Stručný úvod do kombinatoriky

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Kombinační číslo

Studenti jazykového gymnázia mají na výběr ze čtyř jazyků (angličtiny, němčiny, francouštiny, ruštiny), během studia se budou věnovat právě dvěma jazykům. Kolika způsoby mohou studenti vybírat? Máme množinu $J = \{A, N, F, R\}$, potom $cardJ = 4$.

Student tedy může vybírat z:

$$\{A, N\}, \{A, F\}, \{A, R\}, \{N, F\}, \{N, R\}, \{F, R\}.$$

$$\binom{4}{2} = 6$$

Kombinační číslo - obecně

Chceme-li vybrat k-prvkové podmnožiny z n-prvkové množiny, pak toto můžeme vyjádřit kombinačním číslem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{k!}$$

Vlastnosti kombinačního čísla

Pro $k, n \in \mathbb{N}$ a $n \geq k$ platí:

- $\binom{0}{0} = 1$,
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{1} = n$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Modifikujme příklad 1

Při studiu si student vybírá tři jazyky ze čtyř, kde jazyk na prvním místě je hlavní (C1), jazyk na druhém místě je vedlejší (B2) a na třetím místě je doplňkový jazyk (A2). Vypište všechny možnosti. Pak je zřejmé, že výběr A, N, R NENÍ stejný jako výběr N, R, A.

A,N,R	N,R,A	R,A,N	A,R,N	N,A,R	R,N,A
A,N,F	N,F,A	F,A,N	A,F,N	N,A,F	F,N,A
A,F,R	F,R,A	R,A,F	A,R,F	F,A,R	R,F,A
F,N,R	N,R,F	R,F,N	F,R,N	N,F,R	R,N,F

Modifikujme příklad 1

Při studiu si student vybírá tři jazyky ze čtyř, kde jazyk na prvním místě je hlavní (C1), jazyk na druhém místě je vedlejší (B2) a na třetím místě je doplňkový jazyk (A2). Vypište všechny možnosti. Pak je zřejmé, že výběr A, N, R NENÍ stejný jako výběr N, R, A.

A,N,R	N,R,A	R,A,N	A,R,N	N,A,R	R,N,A
A,N,F	N,F,A	F,A,N	A,F,N	N,A,F	F,N,A
A,F,R	F,R,A	R,A,F	A,R,F	F,A,R	R,F,A
F,N,R	N,R,F	R,F,N	F,R,N	N,F,R	R,N,F

Počet všech možností z příkladu výše můžeme vyjádřit jako:

$$6 \cdot \binom{4}{3} = 24, \qquad\qquad \text{kde } 6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Tento výpočet můžeme napsat obecně

$$k! \cdot \binom{n}{k} = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

speciální případ

Na večírek jisté firmy je pro zaměstnance připravena barmanská ahow(B), raut (R), živá hudba (H), degustace vín (D). Žádné dvě akce neprobíhají zároveň. Kolika způsoby může akce na večírku uspořádat?

B,R,H,D	D,B,R,H	H,D,B,R	R,H,D,B	B,D,R,H
B,H,D,R	B,R,H,D	B,D,H,R	...	...
R,D,H,B	...	...		
B,D,H,R				

Počet všech možností můžeme vyjádřit obdobně jako v předchozím příkladu

$$24 \cdot \binom{4}{4} = 24 \cdot 1, \qquad \text{kde } 24 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Speciální případ

Tento výpočet lze zobecnit na pro n prvků a vyjádřit pak vzorcem:

$$n!\left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = n!$$

Úlohy bez opakování

Postupně jak šla přednáška, tak jsem zavedli:

- **Kombinace**

$$K(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Variace**

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Permutace**

$$P(n) = n!$$

Úlohy s opakování

Pro celkovou ucelenost, zavedeme všechny předchozí možnosti s opakováním:

- **Kombinace**

$$K'(n,k) = \binom{n+k+1}{k}$$

- **Variace**

$$V'(n,k) = n^k$$

- **Permutace**

$$P'(n) = \left(\begin{array}{c} (k_1 + k_2 \dots k_n)! \\ k_1!k_2! \dots k_n \end{array} \right)$$

Shrnutí semestru

Témata:

- Množiny a výroková logika,
- Úprava algebraických výrazů,
- Rovnice a nerovnice,
- Funkce
- Lineární prostory
- Analytické geometrie v rovině
- Analytická geometrie v prostoru
- Posloupnosti
- Úvod do kombinatoriky

Diskuze:

- Zamyšlení nad kurzem,
- Zhodnocení kurzu,
- Návrhy na zlepšení.