Kapitola 4

Maticový počet

Řešené příklady

1. Uzavřená ekonomika a IS–LM model[1]

Mějme uzavřenou ekonomiku, kterou lze popsat systémem rovnic popisujícím rovnováhu na trhu statků a trhu peněz - IS a LM vztah. Trh statků (IS část modelu) je popsána rovnicemi:

$$\begin{aligned} C &= 15 + 0,8(Y - T), \\ T &= -25 + 0,25Y, \\ I &= 65 - R, \\ G &= 94, \end{aligned}$$

kde C je spotřeba, T daňové příjmy, Y agregátní výstup, I investice, R úroková sazba a G vládní výdaje. Trh peněz (LM část modelu) lze popsat pomocí rovnic

$$\begin{aligned} L &= 5Y - 50R \\ M &= 1500, \end{aligned}$$

kde L je poptávka po penězích a M je fixní nabídka peněz. Nalezněte rovnovážnou úroveň Y a R. Vypočítejte vládní deficit (nebo přebytek) a obchodní deficit (nebo přebytek) v rovnováze.

Zadaný systém rovnic lze převést do maticovému zápisu $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$, kde A je 2×2 matice koeficientů, $\mathbf{p}$ je 2×1 vektor zahrnující Y a R a $\mathbf{p}$ je 2×1 vektor konstant. V prvním kroku nalezneme rovnice rovnováhy na trhu zboží a trhu peněz - nalezneme IS a LM křivky. IS křivku nalezneme jako součet $Y = C + I + G$:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G, \\ Y &= 15 + 0,8(Y - (-25 + 0,25Y)) + 65 - R + 94, \\ Y &= 485 - 2,5R. \end{aligned}$$

Rovnováhu na trhu peněz lze popsat pomocí LM křivky a ta odpovídá situaci kdy $L = M$:

$$\begin{aligned} 1500 &= 5Y - 50R, \\ 300 &= Y - 10R. \end{aligned}$$

[1] Příklad vychází z Hoy (2011).

IS a LM křivky nám nyní dávají soustavu rovnic o dvou neznámých

$$
\begin{aligned}
Y + 2,5R &= 485, \\
Y - 10R &= 300,
\end{aligned}
$$

které lze přepsat do tvaru

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2,5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}.
$$

Jednoduchými úpravami získáme R a Y

$$
\begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2,5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448 \\ 14,8 \end{bmatrix}.
$$

Rovnovážná hodnota výstupu a úrokové sazby v naší ekonomice je $[Y, R] = [448; 14, 8]$. Odtud lze snadno vypočítat daňový příjem $T = 25 + 0,25(448) = 87$ a stanovit vládní deficit jako $T - G = 87 - 94 = -7$.

2. Mzdová mezera a mezinárodní obchod [2]

Mzdová mezera mezi více vzdělanými a relativně méně vzdělanými pracovníky se v 80. letech v USA značně zvětšila. Ve stejném období se obchod s rozvojovými zeměmi začal více podílet na amerických importech. Rádi bychom zjistili, zda je větší mezinárodní konkurence možným zdrojem rostoucího mzdového nepoměru. Možnou spojitost mezi těmito dvěma trendy ukazuje teorie mezinárodního obchodu jinak známá jako Stolper–Samuelsonův efekt.

V našem příkladu budeme uvažovat jednoduchý model obchodu, kde existují pouze dva výrobní faktory, a to vzdělaná (S) a nevzdělaná (U) pracovní síla. Tato země produkuje pouze dva statky, textil (T) a počítače (C). Produkce je popsána tzv. technickými koeficienty a_{ij}, z nichž každý popisuje množství použitého vstupu i (S nebo U) k výrobě produktu j (T nebo C). Tyto koeficienty jsou

$$
a_{UT} = \tfrac{U_T}{T}, \qquad a_{ST} = \tfrac{S_T}{T}, \qquad a_{UC} = \tfrac{U_C}{C}, \qquad a_{SC} = \tfrac{S_C}{C},
$$

kde U_C a S_C jsou počty nevzdělaných a vzdělaných pracovníků v počítačovém průmyslu a U_T, S_T jsou počty nevzdělaných a vzdělaných pracovníků v textilním průmyslu. Pro naši aplikaci předpokládáme, že tyto technické koeficienty jsou konstantní.

Dále zavedeme předpoklad dokonale konkurenčního trhu, který implikuje nulový zisk. Také víme, že celkové mzdy se musí rovnat celkovým tržbám. Označíme tedy mzdu pro nevzdělané pracovníky jako w a pro vzdělané pracovníky jako s. Podmínky nulového zisku pak jsou:

$$
\begin{aligned}
U_C w + S_C s &= p_C C, \\
U_T w + S_T s &= p_T T,
\end{aligned}
$$

kde p_C a p_T značí příslušné ceny počítačů a textilu. Obě podmínky můžeme podělit celkovým výstupem v každém odvětví, čímž dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{U_C}{C} w + \frac{S_C}{C} s &= p_C, \\
\frac{U_T}{T} w + \frac{S_T}{T} s &= p_T.
\end{aligned}
$$

[2] Příklad vychází z Klein (2002) str.109.

Všimněte si, že tyto rovnice odpovídají technickým koeficientům. Takový systém tedy může být vyjádřen jako $Aw = p$, kde A je matice technických koeficientů, w je vektor mezd a p je vektor cen, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{UT} & a_{ST} \\ a_{UC} & a_{SC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_T \\ p_C \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočítáme determinant matice A jako $|A| = a_{UT}a_{SC} - a_{UC}a_{ST}$. Tento determinant bude kladný pokud se v textilní výrobě využívá nevzdělaná pracovní síla relativně více než při výrobě počítačů (tedy $a_{UT}/a_{ST} > a_{UC}/a_{SC}$). Budeme předpokládat, že tomu tak je. Všimněte si, že pokud by relativní využití pracovní síly bylo stejné, pak by byl determinant nulový. To by znamenalo, že tato dvě odvětví jsou v podstatě totožná. Změny v ceně počítačů nebo textilu ovlivňují mzdy obou skupin pracovníků. Řešení tohoto systému rovnic, $w = A^{-1}p$, to přímo ukazuje. S použitím předchozích výsledků k nalezení A^{-1} dostáváme

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{SC} & -a_{ST} \\ -a_{UC} & a_{UT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_T \\ p_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ s \end{pmatrix}.$$

V tomto modelu se efekt rostoucího obchodu s rozvojovými zeměmi projeví jako snížení relativní ceny textilu. Pokud použijeme komparativní statiku a uvažujeme pokles v p_T a neměnné p_C, pak můžeme řešení přepsat ve tvaru změn, čímž získáme

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{SC} & -a_{ST} \\ -a_{UC} & a_{UT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta w \\ \Delta s \end{pmatrix}.$$

Výsledek ukazuje, že $\Delta w = a_{SC}/|A|\Delta p_T$ a $\Delta s = -a_{UC}/|A|\Delta p_T$. Jelikož je Δp_T záporná, tento výsledek dokazuje, že mzdy pro nevzdělané pracovníky se sníží a mzdy pro vzdělané pracovníky budou růst. Z toho vyplývá, že spojitost mezi rostoucím obchodem s rozvojovými zeměmi a růstem mzdové mezery mezi vzdělanými a nevzdělanými pracovníky v USA je možná.

3. Lineární regrese

Lineární regrese je další oblast, kde lze využít maticový počet. Jednoduchým příkladem lineární regrese je

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,$$

kde $i = 1, ..., n$, y_i nazýváme vysvětlovanou proměnnou, člen β_0 úrovňovou konstantou, β_1 regresním koeficientem, x_i vysvětlujícími proměnnými a ϵ_i rezidui. Systém můžeme rozepsat jako

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon_1,$$
$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \epsilon_2,$$
$$\dots$$
$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n + \epsilon_n,$$

Tento systém však můžeme zapsat i maticově jako

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon.$$

V tomto případě jsou $\mathbf{Y}$, β a ϵ vektory a $\mathbf{X}$ označuje tzv. matici plánu. Naše případová matice plánu (s jedinou vysvětlující proměnnou) má rozměr $n \times k$, kde $k = 2$ a nabývá následující podoby

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Rozměry vektoru $\mathbf{Y}$ jsou $n \times 1$, pro vektor β jsou rozměry $k \times 1$ (v modelu jsou pouze β_0 a β_1, tudíž $k = 2$), rozměry vektoru reziduí jsou $n \times 1$.

Nyní se podívejme na odvození vztahu pro odhad (estimátor) β metodou nejmenších čtverců. Náš odhad chceme vytvořit tak, aby odpovídal co nejlépe datům, která máme k dispozici. Metoda nejmenších čtverců je jedním ze způsobů, které lze využít. Metoda je založena na minimalizaci součtu čtverců reziduí, který je dán výrazem

$$\sum \epsilon_i^2 = [\epsilon_1\, \epsilon_2 \ldots \epsilon_n] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} = \epsilon^T \epsilon.$$

Rezidua můžeme v maticovém zápisu vyjádřit jako $\epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta$, výraz, jehož minimum hledáme, můžeme tedy zapsat jako $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$, kde vrchní index T značí standardně transpozici. Tento výraz nyní zderivujeme vzhledem k β. Derivování matic má podobná pravidla, jako derivování jednoduchých výrazů, tato pravidla zde však nebudeme dopodrobna rozebírat. Derivací získáme

$$\frac{d}{d\beta}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = -2\mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta).$$

Položením tohoto výrazu rovno 0 (hledáme minimum součtu čtverců reziduí) a vydělením dvěma dostaneme

$$-\mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = 0,$$

z čehož úpravou získáme tzv. normální rovnici, která je ve tvaru

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})\beta.$$

Z této rovnice již vektor regresních koeficientů získáme vynásobením inverzní maticí k matici $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$, tj. maticí $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$. Touto úpravou dojdeme k velmi známému vzorci

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y},$$

která nám říká, jak budou vypadat jednotlivé odhady prvků v matici β. V tomto jednoduchém příkladu tedy prvku β_0, který udává průsečík regresní přímky s osou y a β_1, který určuje její sklon.

Nyní si s využitím výsledků uvedených výše vyzkoušíme provést jednoduchou lineární regresi. Máme matici, ve které jsou v prvním sloupci hodnoty vysvětlované proměnné (Y) a ve druhém sloupci hodnoty vysvětlující proměnné (X)

$$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,12 \\ 0,18 & 0,22 \\ 0,31 & 0,35 \\ 0,42 & 0,38 \\ 0,5 & 0,49 \end{pmatrix}.$$

Přepište tuto matici do maticově zadané lineární regrese a najděte odhad matice β pomocí vzorce uvedeného výše.

Systém zapíšeme opět ve tvaru $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$, v tomto případě získáváme

$$\begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,18 \\ 0,31 \\ 0,42 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,12 \\ 1 & 0,22 \\ 1 & 0,35 \\ 1 & 0,38 \\ 1 & 0,49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix}.$$

Odhad matice regresních koeficientů pak získáme vynásobením matice **X** s maticí $\mathbf{X}^T$, tím dostaneme matici

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 1,56 \\ 1,56 & 0,5689 \end{pmatrix}.$$

Následně provedeme inverzi této matice, čímž získáme

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{X}^T\mathbf{X})} \begin{pmatrix} 0,5689 & -1,56 \\ -1,56 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,38452 & -3,79654 \\ -3,79654 & 12,1684 \end{pmatrix}.$$

Nyní si vypočítáme součin $\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$, čímž dostaneme

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1,46 \\ 0,5587 \end{pmatrix}.$$

Nyní již stačí vynásobit poslední dva výsledky mezi sebou, čímž získáme matici $\hat{\beta}$, ve které jsou odhady parametrů β_0 a β_1, tj. máme

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta_0} \\ \hat{\beta_1} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1,38452 & -3,79654 \\ -3,79654 & 12,1684 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,46 \\ 0,5587 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0997277 \\ 1,25554 \end{pmatrix}.$$

První parametr je náš odhad průsečíku přímky s osou y, druhý pak její sklon.

4. Definitnost matic a Choleského dekompozice

V této části si ukážeme, jak určit definitnost matice a vypočítat Choleského rozklad. Určeme nyní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

K tomu využijeme znaménka vedoucích hlavních minorů, tj. spočítáme menší determinanty (subdeterminanty) zadané matice. První z nich je pouze determinant z prvku a_{11}, tj.

$$|2| = 2 > 0,$$

druhý je determinant matice 2x2, a to

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Posledním determinantem, který musíme spočítat, je determinant matice A, který vypočteme Sarrusovým pravidlem, čímž získáme

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 1 = 1 > 0.$$

Z těchto výsledků tedy můžeme říct, že matice A je pozitivně definitní, neboť všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.

Nyní si na příkladu stejné matice A ukážeme i Choleského dekompozici. Hledáme matici T takovou, aby platilo $A = TT^T$. První diagonální prvek této matice (t_{11}) získáme odmocněním prvku a_{11}, v tomto případě tedy máme

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}.$$

Prvek t_{21} získáme jako podíl

$$t_{21} = \frac{a_{21}}{t_{11}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Prvek t_{31} pak dostaneme obdobně podílem

$$t_{31} = \frac{a_{31}}{t_{11}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

Zatím tedy máme první řádek matice T, která je dolní trojúhelníková, což znamená, že pod hlavní diagonálou jsou nulové prvky. Prozatímní výsledek je tedy ve tvaru

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

Prvek t_{22} vypočteme podle vzorce

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{21}^2} = \sqrt{2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Prvek t_{32} pak získáme následujícím způsobem:

$$t_{32} = \frac{a_{32} - t_{31}t_{21}}{t_{22}} = \frac{-1-0}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Nyní vypočteme poslední chybějící prvek, t_{33}, a to jako

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{31}^2 - t_{32}^2} = \sqrt{1 - 0 - \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hledaná matice T je tedy

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Ověření výsledku ponecháme na čtenáři.

Poznámka: číslování jednotlivých prvků v matici je zde v souladu s číslováním využitým na přednášce. První číslo v indexu tedy, poněkud netradičně, odpovídá číslu sloupce, druhé pak číslu řádku.

Neřešené příklady

Matematické příklady

1. Mějme zadané matice A, B a C

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 15 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 14 & -12 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Ukažte, že platí $A + B = B + A$.

   (b) Jaká je hodnota $A - B$?

   (c) Jaká je hodnota $(-A + 2B)C$? Jakého rozměru nabývá výsledná matice?

   (d) Nalezněte transponované matice A^T, B^T a C^T.

   (e) Ukažte, že platí $A(BC) = (AB)C$.

   (f) Ukažte, že platí $(AC)^T = C^T A^T$.

   (g) Platí $C^T C = CC^T$?

   (h) Jaká je dimenze pro jednotkovou matici násobku CI? Jaká je dimenze pro jednotkovou matici násobku IC? Najděte CI a IC.

2. Nalezněte matice X a Y (vlastní výpočty lze provést v softwaru)

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic a následně pomocí Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

   (a)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y &= 20 \\ -1x + 2z &= 10 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 4u &= 3 \\ -2x + 3y + 4z + u &= 3 \\ 3x - 1y - 2z + 2u &= 8 \\ 5x + 3y + 3z + u &= 22 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 6 \\ 3x - 2y + z &= 2 \\ x + 2y + 13z &= 26 \\ 4x + 0y + 14z &= 28 \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z + u &= 0 \\ x + 4y - 2z + u &= 0 \\ 3x + 7y + z + u &= 0 \\ 6x + 4y + 2z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

4. Najděte vlastní čísla matice A a pro největší vlastní číslo určete vlastní vektor. Určete determinant a stopu matice.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Nalezněte determinant a inverzní matici matice A.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}$

6. Určete definitnost následujících matic:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (f) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

   (g) $A = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

   (i) $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

7. Proveďte Choleského dekompozici matice A. Vždy nejprve ověřte, zda se jedná o pozitivně–definitní matici.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 25 & -50 \\ -50 & 101 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$

   (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (g) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ekonomické příklady

1. Předpokládejme dva trhy. Na prvním trhu se obchoduje s cukrem a na druhém trhu s kávou. Tyto dva trhy jsou propojeny. Poptávku a nabídku na trhu s kávou lze zapsat pomocí rovnic

$$D_k = 100 - 5p_k - p_c, \quad S_k = -20 + 2p_k,$$

   a poptávku a nabídku na trhu s cukrem pomocí rovnic

$$D_c = 80 - 4p_c - 2_k, \quad S_c = -10 + p_c,$$

   kde p_k je cena kávy a p_c cena cukru.

   (a) Zapište trh v rovnováze tak, aby odpovídal maticovému zápisu $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$, kde A je 2×2 matice koeficientů, $\mathbf{p}$ je 2×1 vektor cen a $\mathbf{p}$ je 2×1 vektor konstant.

   (b) Nalezněte rovnovážnou cenu kávy a cukru.

2. Rozšířený IS–LM model s čistými exporty je zapsán rovnicemi:

$$\begin{aligned} C &= 15 + 0,8(Y - T), \\ T &= -25 + 0,25Y, \\ I &= 65 - R, \\ G &= 94, \\ NX &= 50 - 10 - 0,1Y, \end{aligned}$$

   kde C je spotřeba, T daňové příjmy, Y agregátní výstup, I investice, R úroková sazba, G vládní výdaje a NX jsou čisté exporty. Trh peněz (LM část) lze popsat pomocí rovnic

$$\begin{aligned} L &= 5Y - 50R, \\ M &= 1500. \end{aligned}$$

   Nalezněte rovnovážnou úroveň Y a R. Vypočítejte vládní deficit (nebo přebytek) a obchodní deficit (nebo přebytek) v rovnováze.

3. Zjednodušený model národních příjmů lze zapsat jako:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G, \\ C &= a + bY, \end{aligned}$$

   kde národní příjem (Y) a spotřeba (C) jsou endogenní veličiny a investice (I) a vládní výdaje (G) jsou exogenní veličiny. Parametry a a b ve spotřební funkci reprezentují autonomní spotřebu a mezní sklon ke spotřebě.

   (a) Zapiště model pomocí matice koeficientů o velikosti 2×2, vektoru endogenních proměnných o velikosti 2×1 a vektoru konstant o velikosti 2×1 ($I + G$ považujte za jednu konstantu).

   (b) Tento model může být také zapsán jako $Ax = y$, kde A je matice koeficientů, x je vektor endogenních proměnných a y je vektor konstant. S pomocí známého faktu, že $x = A^{-1}y$ nalezněte řešení tohoto systému rovnic.

4. Ziskové funkce dvou výrobců letadel, evropské firmy Airbus a americké firmy Boeing, lze vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}B + F, \\ B &= -\frac{1}{2}A + G, \end{aligned}$$

   kde A je zisk výrobce Airbusu, B je zisk výrobce Boeingu, F je evropská vládní dotace pro výrobce Airbusu a G je americká vládní dotace pro výrobce Boeingu.

(a) Vyjádřete rovnice jako maticový systém, kde A a B jsou endogenní proměnné a F a G jsou exogenní proměnné.

(b) Nalezněte řešení systému rovnic pokud víte, že obě vlády poskytnou dotaci 100 milionů dolarů.

(c) Určete, co se stane se zisky obou firem, pokud se evropská vládní dotace zvýší na 200 milionů dolarů, zatímco americká vládní dotace zůstane 100 milionů dolarů.

5. Následující model determinuje exporty a importy v ekonomice jako:

$$X = 1000 - 20E + 0,2Y_F,$$
$$M = 450 + 10E + 0,15Y_D.$$

Exporty (X), importy (M) a reálný směnný kurz (E) jsou endogenní veličiny. Zahraniční (Y_F) a domácí příjem (Y_D) jsou exogenní veličiny. Rádi bychom prozkoumali dlouhodobé vlastnosti reálného směnného kurzu. Předpokládáme tedy, že v dlouhém období se exporty musí rovnat importům.

(a) Zapište model pomocí maticového systému.

(b) Pomocí opakované substituce vyřešte systém rovnic pro reálný směnný kurz a pro rovnovážné množství exportů nebo importů, vyjádřené jako funkce zahraničního a domácího příjmu.

(c) Určete vztah mezi změnou reálného směnného kurzu E a změnou zahraničního příjmu Y_F. Dále určete vztah mezi změnou reálného směnného kurzu E a změnou domácího příjmu Y_D.

(d) Předpokládejte, že během dlouhého období se Y_F zvýší o 100 a Y_D zvýší o 90. Určete, jak velká je změna E.

6. Následující maticový systém, zapsaný kompaktně jako $Wv = g$, odpovídá Keynesiánskému makroekonomickému modelu, kde AD je agregátní poptávka, C je spotřeba, I jsou investice, Y je národní příjem a r je úroková sazba,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AD \\ C \\ I \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2000 \\ 500 - 1000r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Použijte maticové násobení k získání rovnic, které popisují daný model.

7. Předpokládejme jednoduchý Keynesiánský makroekonomický model

$$C = 200 + 0,8Y,$$
$$Y = C + I + G,$$
$$I = 1000 - 2000R,$$

kde C je spotřeba, Y agregátní výstup, I investice a navíc to jsou endogenní veličiny. Dále značíme R jako úroková sazba a G jako vládní výdaje. R a G jsou exogenní veličiny.

(a) Sestavte matici 3×3 parametrů, vektor 3×1 endogenních proměnných a vektor 3×1 exogenních proměnných.

(b) Najděte inverzní matici k matici parametrů.

(c) Uvažujte efekt snížení vládních výdajů G o 50 s dopadem na agregátní výstup Y.

(d) Uvažujme nyní, že je spotřeba závislá na úrokové sazbě $C = 200 + 0,8Y - 1000R$. Diskutujte změny ve výsledcích s předchozími body (a)-(c). Zamyslete se nad ekonomickou interpretací této změny.

Seznam použité literatury

[1] HOY, Michael. Mathematics for economics. 3rd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2011. ISBN 978-0-262-01507-3.

[2] KLEIN, Michael W. Mathematical methods for economics. 2nd ed. Boston: Addison-Wesley, c2002. ISBN 0-201-72626-2

[3] Elektronické zdroje:

https://users.fit.cvut.cz/ stampfra/lectures/lin/lin-prednaska-17-handout.v1.pdf

https://kam.mff.cuni.cz/ sbirka/show_exercise.php?c=47e=218

https://homel.vsb.cz/ ber95/LAIT/Cviceni/lacv11.pdf

https://iuuk.mff.cuni.cz/ zuzka/2010/lin-12.pdf