Posloupnosti

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Co je posloupnost

Posloupnost je určité pravidlo, podle kterého přiřazujeme přirozeným číslům jiná čísla, která nemusí nutně být přirozená.

Tématický příklad. Vezměme si posloupnost čísel

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Snadno rozpoznáme pravidlo, které stanovuje členy posloupnosti a podle tohoto pravidla můžeme sestavit tabulku

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 5 \\ 4 & \to & 7 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Co je posloupnost

Zůstaneme-li u zobrazení, pak můžeme říci, že posloupnost a je zobrazení přirozených čísel do množiny čísel reálných, tj. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Důležitá poznámka

Posloupnost je každé zobrazení a, jehož definičním oborem jsou přirozená čísla a oborem hodnot je část množiny reálných čísel. Tedy $\mathcal{D}(a) = \mathbb{N}$ a $\mathcal{H}(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Stejně jako u přirozených čísel je přesně stanoveno, jak jdou po sobě, tak i posloupnost má pevně stanovené pořadí.

Značení posloupnosti

Výše jsme si řekli, že **posloupnost** je druhem zobrazení, která obvykle značíme $f(n)$. Přesto se u těchto speciálních zobrazení dělá „výjimka“ a **posloupnosti značíme**

$$a_n.$$

V různé literatuře, či na internetu, se můžeme setkat i se značením jiným, jako je například:

- (a_n) ,
- $\{a_n\}$,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zadání posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů,**
  např.$\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem,**
  např. $a_{n+1} = a_n + 2,\ a_1 = 1$ nebo
  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_1 = a_2 = 1$
- **Explicitním vzorcem pro n-tý člen,**
  např. $a_n = \frac{1}{n^2},\ a_n = n!,\ a_n = (-1)^n$

V předešlých příkladech jsme se již setkali se zadáním posloupnosti. Uvedenému způsobu říkáme **pomocí výčtu členů.** Správně bychom měli říci, že jsme zadali posloupnosti pomocí výčtu prvních několika členů.

Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

1. rekurentním vzorcem,
2. explicitním vzorcem.

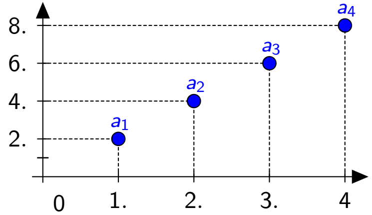
Určete n-tý člen posloupnosti $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots\}$

Již jsme řekli, že **posloupnost** je **speciálním druhem zobrazení** jehož definičním oborem jsou přirozená čísla (nebo jejich část). Proto vlastnosti posloupností budou **podobné** jako vlastnosti funkcí

Monotonie - tendence chování posloupnosti s každým dalším členem

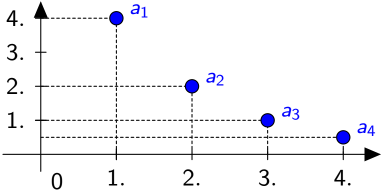
- rostoucí,
- klesající,
- nerostoucí,
- neklesající.

Rostoucí posloupnost



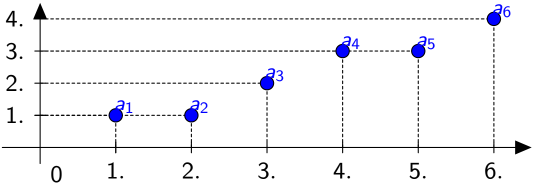
První čtyři členy posloupnosti $a_n = 2 \cdot n$.

Klesající posloupnost:



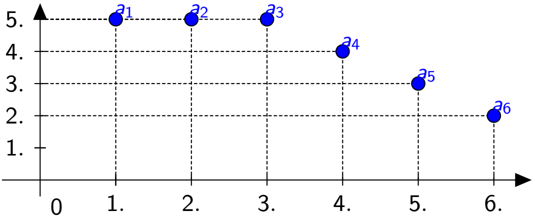
První čtyři členy posloupnosti $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 4$.

Neklesající



Prvních šest členů posloupnosti $a_n = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, \dots\}$.

Nerostoucí posloupnost:



Prvních šest členů posloupnosti $a_n = \{5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, \dots\}$.

Omezenost

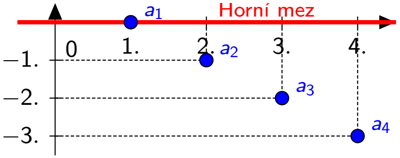
Ohraničenost nám u posloupností udává informaci o tom, zda má posloupnost nějakou mez.

Například posloupnost, která pro žádný člen nenabývá hodnoty menší než nula. Pak o takové posloupnosti řekneme, že je zdola ohraničená.

Rozlišujeme tyto případy ohraničenosti:

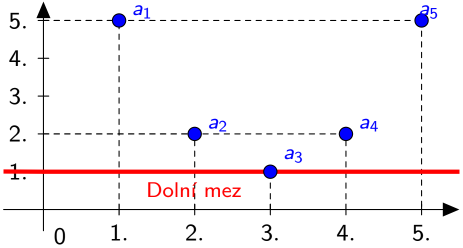
- shora ohraničená,
- zdola ohraničená,
- ohraničená (současně zdola i shora),
- neohraničená.

Shora ohraničená:



Shora ohraničená posloupnost $a_n = 1 - n$.

Zdola ohraničená:



Zdola ohraničená posloupnost $a_n = (n-3)^2 + 1$.

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností. V této přednášce se více zaměříme na první dvě:

1. aritmetická posloupnost,
2. geometrická posloupnost,
3. Fibonacciho posloupnost,
4. harmonická posloupnost,
5. aritmeticko-geometrická posloupnost.

Fibonacciho posloupnost - jen jako zajímavost

Jako **Fibonacciho posloupnost** je v matematice označována nekonečná posloupnost přirozených čísel, začínající $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ (čísla nacházející se ve Fibonacciho posloupnosti jsou někdy nazývána Fibonacciho čísla), kde každé číslo je součtem dvou předchozích.

Zlatý řez

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je druhem matematické posloupnosti, která se vyznačuje stálým rozdílem mezi libovolnými dvěma sousedními členy. Tento stálý rozdíl se nazývá **diference** a značí se písmenem d.

Pozor, číslo d může mít i zápornou hodnotu nebo může být rovno nule!

Aritmetická posloupnost

Označíme-li první člen posloupnosti $\{a_n\}$ jako a_1 potom k určení druhého člene a_2 stačí k prvnímu přičíst hodnotu diference d, tj.

$$a_2 = a_1 + d.$$

Pro určení člene a_3 přičteme ke druhému členu a_2 znovu hodnotu diference a získáme člen a_3

$$a_3 = a_2 + d \text{ atd.}$$

Je tedy jasně vidět to, co bylo řečeno výše. Libovolné dva sousední členy aritmetické posloupnosti mají stálý rozdíl.
Kdybychom chtěli znát $n+1$-ní člen, pak bychom podle této skutečnosti mohli napsat, že

$$a_{n+1} = a_n + d$$

a tento vzorec nazýváme **rekurentní zadání aritmetické posloupnosti.**

Aritmetická posloupnost

Často u posloupností známe první člen a_1 a zajímáme se o členy, které jsou například až na sté pozici nebo i vyšší.

Tématický příklad: Máme rekurentně zadánu posloupnost $\{a_n\}$ jako $a_{n+1} = a_n + 3$, kde $a_1 = 0$. Zajímá nás hodnota dvacátého člene této posloupnosti a_{20}. Pro jeho určení můžeme postupně určovat všechny členy až do hledaného dvacátého nebo zde nalézt zákonitost, která naše počítání urychlí.

Aritmetická posloupnost

Sestavme tabulku několika prvních členů

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= a_1 + 3 &&= 3 \\
a_3 &= a_2 + 3 &&= 6 \\
a_4 &= a_3 + 3 &&= 9 \\
a_5 &= a_4 + 3 &&= 12 \\
a_6 &= a_5 + 3 &&= 15 \\
&\vdots &&\vdots
\end{aligned}
$$

Při bližším prohlédnutí tabulky si lze všimnout, že mezi prvním a třetím členem je rozdíl 6, který odpovídá dvojnásobku diference. Mezi prvním a čtvrtým členem je rozdíl 9, což odpovídá trojnásobku diference. Mezi prvním a pátým je rozdíl čtyřnásobek diference atd.

Všimněme si, že mezi prvním a libovolným dalším členem je vždy rozdíl, který odpovídá součinu

diference · (pořadí hledaného prvku − pořadí prvního prvku).

Aritmetická posloupnost

Vzoreček

Vzorec pro n-tý člen Přičteme-li k tomuto součinu navíc hodnotu prvního člene, získáváme hodnotu člene, který nás zajímá. Tuto skutečnost zapíšeme do vzorce, který se nazývá **vzorec pro** n**-tý člen**

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Nyní je už snadné určit hodnotu a_{20} pouze dosadíme do vzorce hodnoty za n, a_1 a d.

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu a_1 známe hodnotu jiného.

Vzoreček

Vzorec r-tého členu z s-tého Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec r-tého členu z s-tého** *a zní*

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d.$$

Zde je a_r hledaný člen a a_s člen, který známe.

Pokud bychom položili $r = n$ a $s = 1$, pak obdržíme

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Aritmetická posloupnost

Úkol: Sečtěte čísla od 1 do sta.

Tady víc než kde jinde platí, že matematika není o počítání, ale o tom jak se počítání vyhnout.

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.
Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Tímto způsobem můžeme každou dvojici přepsat jako $a_1 + a_n$ a těchto dvojic bude polovina z celkového počtu sčítaných členů. Protože je počet členů n, potom počet všech dvojic (součtů) je $\frac{n}{2}$. Nyní, když vynásobíme obě čísla, získáme součet s_n prvních n členů a odpovídající vzorec je tvaru

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde každý člen kromě prvního je stálým násobkem předchozího členu. Tento násobek se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti a pro posloupnosti s nenulovými členy je roven podílu libovolného členu kromě prvního a členu předchozího.

Geometrická posloupnost

Označíme-li první člen posloupnosti $\{a_n\}$ jako a_1 potom k určení druhého člene a_2 stačí k první vynásobit kvocientem q, tj.

$$a_2 = a_1 \cdot q.$$

Pro určení člene a_3 máme

$$a_3 = a_2 \cdot q \text{ atd.}$$

Je tedy jasně vidět to, co bylo řečeno výše. Libovolné dva sousední členy geometrické posloupnosti mají stálý podíl.
Kdybychom chtěli znát $n+1$-ní člen, pak bychom podle této skutečnosti mohli napsat, že

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

a tento vzorec nazýváme **rekurentní zadání geometrické posloupnosti.**

Často u posloupností známe první člen a_1 a zajímáme se o členy, které jsou například až na sté pozici nebo i vyšší.

Tématický příklad: Máme rekurentně zadánu posloupnost $\{a_n\}$ jako $a_{n+1} = a_n \cdot 3$, kde $a_1 = 1$. Zajímá nás hodnota dvacátého člene této posloupnosti a_{20}. Pro jeho určení můžeme postupně určovat všechny členy až do hledaného dvacátého nebo zde nalézt zákonitost, která naše počítání urychlí.

Geometrická posloupnost

Sestavme tabulku několika prvních členů

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 \cdot 3 &&= 3 \\ a_3 &= a_2 \cdot 3 &&= 9 \\ a_4 &= a_3 \cdot 3 &&= 27 \\ a_5 &= a_4 \cdot 3 &&= 81 \\ a_6 &= a_5 \cdot 3 &&= 243 \\ &\vdots &&\vdots \end{aligned}$$

Jestliže chceme určit a_6 potřebujeme znát a_5, když známe a_5 můžeme dosadit.

$$a_6 = (a_4 \cdot 3) \cdot 3$$

pro a_4 dosadíme a_3

$$a_6 = ((a_3 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3$$

atd. až dostaneme

$$a_6 = ((((a_1 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 = a_1 \cdot 3^5.$$

Vzoreček r-tého členu z s-tého

Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec r-tého členu z s-tého** *a zní*

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}.$$

Zde je a_r hledaný člen a a_s člen, který známe.

Pokud bychom položili $r = n$ a $s = 1$, pak obdržíme

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Geometrická posloupnost

Pří hře ruleta existuje schéma, které by mělo zaručovat v ideálním případě po několika hrách jistý zisk (pravděpodobně po několika opakování je to zakázané). Sázíme pouze na barvu (červená/černá) první vklad je 10 Kč pokud uhádneme je výhra je 20 Kč, jestliže neuhádneme vsadíme 20 Kč. Uhádneme-li máme 40, neuhádneme vsadíme v další hře 40. Určete: a) kolik utratíme jestliže uspějeme až v šesté hře b) v kolikáté hře musíme uspět, abychom měli zisk právě 10 Kč?

Geometrická posloupnost

Z řešení předchozího příkladu máme součet prvních 6 členů, lze vyvodit, že

$$10(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 10 \cdot (2^6 - 1).$$

Kdybychom sázeli trojnásobek změnil by se předchozí zápis

$$10(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) = 10 \cdot (3^6 - 1)/2.$$

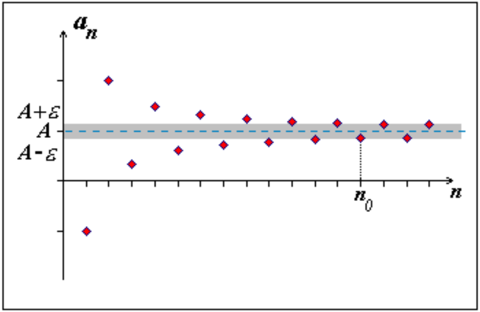
Vzoreček

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti

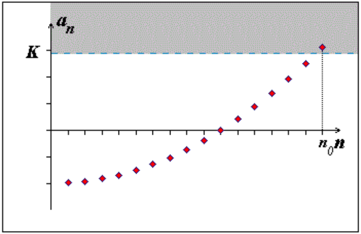
$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Posloupnost $\{a_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu A, (konverguje k limitě $A \in \mathbb{R}$, je konvergentní) jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí

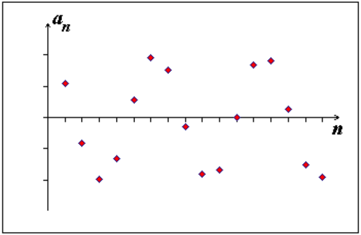
$$|a_n - A| < \epsilon.$$



Nevlastní limita



Neexistence limity



Základní vlastnosti

Posloupnost se nazývá **konvergentní**, pokud má vlastní (reálnou) limitu A. Posloupnost se nazývá **divergentní**, pokud není konvergentní.

Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti a nechť $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$ a c je libovolné reálné číslo. Potom jsou konvergentní posloupnosti $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n), (a_n b_n), (c \cdot a_n)$ a platí

$$\begin{aligned}
\lim(a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n = A + B \\
\lim(a_n - b_n) &= \lim a_n \lim b_n = A - B \\
\lim(a_n b_n) &= \lim a_n \lim b_n = AB \\
\lim(c \cdot a_n) &= c \cdot \lim a_n = c \cdot A
\end{aligned}$$