

Množiny a výroková logika

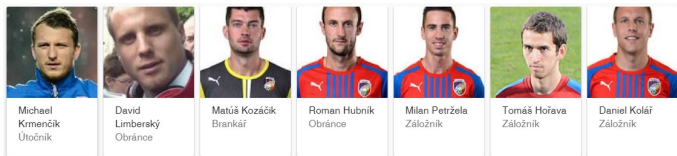
Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Zavedení pojmu množiny

- Jsme zvyklí v našem světě pojmenovávat skupiny objektů.
- Hráči FC Viktoria Plzeň



- Herci seriálu Hry o trůny



- Podobná asociace do matematiky

Značení množin a jejich vlastnosti

- velké písmeno

- množina symbolů pro karty $K = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$
- množina mincí

$$M = \left\{ \text{1 Kč}, \text{2 Kč}, \text{5 Kč}, \text{10 Kč}, \text{20 Kč}, \text{50 Kč} \right\}$$

- býtí prvkem

- epsilon "∈"
- pětikoruna ∈ M
- stokoruna ∉ M

- ignorujeme multiplicity

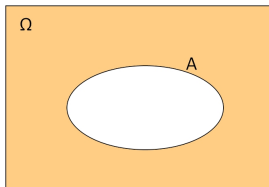
- každý prvek je v množině pouze jednou

- mohutnost množiny

Typy množin

- konečná množina
 - můžeme prvky vypsát bez ohledu na čas
 - $A = \{a, b, c, d, e\}$
- nekonečná množina
 - nelze vypsát všechny prvky
 - $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- prázdná množina
 - neobsahuje žádné prvky
 - $\emptyset, \{\}$
- podmnožina
 - množinová inkluze
 - všechny prvky jedné množiny jsou obsaženy v druhé množině
 - $A \subseteq B, A \subset B$

Unární operace - **Doplňěk/komplement** množiny ... \bar{A} , A'



Příklad

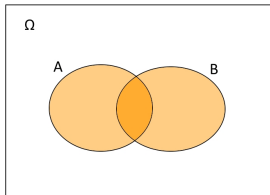
Ω ... *Studenti prvního ročníku ESF*

A ... *Ti studenti, kteří napsali vstupní test*

A' ... ?

Binární operace **sjednocení** množin ... " \cup "

- $A \cup B$ je seskupení všeho, co je v obou skupinách



Příklad

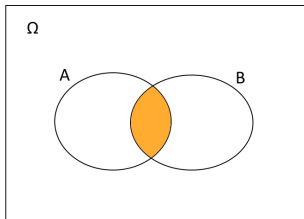
$$\text{Množina } M = \{\lambda, \mu, \alpha, \gamma\}$$

$$\text{Množina } N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

$$M \cup N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu\}$$

Binární operace - **průnik** množin ... " \cap "

- $A \cap B$ jsou prvky, které jsou společné oběma množinám



Příklad

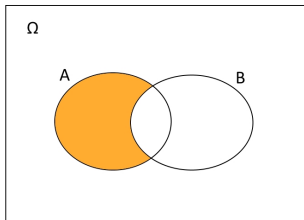
Označme A množinu olympijských medailistek v super G. Dále označme B množinu olympijských medailistek v paralelním obřím slalomu.

$$A \cap B = \{\text{Ledecká}\}$$

Operace s množinami

Binární operace - **rozdíl** množin ... " \setminus "

- $A \setminus B$ jsou prvky, které patří do množiny A a přitom nepatří do množiny B



Příklad

H je množina hodnocení ze zkoušky, tj. $H = \{A, B, C, D, E, F\}$

U je množina úspěšného hodnocení zkoušky, tj.

$$U = \{A, B, C, D, E\}$$

$H \setminus U = \{F\}$, tj. množina neúspěšného hodnocení zkoušky

Binární operace - **kartézský součin** ... " \times "

- $A \times B$ jsou všechny dvojice, kde první prvek je z první množiny a druhý prvek z druhé množiny

Příklad

$K_F = K_M = \{A, B, AB, 0\}$ je množina krevních skupin,
pak kartézský součin $K_F \times K_M =$
 $\{(A, A); (A, B); (A, AB); (A, 0); (B, A); (B, B); (B, AB); (B, 0);$
 $(AB, A); (AB, B); (AB, AB); (AB, 0); (0, A); (0, B); (0, AB); (0, 0)\}$

Výrok je tvrzení u něhož lze rozhodnout zda je pravdivé, nebo nepravdivé

Příklady výroků:

- Den má 86 400 sekund.
- $1 + 2 = 5$
- Strč prst skrz krk.
- S námi se vyplatí počítat.
- Máte rádi ESF?

Značení výroků a jejich pravdivostní hodnoty:

- výroky: p, q
- pravdivý - P, 1, T
- nepravdivý - N, 0, F

Kategorie vět, které nejsou výrokem.

otázky, rozkazy, názvy, subjektivní názory, výroky s proměnou

Negace výroku p , značíme $\neg p$

Není pravda, že ...

Neplatí, že ...

Příklad

Výrok p ...: Matematika 0 je zbytečný předmět.

Výrok $\neg p$...: Není pravda, že Matematika 0 je zbytečný předmět.

Pravdivostní tabulka

| Negace | |
|--------|----------|
| p | $\neg p$ |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Konjunkce výroku p, q , značíme $p \wedge q$; Výrok p a zároveň q

Příklad

Výrok p . . . : Petr je student prvního ročníku.

Výrok q . . . : Petr má prukaz ISIC.

Výrok $p \wedge q$: Petr je student prvního ročníku a zároveň má prukaz ISIC.

Pravdivostní tabulka

| Konjunkce | | |
|-----------|-----|--------------|
| p | q | $p \wedge q$ |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Disjunkce výroku p, q , značíme $p \vee q$; Výrok p nebo výrok q

Příklad

Výrok $p \dots$: Absolvování vstupního testu umožňuje studium Mat.

Výrok $p \dots$: Absolvování Mat0 umožňuje studium Mat.

Výrok $p \wedge q$: Absolvování vstupního testu, nebo absolvování Mat0 umožňuje studium Mat.

Pravdivostní tabulka

| Disjunkce | | |
|-----------|-----|------------|
| p | q | $p \vee q$ |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Implikace výroku p, q , značíme $p \Rightarrow q$; Jestliže výrok p , pak výrok q

Příklad

Výrok $p \dots$: Užili jsme projímadlo .

Výrok $q \dots$: Pos**li jsme se.

Výrok $p \Rightarrow q$: Jestli, že užijeme projímadlo, pak se pos***me.

Pravdivostní tabulka

| Implikace | | |
|-----------|-----|-------------------|
| p | q | $p \Rightarrow q$ |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Ekvivalence výroku p, q , značíme $p \Leftrightarrow q$; V výrok p , právě tehdy, když výrok q

Příklad

Výrok $p \dots$: Užili jsme projímadlo.

Výrok $q \dots$: Měli jsme zácpu.

Výrok $p \Leftrightarrow q$: Užili jsme projímadlo, právě tehdy, když jsme měli zácpu.

Pravdivostní tabulka

| Ekvivalence | | |
|-------------|-----|-----------------------|
| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Výroková forma je sdělení obsahující proměnou

Příklad

- *Lidé mají hmotnost větší jak 80 kg.*
- $x^2 = 1$, pro $x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- zadávání množin pomocí charakteristických vlastností,
- používání kvantifikátorů \forall, \exists

Příklad

- *Všichni studenti na přednášce byli pozvaní na Opening Party Support Centre.*
- *pro $\forall x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ platí $x^2 = 1$.*

Příklad

Negujte následující výroky:

- *Všichni studenti na přednášce byli pozvaní na Opening Party Support Centre.*
- *pro $\forall x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ platí $x^2 = 1$.*

Pravidla pro negování logických spojek:

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$

Příklad

Ukažme, že $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = P \Leftrightarrow Q$