Lineární prostory

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

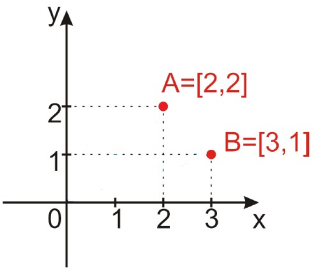
Souřadnice v rovině

Dvojice číselných os x, y v rovině , pro které platí:

1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku odpovídá na obou osách číslo 0,

se nazývá **kartézská soustava souřadnic v rovině** a označuje s Oxy.

Každý bod roviny lze zapsat pomocí dvou souřadnic.



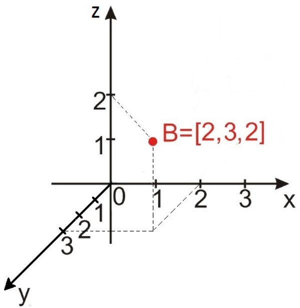
Souřadnice v prostoru

Trojice číselných os x, y, z v prostoru, pro které platí:

1. každé dvě z nich jsou navzájem kolmé,
2. všechny procházejí bodem O,
3. bod 0 odpovídá na všech osách bou 0

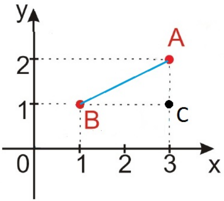
se nazývá **kartézská soustava souřadnic v rovině** a označuje s Oxy.

Každý bod prostoru lze zapsat pomocí tří souřadnic.



Vzdálenost bodů - rovina

Pomocí souřadnic lze spočítat vzdálenost dvou bodů v rovině:



Víme, že bod C má souřadnice $[3, 1]$.
Dále platí $|AC| = |3 - 1| = 2$ a $|BC| = |2 - 1| = 1$
Z Pythagorovi věty dostáváme $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

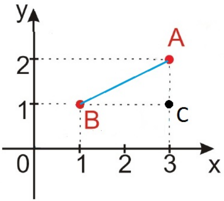
Vzorec

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ v rovině

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Vzdálenost bodů - rovina

Pomocí souřadnic lze spočítat vzdálenost dvou bodů v rovině:



Víme, že bod C má souřadnice $[3, 1]$.

Dále platí $|AC| = |3 - 1| = 2$ a $|BC| = |2 - 1| = 1$

Z Pythagorovi věty dostáváme $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

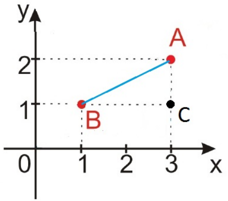
Vzorec

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ v rovině

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Vzdálenost bodů - rovina

Pomocí souřadnic lze spočítat vzdálenost dvou bodů v rovině:



Víme, že bod C má souřadnice $[3, 1]$.
Dále platí $|AC| = |3 - 1| = 2$ a $|BC| = |2 - 1| = 1$
Z Pythagorovi věty dostáváme $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

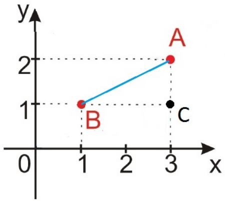
Vzorec

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ v rovině

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Vzdálenost bodů - rovina

Pomocí souřadnic lze spočítat vzdálenost dvou bodů v rovině:



Víme, že bod C má souřadnice $[3, 1]$.
Dále platí $|AC| = |3 - 1| = 2$ a $|BC| = |2 - 1| = 1$
Z Pythagorovi věty dostáváme $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

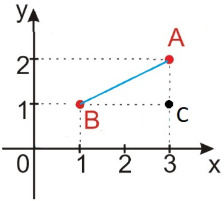
Vzorec

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ v rovině

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Vzdálenost bodů - rovina

Pomocí souřadnic lze spočítat vzdálenost dvou bodů v rovině:



Víme, že bod C má souřadnice $[3, 1]$.
Dále platí $|AC| = |3 - 1| = 2$ a $|BC| = |2 - 1| = 1$
Z Pythagorovi věty dostáváme $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

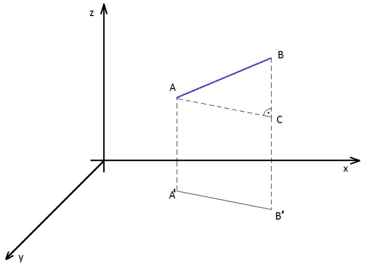
Vzorec

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ v rovině

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Vzdálenost bodů - prostor

Pomocí souřadnic lze spočítat vzdálenost dvou bodů v prostoru:



Vzorec

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ v prostoru

$$|AB| = \sqrt{|A'B'|^2 + (b_3 - a_3)^2}$$
$$= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Střed úsečky

Střed úsečky je charakterizován, že dělí úsečku na dvě stejné poloviny.

Uvažujme úsečku AB na číselné ose a bodům A a B odpovídají čísla a a b, potom střed najdeme:

$$S = \frac{a+b}{2}.$$

Vzorec

Souřadnice středu $S[s_1, s_2, s_3]$ úsečky AB, kde $A[a_1, a_2, a_3]$ a $B[b_1, b_2, b_3]$, jsou

$$s_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad s_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \qquad s_3 = \frac{a_3+b_3}{2}.$$

Střed úsečky

Střed úsečky je charakterizován, že dělí úsečku na dvě stejné poloviny.

Uvažujme úsečku AB na číselné ose a bodům A a B odpovídají čísla a a b, potom střed najdeme:

$$S = \frac{a+b}{2}.$$

Vzorec

Souřadnice středu $S[s_1, s_2, s_3]$ úsečky AB, kde $A[a_1, a_2, a_3]$ a $B[b_1, b_2, b_3]$, jsou

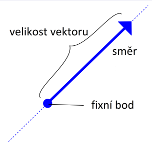
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \qquad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.$$

Vektor

Vektorové veličiny jsou velmi užitečné ve fyzice. Důležitou charakteristikou vektorové veličiny je to, že má jak **velikost** tak i **směr**. Musí mít obě tyto vlastnosti, aby byla zadána jednoznačně.

Příklad

Vektorovou veličinou je například posunutí. Posunutí nám říká, jak daleko jsme od vychozího (fixního) bodu a také náš směr vzhledem k tomuto bodu.

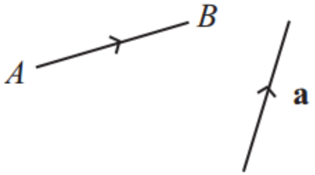


Příklad

Vektorová veličina je i rychlost v určitém směru, 60 km/h na sever.

Vektor

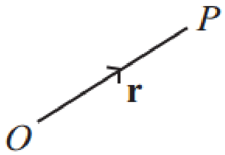
Vektory můžeme reprezentovat jako orientované úsečky. Obrázek níže ukazuje dva vektory.



Pro určení směru jsme jsme použili malou šipku. První vektor směřuje z bodu A do bodu B. Kdyby byla šipka obráceně, jednalo by se o **opačný vektor**, čili o vektor z bodu B do bodu A.

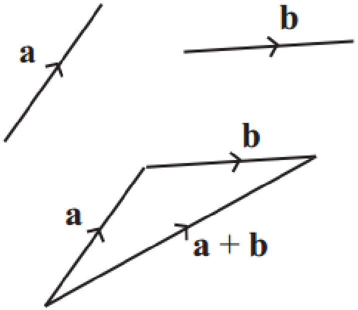
Polohový vektor

Někdy je vektor vázán k určitému bodu, například k počátku soustavy souřadnic. Takový vektor se nazývá **polohový vektor**. Vychází z počátku a končí v koncovém bodě P. Při psaní jej můžeme značit jako $\vec{OP}$, případně $\mathbf{r}$. Oba dva tyto výrazy odkazují na stejný vektor.



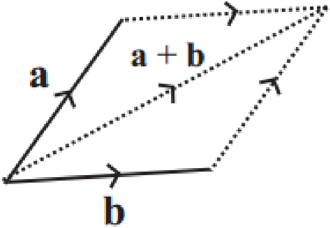
Sčítání vektorů

Při sčítání dvou vektorů se na ně díváme jako na posunutí. Nejprve provedeme první posun a pak druhý. Takže druhé posunutí musí začínat tam, kde první posunutí skončilo.



Sčítání vektorů

Existuje i další způsob, jak sčítat dva vektory. Místo toho, aby druhý vektor začínal tam, kde první končí, mohou oba začínat na stejném místě, a pak je doplníme na rovnoběžník.



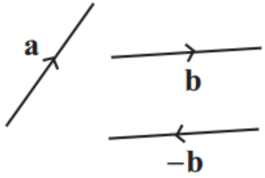
Součtem vektorů je uhlopříčka rovnoběžníku neboli třetí strana trojúhelníku.

Sčítání vektorů

Příklad: V rovině jsou dány body $A[1,3], B[-1,2], C[1,7], D[-1,1]$. Určete vektory **AB** a **CD** a ty pak sečtěte.

Odečítání vektorů

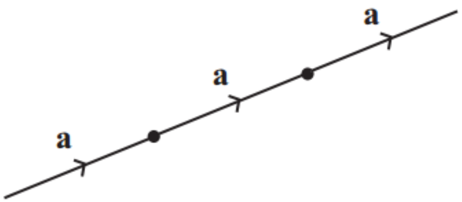
Stačí když si rozdíl $\vec{a} - \vec{b}$ přepíšeme do tvaru $\vec{a} + (-\vec{b})$, kdy $-\vec{b}$ má stejnou velikost jako $\vec{b}$ ale jeho směr bude opačný, nazýváme ho proto **opačný vektor** k $\vec{b}$.



Tedy odečíst dva vektory: $\vec{a} - \vec{b}$ znamená připočítat $-\vec{b}$ k $\vec{a}$.

Násobení vektorů číslem

Co se stane, když sčítáme $\vec{a}$ se sebou samým třeba i několikrát? Dostaneme násobek $\vec{a}$. Například $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$.



Podobně bychom postupovali, kdybychom chtěli n-násobek $\vec{a}$. Sčítali bychom vektor n-krát.

$$n \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \cdots + \vec{a}}_{n-krat}$$

Již jsem zavedli, že každý vektor je určený směrem a zároveň velikostí.

Velikost vektoru $\vec{u}$ budeme značit $|\mathbf{u}|$ nebo $|\vec{u}|$.

Vzorec

Pro každý vektor $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ v prostoru platí:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pro každý vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$ v rovině platí:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Remark

Nulový vektor je takový, který má nulovou velikost, značíme ho $\mathbf{o}$

Jednotkový vektor

Ješte nám k vysvětlení zbývá jeden pojem a tím je jednotkový vektor. Jestliže $\vec{a}$ je nějaký vektor, pak symbolem $\hat{\mathbf{a}}$ značíme jednotkový vektor ve směru $\vec{a}$. Jednotkovým vektorem nazýváme takový vektor, jehož délka je 1, čili

$$|\hat{\mathbf{a}}| = 1.$$

Toto značení nám dává další možnost jak zapsat $\vec{a}$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{\mathbf{a}}.$$

Jednotkový vektor

Příklad:

Uvažujme vektor $\vec{a} = (3, 2, 6)$, zkraťte tento vektor, tak aby měl jednotkovou délku, ale zachoval směr.

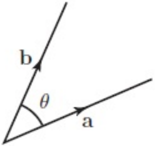
Jednotkový vektor

Jednotkovým vektorem k $\vec{a}$ je $\mathbf{\hat{a}}$ jehož délka je 1 a jeho směr je stejný jako směr $\vec{a}$. Vypočítáme ho jako podíl $\vec{a}$ a jeho délky $|\vec{a}|$

$$\mathbf{\hat{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Jedním ze způsobů, jak můžeme se dvěma vektory operovat, je **skalární součin**. Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů, jak již název napovídá, je **skalár**.

Uvažujme dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ na Obrázku 1. Všimněte si, že tyto dva vektory začínají ve stejném bodě. Úhel mezi nimi je označen θ.



Obrázek 1. Vektory a a b, mezi kterými je úhel θ.

Skalární součin

Skalární součin vektoru $\vec{a}$ a vektoru $\vec{b}$ definujeme následovně:

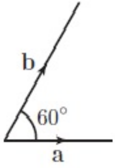
Skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je definován jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\theta,$$

kde $|a|$ je modul (velikost) vektoru a, $|b|$ je modul (velikost) vektoru b a θ je úhel mezi vektory a a b.

Skalární součin

Příklad Uvažujme dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (Obrázek 2). Předpokládejme, že vektor $\vec{a}$ má velikost 4, vektor $\vec{b}$ má velikost 5 a úhel mezi nimi je 60°.



Obrázek 2. Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, mezi kterými je úhel 60°.

Podle výše uvedené definice nalezneme skalární součin vektorů a a b

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta\\ &= 4\times 5\times\cos 60^\circ\\ &= 4\times 5\times\frac{1}{2} = 10\end{aligned}$$

Skalární součin

Další způsob učení skalárního součinu je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Příklad: Určete skalární součin vektorů $\vec{u} = (1; 2; -1)$ a $\vec{v} = (3; 1; 5)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = 0.$$

Vlastnosti Skalárního součinu

Skalární součin je **komutativní**, když

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Skalární součin je **distributivní**, když

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

nebo také ekvivalentně

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Vzorec

Úhel mezi vektory *(důsledek skalárního součinu)*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Příklad

V rovině jsou dány dva vektory $\vec{u} = (3; -1)$, $\vec{v} = (1; 2)$. Určete velikost úhlu mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Velikost obou vektorů

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Skalární součin

$$\vec{u}\vec{v} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

Velikost úhlu φ určíme:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi \doteq 1,4289 \quad (81°52'12'')$$

Vzorec

Úhel mezi vektory *(důsledek skalárního součinu)*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Příklad

V rovině jsou dány dva vektory $\vec{u} = (3; -1)$, $\vec{v} = (1; 2)$. Určete velikost úhlu mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Velikost obou vektorů

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Skalární součin

$$\vec{u}\vec{v} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

Velikost úhlu φ určíme:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi \doteq 1,4289 \quad (81^\circ 52' 12'')$$

Úhel mezi vektory

Vzorec

Úhel mezi vektory *(důsledek skalárního součinu)*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Příklad

V rovině jsou dány dva vektory $\vec{u} = (3; -1)$, $\vec{v} = (1; 2)$. Určete velikost úhlu mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Velikost obou vektorů

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Skalární součin

$$\vec{u}\vec{v} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

Velikost úhlu φ určíme:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi \doteq 1,4289 \quad (81^\circ 52' 12'')$$

Součin vektorů

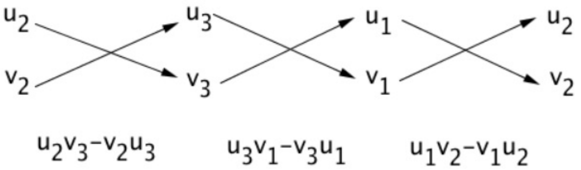
Vektorový součin je operace v prostou mezi dvěma vektory, která nám vrátí nový **vektor**, který je na tyto dva vektory kolmý.

Vzorec

Součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\vec{w} = (u_2 v_3 - v_2 u_3; u_3 v_1 - v_3 u_1; u_1 v_2 - v_1 u_2;)$$

Pro snadnější zapamatování:



Lineární kombinace vektorů

Operace sčítání a násobení konstantou jsou uzavřené ve vektorovém prostorů. Tzn.

- sečteme-li dva vektory dostaneme vektor $\vec{k} + \vec{l} = \vec{w}$,
- vynásobíme-li vektor konstantou dostaneme vektor $a \cdot \vec{v} = \vec{k}$, podobně $b \cdot \vec{u} = \vec{l}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Zkombinujeme tyto dvě operace dostaneme:

$$a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{u} = \vec{w}.$$

Můžeme tak říci, že vektor $\vec{w}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}$ a $\vec{u}$.

Vzorec

Obecně: pokud máme vektory $\vec{x}_1, x_2, \ldots, x_n$ a reálná čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$, kterým říkáme koeficienty, tak lineární kombinací těchto vektorů je vektor $\vec{v}$, který získáme

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{x}_1 + k_2 \cdot \vec{x}_2 \ldots + k_n \cdot \vec{x}_n.$$

Příklad:
Vyjádřete vektor $\vec{w} = (8; 9)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u} = (2; 5), \vec{v} = (-1; 3)$.

Lineární závislost vektorů

Konečná skupina vektorů $S = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru V se nazývá lineárně nezávislá jestliže rovnice

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

má jediné řešení $c_1 = \ldots = c_n = 0$. V opačném případě se nazývá lineárně závislá.

Lineární závislost vektorů

Dokažte, že:

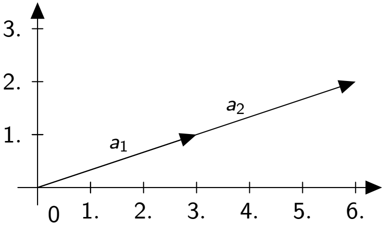
1. vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé.
   Doplňte obrázkem.
2. vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé.
   Doplňte obrázkem.

Řešení:

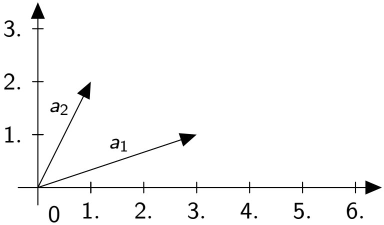
1. Platí, že $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, tj. $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = 0$, neboť $c_1 = 2$ a $c_2 = -1$, pak je zřejmé, že $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = 0$ a podmínka je splněna. Tedy vektory jsou lineárně závislé. Dále vektor $\mathbf{a}_2$ má stejný směr jako vektor $\mathbf{a}_1$ a je dvakrát tak dlouhý. Ukázka na Obr.1
2. V tomto případě přepíšeme rovnici $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = 0$ do tvaru:

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Pro tyto dvě rovnice existuje jen jedno řešení a to $c_1 = c_2 = 0$, tedy vektory jsou lineárně nezávislé.



Obr. 1 Vektory jsou lineárně závislé



Obr. 2 Vektory jsou lineárně nezávislé