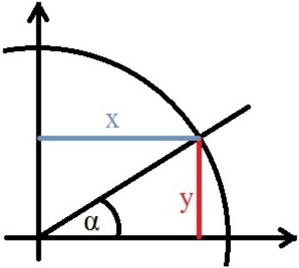
$$f(x+P)=f(x)$$

pro všechny hodnoty x v definiční oblasti f. Pro všechna celá čísla n také platí
$f(x+nP)=f(x)$.

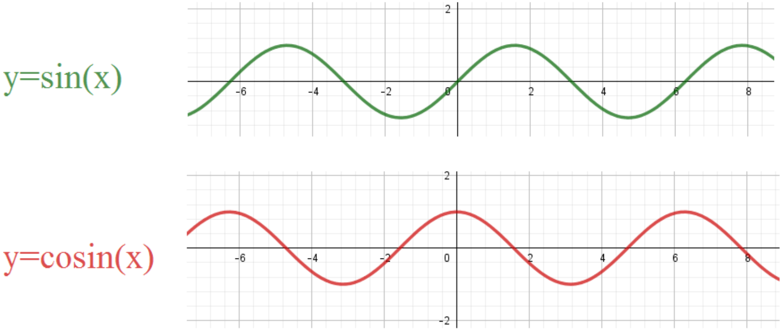
Goniometrická funkce

Nechť α je libovolný úhel. Uvažujme jednotkovou kružnici v rovině a paprsek, který jde z počátku pod úhlem α. Nechť (x, y) jsou souřadnice průsečíku paprsku a jednotkové kružnice. Pak definujeme:

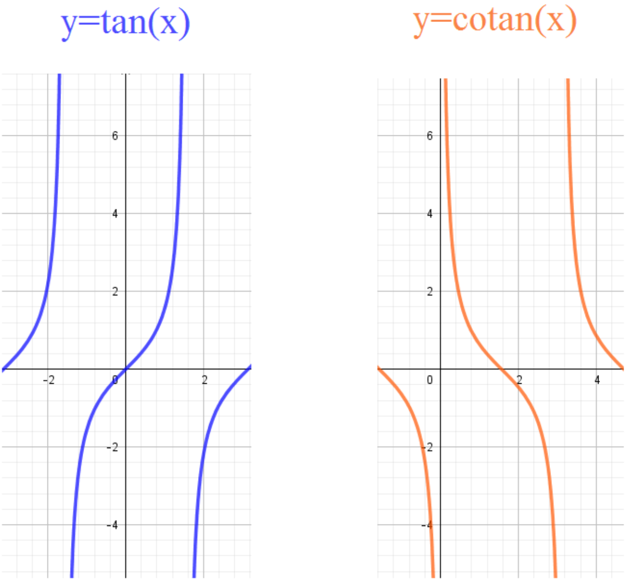
$$\sin(\alpha) = y \qquad \cos(\alpha) = x \qquad \tan(\alpha) = \frac{y}{x} \qquad \mathrm{cotan}(\alpha) = \frac{x}{y}$$



Funkce sinus a cosinus



Funkce tangens a cotangens



Hodnoty goniometrických funkcí

	0°	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
$\sin_x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos_x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg_x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	·	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	·	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg_x	·	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	·	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	·

Příklady

Zjistěte v kterých bodech se se protíná funkce $y = 3^x + 3^{x+1}$ a konstantní funkce $y = 108$.

Najděte body ve kterých funkce $y = 16^x - 6 \cdot 4^x + 8$ protíná osu x.

Pravidla pro úpravu logaritmů

Předpokládejme, že základ a je opravdu základ logaritmu, tj. $a > 0$, $a \neq 1$. Dále nechť x_1 a x_2 jsou libovolná kladná reálná čísla. Pak platí:

- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \forall r \in \mathbb{R}$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Příklady

Zjistěte v kterých bodech se se protíná funkce
$y = log(x+5) - log(x-1)$ a funkce $y = 1 - log2$.

Ukažte, že funkce $y = \log_4(x^2-9) - log_4(x+3)$ má právě jeden společný bod s s funkcí $y = 3$ a to $[67, 3]$.