TECHNOLOGIE A MAXIMALIZACE ZISKU – řešené příklady

Technologie

1. Firma má produkční funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3}x_2^{2/3}$. Pokud bychom si nakreslili izokvanty této firmy tak, že budeme mít x_1 na vodorovné a x_2 na svislé ose, jaký by byl sklon linie, která bude vycházet z počátku souřadnic a bude protínat izokvanty v bodech se sklonem -1?

   Řešení

   Hledáme body na izokvantě se sklonem -1, bude tedy platit, že

$$TRS = -1$$

$$-\frac{\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -1$$

$$-\frac{\frac{2}{3}x_1^{-2/3}x_2^{2/3}}{\frac{4}{3}x_1^{1/3}x_2^{-1/3}} = -1$$

$$x_2 = 2x_1.$$

   Pokud bude firma vyrábět při sklonu izokvanty -1, bude používat 2 jednotky vstupu 2 na každou jednotku vstupu 1. Sklon této linie je 2.

Maximalizace zisku

2. Dokonale konkurenční firma má produkční funkci $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/4}$. Cena vstupu 1 je $w_1 = 2$ a cena vstupu 2 je $w_2 = 1$. Cena výstupu je $p = 4$. Při jakém množství vstupů bude firma maximalizovat zisk?

   Řešení

   Firma hledá takové množství vstupů 1 a 2, aby maximalizovala zisk. Řešíme tedy následující úlohu:

$$\max_{x_1,x_2} \pi = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2.$$

   Spočítáme podmínky prvního řádu – parciální derivace ziskové funkce položíme rovny nule. Pro optimální množství vstupů x_1^* a x_2^* platí, že

$$pMP_1(x_1^*, x_2^*) - w_1 = 0$$

$$pMP_2(x_1^*, x_2^*) - w_2 = 0,$$

   kde $MP_1(x_1^*, x_2^*)$ a $MP_2(x_1^*, x_2^*)$ jsou mezní produkty vstupů 1 a 2 při optimálním množství vstupů x_1^* a x_2^*. Mezní produkty se rovnají parciální derivaci produkční funkce:

$$MP_1(x_1, x_2) = \frac{\partial x_1^{1/2}x_2^{1/4}}{\partial x_1} = \frac{x_2^{1/4}}{2x_1^{1/2}}$$

$$MP_2(x_1, x_2) = \frac{\partial x_1^{1/2}x_2^{1/4}}{\partial x_2} = \frac{x_1^{1/2}}{4x_2^{3/4}}.$$

   Po dosazení do podmínek prvního řádu tedy získáme dvě rovnice o dvou neznámých

$$4\frac{x_2^{1/4}}{2x_1^{1/2}} - 2 = 0$$

$$4\frac{x_1^{1/2}}{4x_2^{3/4}} - 1 = 0.$$

   Řešením těchto rovnic dostaneme optimální množství vstupů $x_1^* = 1$ a $x_2^* = 1$.

3. Máme dokonale konkurenční firmu, která používá k výrobě jednoho produktu vstupy 1 a 2, které nakupuje na dokonale konkurenčních trzích. Cena produktu se zvýšila o 10 Kč. Cena vstupu 2 vzrostla o 200 Kč za hodinu a množství vstupu 2 kleslo o 100 hodin za rok. Cena vstupu 1 se nezměnila. Co můžeme říci o nabízeném množství produkce, pokud víme, že tato firma maximalizuje zisk?

   Řešení

   Máme dvě období t a s, ve kterých se změnily ceny některých vstupů a výstupů. Pokud firma maximalizuje zisk, musí platit slabý axiom maximalizace zisku. Ten říká, že jestliže se mezi časem t a s nezmění produkční funkce, pak musí platit zároveň následující dvě nerovnice:

$$p^ty^t - w_1^tx_1^t - w_2^tx_2^t \geq p^ty^s - w_1^tx_1^s - w_2^tx_2^s$$

$$p^sy^s - w_1^sx_1^s - w_2^sx_2^s \geq p^sy^t - w_1^sx_1^t - w_2^sx_2^t.$$

   Tyto nerovnice říkají, že pokud si firma maximalizující zisk v čase t při cenách (p^t, w_1^t, w_2^t) zvolila výrobní plán (y^t, x_1^t, x_2^t) a v čase s při cenách (p^s, w_1^s, w_2^s) jiný výrobní plán (y^s, x_1^s, x_2^s), musí mít ze zvolených výrobních plánů alespoň takový zisk jako z výrobních plánů, které si nevybrala.

   Když druhou nerovnici vynásobíme -1 (a přehodíme strany), dostaneme následující nerovnice:

$$p^ty^t - w_1^tx_1^t - w_2^tx_2^t \geq p^ty^s - w_1^tx_1^s - w_2^tx_2^s$$

$$-p^s y^t + w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t \geq -p^s y^s + w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s.$$

Jestliže je u obou nerovnic levá strana alespoň tak velká jako pravá strana, pak musí být i součet levých stran alespoň tak velký jako součet pravých stran, tedy

$$(p^t - p^s)y^t - (w_1^t - w_1^s)x_1^t - (w_2^t - w_2^s)x_2^t$$
$$\geq (p^t - p^s)y^s - (w_1^t - w_1^s)x_1^s - (w_2^t - w_2^s)x_2^s.$$

Nyní od celé nerovnice odečteme pravou stranu a dostaneme

$$\Delta p \Delta y - \Delta w_1 \Delta x_1 - \Delta w_2 \Delta x_2 \geq 0,$$

kde $\Delta p = p^t - p^s$, $\Delta y = y^t - y^s$, atd.

Do této nerovnice dosadíme hodnoty ze zadání:

$$10\Delta y - 200(-100) \geq 0$$
$$10\Delta y \geq -20\,000$$
$$\Delta y \geq -2\,000.$$

Ze slabého axiomu maximalizace zisku vyplývá, že nabídka produktu y vzrostla libovolně nebo nabídka produktu y klesla a to maximálně o 2 000 jednotek.