NEJISTOTA – řešené příklady

1. Spotřebitel má bohatství ve výši $w = 100$ Kč. Pokud dojde k nepříznivé události, ztratí 20 Kč, pokud dojde k příznivé události, nezíská nic. K nepříznivé události dojde s pravděpodobností $\pi = 0{,}2$. Spotřebitel může uzavřít pojištění, podle kterého mu v případě nepříznivé události pojišťovna vyplatí částku K, pokud zaplatí pojistné $0{,}2K$. Spotřebitel má von Neumann-Morgensternovu užitkovou funkci $u = \pi\sqrt{c_b} + (1-\pi)\sqrt{c_g}$, kde c_b je jeho spotřeba v případě nepříznivé události a c_g v případě příznivé události. Jak velké pojistné plnění K si spotřebitel zvolí?

   Řešení 1

   Spotřebitel si volbou pojistného plnění vybírá jeden z následujících podmíněných spotřebních plánů

   - $c_b = 80 + K - 0{,}2K$ s pravděpod. 20 %.
   - $c_g = 100 - 0{,}2K$ s pravděpodobností 80 %.

   Substitucí odvodíme linii rozpočtu. Např. si můžeme z rovnice $c_b = 80 + K - 0{,}2K$ vyjádřit

$$K = \frac{c_b - 80}{0{,}8} \tag{1}$$

   a dosadit tento výraz do druhé rovnice

$$c_g = 100 - 0{,}2\frac{c_b - 80}{0{,}8}$$

$$c_g = 120 - \frac{1}{4}c_b. \tag{2}$$

   Linii rozpočtu (2) můžeme také napsat jako

$$\frac{1}{4}c_b + c_g = 120.$$

   Spotřebitel má monotónní preference, protože větší spotřeba ve výsledném stavu c_b i ve výsledném stavu c_g mu přináší větší užitek. Vybere si takový spotřební plán podél své linie rozpočtu, který mu přináší maximální užitek. Budeme řešit maximalizační úlohu

$$\max_{c_b, c_g} u = 0{,}2\sqrt{c_b} + 0{,}8\sqrt{c_g}$$

$$\text{při omezení} \quad \frac{1}{4}c_b + c_g = 120.$$

   Tuto úlohu můžeme řešit např. tak, že dosadíme výraz pro c_b z linie rozpočtu do užitkové funkce. Tím získáme neomezenou optimalizační úlohu

$$\max_{c_b} v = \frac{2}{10}\sqrt{c_b} + \frac{8}{10}\sqrt{120 - \frac{1}{4}c_b}$$

   Extrém funkce najdeme tak, že první derivaci užitkové funkce položíme rovnou nule, tedy

$$\frac{dv}{dc_b} = \frac{1}{10\sqrt{c_b^*}} - \frac{1}{10\sqrt{120 - \frac{1}{4}c_b^*}} = 0.$$

$$\sqrt{120 - \frac{1}{4}c_b^*} = \sqrt{c_b^*}$$

$$120 - \frac{1}{4}c_b^* = c_b^*$$

$$85c_b^* = 1\,920$$

$$c_b^* = 96.$$

   Tento výsledek je maximum funkce, protože je užitková funkce konkávní, tedy druhá derivace funkce je záporná:

$$\frac{d^2v}{dc_b^2} = -\frac{1}{20c_b^{*\frac{3}{2}}} - \frac{1}{80\left(120 - \frac{1}{4}c_b^*\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

   Velikost spotřeby v příznivém stavu získáme dosazením do rovnice (2)

$$c_g^* = 120 - \frac{1}{4}c_b^* = 96.$$

   Velikost zvoleného pojistného plnění získáme dosazením do rovnice (1)

$$K = \frac{96 - 80}{0,8} = 20.$$

   Řešení 2

   Pokud jsou indiferenční křivky hladké a konvexní a je zaručeno vnitřní řešení, bude pro optimum spotřebitele platit, že sklon indiferenční křivky se rovná sklonu linie rozpočtu:

$$\mathrm{MRS}(c_b^*, c_g^*) = -\frac{p_b}{p_g}$$

$$-\frac{0{,}1\sqrt{c_g^*}}{0{,}4\sqrt{c_b^*}} = -\frac{1}{4}$$

$$c_g^* = c_b^*.$$

Dosadíme do linie rozpočtu

$$0{,}25c_b^* + c_b^* = 120$$
$$c_b^* = 96.$$

Velikost spotřeby v příznivém stavu získáme dosazením do rovnice (2)

$$c_g^* = 120 - \frac{1}{4}c_b^* = 96.$$

Velikost zvoleného pojistného plnění získáme např. dosazením do rovnice (1)

$$K^* = \frac{c_b^* - 80}{0,8} = 20.$$

2. Spotřebitel má bohatství ve výši $w = 100$ Kč. Může si koupit za 20 Kč loterii, ve které může vyhrát 1 000 Kč. Pravděpodobnost výhry je $\pi = 0{,}01$. Spotřebitel má von Neumann-Morgensternovu užitkovou funkci a jeho funkce užitku ze spotřeby v každém výsledném stavu je $u(x) = x^2$. Koupí si spotřebitel tuto loterii? Koupil by si ji, kdyby byl rizikově neutrální? Co můžeme říct o vztahu spotřebitele k riziku při užitku ze spotřeby ve výsledném stavu $u(x) = x^2$?

   Řešení

   Aby si spotřebitel tuto loterii koupil, musel by být jeho očekávaný užitek z loterie vyšší než očekávaný užitek z bohatství bez loterie. Tedy muselo by platit, že

$$0{,}01u(c_g) + 0{,}99u(c_b) > u(w),$$

   kde c_g je spotřeba, když spotřebitel vyhraje, a c_b spotřeba, když nevyhraje.

   Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme

$$0{,}01 \times 1\,080^2 + 0,99 \times 80^2 > 100^2$$
$$18\,000 > 10\,000.$$

   Spotřebitel si tuto loterii zakoupí.

   Pokud by tento spotřebitel byl rizikově neutrální, jeho očekávaný užitek z loterie by byl

$$0{,}01u(c_g) + 0,99u(c_b) =$$
$$= 0{,}01c_g + 0,99c_b = 10{,}8 + 79{,}2 = 90.$$

   Jeho očekávaný užitek z loterie je nižší než užitek z bohatství $u(w) = w = 100$. Rizikově neutrální spotřebitel by si tuto loterii nekoupil.

   Při užitku ze spotřeby ve výsledném stavu $u(x) = x^2$ spotřebitel vyhledává riziko.