

Úvodní informace

Martin Chvátal

268707@mail.muni.cz

BKM_MABA - **Matematika pro byznysovou analytiku**

podzimní semestr 2021, Brno

- ▶ Sobota 18.9. 16:00–19:50, P103
- ▶ Sobota 9.10. 12:00–15:50, P103
- ▶ Pátek 3.12. 16:00–19:50, P304

- ▶ Pokud máte jakýkoliv dotaz k čemukoliv během hodiny, rovnou se ptejte, nečekejte s dotazy.
- ▶ V období mezi přednáškami se očekává, že si projdete probranou látku. S případnými dotazy se na mne můžete obrátit na email, Teamsy, případně na konci následující hodiny.

Termín	Den	Čas	Místnost
Ř	11.12.2021	12:00	VT105
Ř+O	15.1.2021	12:00	VT105
O	29.1.2021	12:00	VT204

- ▶ Prosím zapisujte se ideálně už na první termín, aby jste mohli plně využít i termíny opravné (při případném neúspěchu).

Požadavky pro úspěšné ukončení

- ▶ Podrobněji ve Studijních materiálech v ISu, složka Organizační pokyny.
- ▶ Odevzdání všech 5ti odpovědníků během semestru (online).
 - ▶ 1. odpovědník: 19.9.-3.10.
 - ▶ 2. odpovědník: 10.10.-24.10.
 - ▶ 3. odpovědník: 31.10.-14.11.
 - ▶ 4. odpovědník: 14.11.-28.11.
 - ▶ 5. odpovědník: 5.12.-19.12.
- ▶ Odevzdání odpovědníků \Rightarrow připuštění ke zkoušce.
- ▶ Až 5 bodů za odpovědník (body v poznámkovém bloku v ISu).

Požadavky pro úspěšné ukončení

- ▶ Zkouška písemná část (60b) a ústní část (20b).
- ▶ Hodnocení:
 - F - do 50ti bodů,
 - E - 50 - 60 (bez) bodů,
 - D - 60 - 70 (bez) bodů,
 - C - 70 - 80 (bez) bodů,
 - B - 80 - 90 (bez) bodů,
 - A - 90 bodů a více.

Jakékoli opisování, zaznamenávání nebo vynášení testů, používání nedovolených pomůcek jakož i komunikačních prostředků nebo jiné narušování objektivit zkoušky (zápočtu) bude považováno za nesplnění podmínek k ukončení předmětu a za hrubé porušení studijních předpisů. Následkem toho uzavře vyučující zkoušku (zápočet) hodnocením v ISu známkou "F" a děkan zahájí disciplinární řízení, jehož výsledkem může být až ukončení studia.

▶ 1. blok

- ▶ Výroková logika
- ▶ Matice
- ▶ Lineární nezávislost
- ▶ Determinanty a inverzní matice
- ▶ Soustavy lineárních rovnic

▶ 2. blok

- ▶ Vlastní čísla a vektory
- ▶ Funkce a limity
- ▶ Derivace

▶ 3. blok

- ▶ Optimalizace funkce jedné proměnné
- ▶ Funkce dvou proměnných
- ▶ Neurčitý a určitý integrál

- ▶ SYDSÆTER, Knut, Peter J. HAMMOND, Arne STRØM a Andrés CARVAJAL: **Essential mathematics for economic analysis**. Fifth edition. Harlow: Pearson, 2016. xvi, 807. ISBN 9781292074610.
- ▶ BAUER, Luboš, Hana LIPOVSKÁ, Miloslav MIKULÍK a Vít MIKULÍK: **Matematika v ekonomii a ekonomice**. První vydání. Praha: Grada Publishing, a.s., 2015. 352 s. ISBN 978-80-247-4419-3.
- ▶ Další literatura je uvedena v informacích o předmětu.

Přednáška

- ▶ Logika - věda, která se zabývá usuzováním, pravdivostí, dokazatelností a vyvrátitelností.
 - ▶ „Číslo 6 je dělitelné 3 a zároveň 4.“
- ▶ Výrok: každá oznamovací věta, u které lze určit pravdivost.
 - ▶ „Jablko je ovoce“ (pravdivý výrok).
 - ▶ „Číslo 8 je prvočíslo“ (nepravdivý výrok).
 - ▶ „ESF je nejlepší fakulta na světě“ - NENÍ výrok.
- ▶ Atomický výrok: nejjednodušší výrok.
 - ▶ „Číslo 6 je dělitelné 3.“
 - ▶ „Číslo 6 je dělitelné 4.“

► Výrokové spojky:

- ∧ konjunkce - „a“ - „a současně“,
- ∨ disjunkce - „nebo“,
- ⇒ implikace - „jestliže ... pak“,
- ⇔ ekvivalence - „právě tehdy, když“ - „tehdy a jen tehdy, když“,
- ¬ negace.

Example

Snědl jsem jablko. Snědl jsem hrušku.

Snědl jsem jablko a hrušku. (*konjunkce*)

Snědl jsem jablko nebo hrušku. (*disjunkce*)

Jestliže jsem snědl jablko, pak jsem snědl i hrušku. (*implikace*)

Snědl jsem jablko právě tehdy, když jsem snědl hrušku.

(*ekvivalence*)

Nesnědl jsem jablko. (*negace*)

- ▶ Formule: složení atomických výroků pomocí spojek.
 - ▶ Výše uvedené příklady jsou formule.
 - ▶ Výroky značíme pomocí velkých písmen.

Example

A ... „Snědl jsem jablko,“
 B ... „Snědl jsem hrušku.“

$A \wedge B$, (*konjunkce*)

$A \vee B$, (*disjunkce*)

$A \Rightarrow B$, (*implikace*)

$A \Leftrightarrow B$, (*ekvivalence*)

$\neg A$. (*negace*)

Výroková logika - pravdivost

▶ Pravdivost:

- ▶ atomický výrok platí \rightarrow pravdivost 1,
- ▶ atomický výrok neplatí \rightarrow pravdivost 0,
- ▶ pro formule viz tabulka níže

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Example

```
A<-c(T,T,F,F);B<-c(T,F,T,F)
```

```
A& B
```

```
A | B
```

```
imp<-function(A,B){!A | B}
```

```
imp(A,B)
```

```
eqv<-function(A,B){(A& B)|(!A & !B)}
```

```
eqv(A,B)
```

Výroková logika - pravdivost

► Negace

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg B \wedge A$	$(\neg B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Example

Napište pravdivostní tabulku pro formuli $A \Rightarrow (B \wedge \neg(A \vee B))$.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$B \wedge \neg(A \vee B)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

$A \Rightarrow (B \wedge \neg(A \vee B))$
0
0
1
1

- ▶ Tautologie, kontradikce.

Example

Pan Spock každé pondělí, úterý a středu lže, kdežto pan Dat lže ve čtvrtek, pátek a v sobotu. V ostatní dny mluví chlapci pravdu. Jednou se ovšem potkali a proběhl následující rozhovor:

Pan Spock: „Včera jsem lhal.“

Pad Dat: „Jo, já taky.“

Který je den?

Example

Pan Spock každé pondělí, úterý a středu lže, kdežto pan Dat lže ve čtvrtek, pátek a v sobotu. V ostatní dny mluví chlapci pravdu. Jednou se ovšem potkali a proběhl následující rozhovor:

Pan Spock: „Včera jsem lhal.“

Pad Dat: „Jo, já taky.“

Který je den?

		Spock	
		Pravda	Lež
Dat	Pravda	×	×
	Lež	čtvrtek	×

Example

Ze třídy byla ukradena třídní kniha. Podezřelí jsou Antonín, Barbora a Cyril.
Bylo zjištěno, že:

V době krádeže nebyl ve třídě Antonín nebo tam nebyla Barbora.

Pokud v době krádeže nebyla ve třídě Barbora, nebyl tam ani Antonín.

Cybil byl ve třídě právě tehdy, když tam nebyl Antonín.

Pachatel byl v době krádeže ve třídě sám.

U koho má učitel třídní knihu hledat?

Example

Ze třídy byla ukradena třídní kniha. Podezřelí jsou Antonín, Barbora a Cyril.
Bylo zjištěno, že:

V době krádeže nebyl ve třídě Antonín nebo tam nebyla Barbora.

Pokud v době krádeže nebyla ve třídě Barbora, nebyl tam ani Antonín.

Cyрил byl ve třídě právě tehdy, když tam nebyl Antonín.

Pachatel byl v době krádeže ve třídě sám.

U koho má učitel třídní knihu hledat?

A	B	C	$\neg A \vee \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$C \Leftrightarrow \neg A$
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1

Kvatifikátory

∀ Pro všechny - $\forall x \in (-2, 5) : |x| < 6$.

∃ Existuje - $\exists x \in (-2, 5) : |x| < 1$.

Negace

▶ $\neg(\forall x : A) \Leftrightarrow \exists x : \neg A$

▶ $\neg(\exists x : A) \Leftrightarrow \forall x : \neg A$

Example

Definice limity L v bodě a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{O}_a : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Matice

- ▶ dvojrozměrné obdélníkové pole či tabulka čísel, které chápeme jako jeden objekt
- ▶ matice A o rozměru $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Example

Matice A o rozměru 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \pi & e & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Example

Zapište matici 2×2 zadanou prvky $a_{ij} = i + j - 1$.

Example

Zapište matici 2×2 zadanou prvky $a_{ij} = i + j - 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Example

`(A <- matrix(c(1, 2, 2, 3), 2))` ... po sloupečcích zadáváme

- ▶ čtvercová matice: $m = n$.
- ▶ řádkový/sloupcový vektor: $m/n = 1$.
- ▶ Matice značíme velkými písmeny A, B, \dots a vektory malými písmeny $x, \mathbf{x}, \vec{x}, \dots$

Operace s maticemi

- ▶ ROVNOST: $A = B$, pokud mají stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$.
- ▶ SČÍTÁNÍ: $A \pm B = C$, musí mít stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích sečteme/odečteme, tzn. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- ▶ NÁSOBENÍ SKALÁREM: $c \cdot A = B$, všechny prvky vynásobíme daným číslem, tzn. $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$.

Example

Nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, tak aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b - c & c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Operace s maticemi

- ▶ ROVNOST: $A = B$, pokud mají stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$.
- ▶ SČÍTÁNÍ: $A \pm B = C$, musí mít stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích sečteme/odečteme, tzn. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- ▶ NÁSOBENÍ SKALÁREM: $c \cdot A = B$, všechny prvky vynásobíme daným číslem, tzn. $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$.

Example

Nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, tak aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b - c & c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $a = 2, c = 3, b = 1$.

Example

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete $2A$ a $2A + B$.

Example

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete $2A$ a $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Example

```
A <- matrix(c(1,-2,1,2.5),2)
```

```
B <-matrix(c(7,-2,3,-4),2)
```

Násobení skalárem:

```
2*A
```

```
2*A + B
```

Operace s maticemi

- ▶ NÁSOBENÍ DVOU MATIC: $C = A \cdot B$, kde A, B je matice o rozměru $n \times m$, resp. $m \times l$ a matice C je rozměru $n \times l$.
Prvky matice C vzniknou následovně: $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Example

```
A <- matrix(c(1,2,1,3,3,4),2)
```

```
B <- matrix(c(-1,-2,3,0,-1,1),3)
```

Maticové násobení:

```
A %*% B
```

```
B %*% A
```

Operace s maticemi

- ▶ asociativita: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- ▶ distributivita zprava: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- ▶ distributivita zleva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ▶ je-li $c \in \mathbb{R}$, pak $(c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B) = c \cdot (A \cdot B)$
- ▶ obecně NEPLATÍ komutativita $A \cdot B \neq B \cdot A$

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pak $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$, ale
 $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Jednotková matice

- ▶ Pro reálná čísla: $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.
- ▶ Označení: I . Čtvercová matice. Na hlavní diagonále jsou 1 a všude jinde 0.

▶
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pak

$$I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = A.$$



Example

```
A <- matrix(c(1,4,2,5,3,6),2)
```

```
I2 <- diag(2)
```

```
I3 <- matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),3)
```

Musíme násobit matice „správných“ rozměrů:

```
I2 %*% A
```

```
A %*% I3
```

Naopak dostaneme chybu:

```
I3 %*% A
```

```
A %*% I2
```

Transponovaná matice

- ▶ Prohodíme sloupce a řádky.
- ▶ Označení: A^T nebo A' .

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

```
A <-matrix(c(1,4,2,5,3,6),2);(t(A))
```

- ▶ Symetrická matice: $A = A^T$.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A^T$$

Lineární závislost

- ▶ Řekneme, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže rovnice

$$a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \vec{0}$$

má pouze triviální řešení, tzn. $a_{11} = a_{12} = \dots = a_n = 0$. V opačném případě říkáme, že jsou vektory *lineárně závislé*.

- ▶ Lineární kombinace (levá strana), soustava rovnic

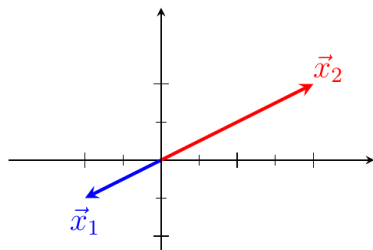
Example

Mějme $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zřejmě platí

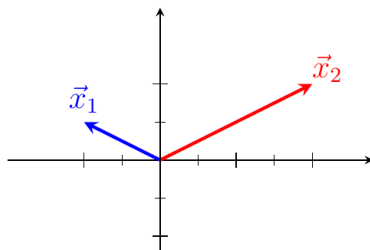
$$1 \cdot u + 2 \cdot v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vektory u, v jsou lineárně závislé.

Lineární závislost



Obrázek: Lineárně závislé vektory.



Obrázek: Lineárně nezávislé vektory.

- ▶ Počet lineárně nezávislých sloupců/řádků matice.
- ▶ Značíme $h(A)$.

Example

Bud' $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak $h(A) = 2$, $h(I) = 3$.

Gaussova eliminační metoda

- ▶ Elementární řádkové úpravy:
 - ▶ vynásobení řádku nenulovým číslem,
 - ▶ prohození dvou řádků,
 - ▶ přičtení libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému.
- ▶ Dostáváme ekvivalentní matice (nesou stejnou informaci co se závislosti týče).
- ▶ Upravíme do schodovitého tvaru.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h(A) = 3$$

```
A<-matrix(c(1,1,2,2,1,0,3,4,6),3)
```

```
library(pracma)
```

```
rref(A)
```

Determinant

- ▶ Číslo, které přiřadíme čtvercové matici, značíme $\det(A)$ nebo $|A|$.

- ▶ regulární matice: $\det(A) \neq 0$
- ▶ singulární matice: $\det(A) = 0$

- ▶ matice 1×1 : $\det(a) = |a| = a$

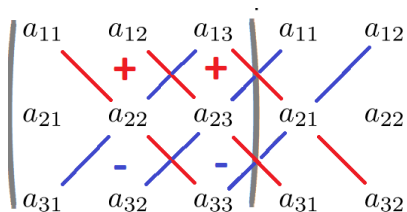
- ▶ matice 2×2 : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- ▶ matice 3×3 :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinant

- ▶ Sarrusovo pravidlo (pouze pro matice 3×3)



- ▶ $|A| = |A^T|$

- ▶ Sníží řád matice pro výpočet determinantu.
- ▶ $|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |C_{ij}|$, kde matice C_{ij} vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.
- ▶ Pro jednoduchost vybíráme řádek či sloupec s největším počtem 0.

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak podle druhého řádku

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \\ & (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ & 1 + 0 + 0 + (-2) = -1 \end{aligned}$$

Example

```
A <- matrix(c(0,1,1,0,1,0,-1,2,-1,0,1,-1,2,2,-1,0),4);(det(A))
```

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak podle prvního sloupce

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \\ &(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &0 + 1 + (-2) + 0 = -1 \end{aligned}$$

Determinant - přímý výpočet

- ▶ Má-li matice pod hlavní diagonálou samé 0, pak je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.

- ▶
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

- ▶ Pomocí elementárních řádkových úprav
 - ▶ vynásobení řádku nenulovým číslem \Rightarrow determinant daným číslem vydělím,
 - ▶ prohození dvou řádků \Rightarrow determinantu změním znaménko,
 - ▶ přičtení libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému \Rightarrow determinant nezměním.

Determinant - přímý výpočet

Example

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

Inverzní matice

- ▶ pro reálná čísla: $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1$
- ▶ Značíme A^{-1} . Definice: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.
 - ▶ čtvercová matice
 - ▶ regulární matice

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pak $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Example

Výpočet inverzní matice k $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

```
A <- matrix(c(0,1,1,1,0,2,-1,2,1),3);(solve(A))
```

Inverzní matice - Jordanova eliminační metoda

- ▶ Zapišeme rozšířenou matici a pomocí elementárních řádkových úprav získáme inverzní matici

$$(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1}).$$

Example

$$\begin{aligned} A \dots & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \dots A^{-1} \end{aligned}$$

- ▶ Ověřit.

Adjungovaná matice a inverze

- ▶ Adjungovaná matice: $\text{adj } A =$

$$= \begin{pmatrix} +|C_{11}| & -|C_{12}| & \cdots & (-1)^{1+n}|C_{1n}| \\ -|C_{21}| & +|C_{22}| & \cdots & (-1)^{2+n}|C_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|C_{n1}| & (-1)^{n+2}|C_{n2}| & \cdots & (-1)^{n+n}|C_{nn}| \end{pmatrix}^T,$$

kde matice C_{ij} vznikly z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

- ▶ Inverzní matice: $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$,
 - ▶ determinant musí existovat a být různý od 0.

Example

Mějme $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nejprve spočtěme determinant a poté adjungovanou matici.

$$|A| = 0 + 2 + (-2) - 0 - 0 - 1 = -1$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -4 & +1 & +2 \\ -3 & +1 & +1 \\ +2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & +2 \\ +1 & +1 & -1 \\ +2 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +4 & +3 & -2 \\ -1 & -1 & +1 \\ -2 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Maticový zápis

- ▶ Systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

- ▶ Maticový zápis daného systému:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{matice soustavy}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\text{vektor neznámých}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{vektor pravých stran}} .$$

- ▶ $A \cdot x = b$

Example

Uvažujme systém

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7, \\x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3, \\-x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1.\end{aligned}$$

Pak maticový zápis tohoto systému je

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_b.$$

Gausova eliminační metoda

- ▶ Převedeme do maticového zápisu ... rozšířená matice soustavy.
- ▶ Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do tvaru, aby pod diagonálou byly samé 0.

Example

$$(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -21 & 37 \end{array} \right)$$

Gausova eliminační metoda

- ▶ Převědeme zpátky do soustavy rovnic a danou soustavu vyřešíme.

Example

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ & & & & - & 21x_3 & = & 37 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{37}{21}$$

$$\Rightarrow x_2 = -4 - 2 \cdot \left(-\frac{37}{21}\right) = -\frac{10}{21}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + 3 \cdot \left(-\frac{10}{21}\right) - \left(-\frac{37}{21}\right) = \frac{70}{21}$$

Example

Řešení soustavy rovnic:

```
A<-matrix(c(2,1,-1,3,-3,2,-1,1,-3),3)
```

```
b<-c(7,3,1)
```

```
x<-solve(A,b)
```

Cramerovo pravidlo

- Umožňuje přímý výpočet soustavy lineárních rovnic ($m = n$):

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{|A_n|}{|A|},\end{aligned}$$

kde matice A_i vznikne z matice soustavy A nahrazením i -tého sloupce vektorem pravých stran.

Example

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 3 - 2 + 3 - 4 + 9 = 21$$

Example

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 63 + 3 - 6 - 3 - 14 + 27 = 70$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 7 - 1 - 3 - 2 + 21 = -10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 + 14 - 21 - 12 - 3 = -37$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{37}{21}, \quad x_2 = -\frac{10}{21}, \quad x_1 = \frac{70}{21}.$$

- ▶ Co když $|A| = 0$?

Example

Pro systém

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 2 \\ -x & - & y = -2 \end{array}$$

je determinant matice soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

- ▶ $|A| = 0$ značí, že jsou jednotlivé rovnice (řádky matice) na sobě lineárně závislé.

Počet řešení soustavy rovnic

- ▶ Právě jedno řešení:
 - ▶ počet lineárně nezávislých rovnic = počet neznámých,
 - ▶ $h(A) = h(A|b) = n$.
- ▶ Nekonečně mnoho řešení:
 - ▶ počet lineárně nezávislých rovnic < počet neznámých,
 - ▶ $h(A) = h(A|b) < n$.
- ▶ Žádné řešení:
 - ▶ když dojdeme ke "sporu",
 - ▶ $h(A) < h(A|b)$.

Example

System

$$x + y = 2$$

$$x + y = 3$$

zřejmě nemá žádné řešení.

Vlastní čísla, vlastní vektory

- ▶ Definice: Jestliže pro nenulový vektor \mathbf{v} a reálné číslo λ platí

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

pak \mathbf{v} nazýváme *vlastní vektor* a λ *vlastní číslo* k matici A .

- ▶ Postup

$$A \cdot \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \vec{0}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$



$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$(A - \lambda_i I) \cdot \mathbf{v} = \vec{0}$$



$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$$

Example

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \cdot (-\lambda) - 3 \cdot (-1) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Example

```
A<-matrix(c(4,3,-1,0),2)
```

```
eigen(A)
```

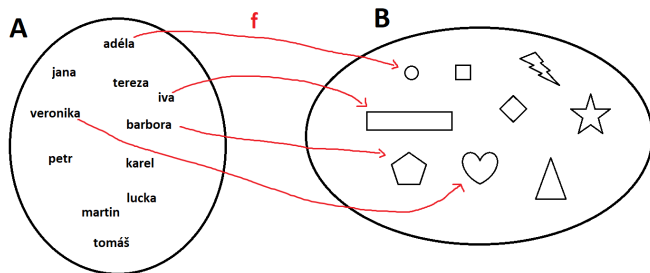
```
eigen(A)$values
```

```
eigen(A)$vectors
```

Vlastní vektor je libovolný násobek:

```
eigen(A)$vectors[,1]/eigen(A)$vectors[1]
```

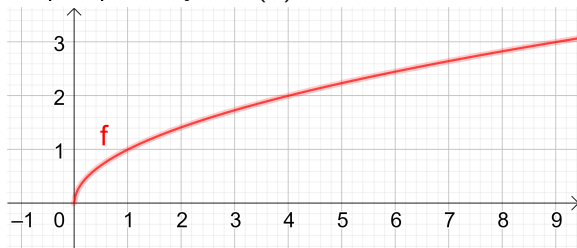
```
eigen(A)$vectors[,2]/eigen(A)$vectors[3]
```



- ▶ Funkcí $f : A \rightarrow B$ nazýváme pravidlo/předpis, který prvkům z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B .
- ▶ Množinu prvků z A , které se na něco zobrazí nazýváme definiční obor $D(f) = \{\text{adéla, iva, veronika, barbora}\}$.
- ▶ Množinu prvků z B , na které se něco zobrazí nazýváme obor hodnot $H(f) = \{\text{kolečko, obdélník, pětiúhelník, srdce}\}$.

Funkce

- ▶ Funkci zadáváme předpisem, tabulkou, výčtem prvků.
- ▶ Reálná funkce reálné proměnné: $A = B = \mathbb{R}$.
- ▶ Zadáváme předpisem: $y = f(x)$.



Obrázek: Funkce $f : y = \sqrt{x}$, $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$, $H(f) = \langle 0, \infty \rangle$

Example

```
plot(function(x) sqrt(x), xlim=c(-1,9), col="red", lwd = 3,  
ylab="y", main = "y=sqrt(x)")
```


Funkce - definiční obor

- ▶ $\frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}} \dots \text{jmenovatel} \neq 0$
- ▶ $\sqrt[2n]{\text{argument}} \dots \text{argument} \geq 0$
- ▶ $\log(\text{argument}) \dots \text{argument} > 0$

Example

Určete definiční obor funkce $f : y = \frac{3x}{\sqrt{(x-1)^2-1}}$. Máme tu dvě problémové funkce ... zlomek a odmocninu. Nejprve se podíváme na zlomek. Tedy ve jmenovateli nesmí být 0. Řešíme rovnici

$$\sqrt{(x-1)^2-1} = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 1$$

$$x_1 = 2, x_2 = 0$$

Tedy v definičním oboru nesmí být body 0 a 2.

Example

Dále pod odmocninou nesmí být záporné číslo, tzn. řešíme nerovnici

$$(x - 1)^2 - 1 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 \geq 1$$

$$x \geq 2 \wedge x \leq 0$$

Dohromady máme $D(f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus \langle 0, 2 \rangle$. Jelikož je v tomto příkladě ve jmenovateli zlomku pouze daná odmocnina, mohli jsme to počítat najednou, jako $(x - 1)^2 - 1 > 0$.

Funkce, parita

- ▶ Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže $D(f)$ je symetrický podle 0 a $f(-x) = f(x)$.
- ▶ Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže $D(f)$ je symetrický podle 0 a $f(-x) = -f(x)$.

Example

Rozhodněte o paritě funkcí $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$ a $g(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$.

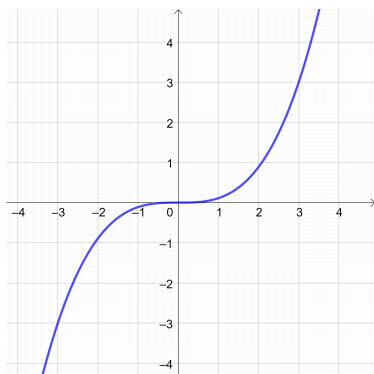
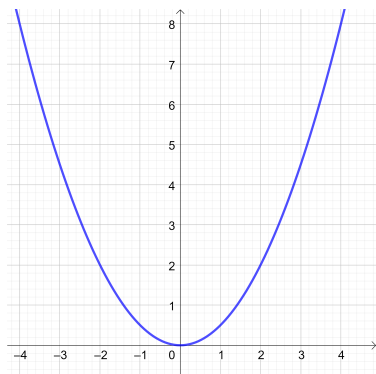
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^3} = \frac{x^2 + 1}{-x^3} = -\frac{x^2 + 1}{x^3} = -f(x) \Rightarrow f \text{ je lichá}$$

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \Rightarrow g \text{ není ani sudá ani lichá}$$

Funkce, parita

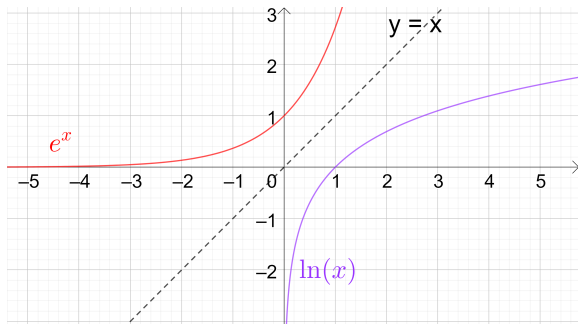
- ▶ sudá - graf osově symetrický podle osy y
- ▶ lichá - graf středově symetrický podle počátku



Obrázek: Funkce $y = \frac{x^2}{2}$ je sudá. Obrázek: Funkce $y = \frac{x^3}{9}$ je lichá.

Funkce, inverzní funkce

- ▶ Značíme $f^{-1}(x)$.
- ▶ Definice: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- ▶ Existuje pouze pro prosté funkce (stále rostoucí či stále klesající).
- ▶ Grafy f a $f^{-1}(x)$ jsou osově symetrické podle osy $y = x$.



Obrázek: Funkce $y = e^x$ je inverzní k $y = \ln(x)$ a naopak.

Example

Určete inverzní funkci k funkci $f : y = x^2 + 1$.

$$f^{-1} : x = y^2 + 1$$

$$x - 1 = y^2$$

$$\sqrt{x - 1} = |y|$$

$$y = \pm\sqrt{x - 1}$$

Funkce f není prostá \Rightarrow neexistuje inverze. Pokud bychom do zadání přidali definiční obor $\langle 0, \infty \rangle$, pak by $f^{-1} : y = \sqrt{x - 1}$.

- ▶ $D(f) = H(f^{-1})$
- ▶ $H(f) = D(f^{-1})$

Funkce, limita

- ▶ Limita - zkoumáme chování funkce v okolí určitého bodu
 - ▶ v daném bodě spojitá/definovaná \rightarrow funkční hodnota
 - ▶ jinak limita - „nekonečné přiblížení“

Example

x	1	0,1	0,01	0	-0,01	-0,1	-1
$\frac{\sin x}{x}$	0.8415	0.9983	0.9999		0.9999	0.9983	0.8415

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- ▶ Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu L , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \text{ platí: } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Značení: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$

Funkce, limita zprava/zleva

- ▶ K bodu se můžeme blížit zleva ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$) nebo zprava

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right)$$

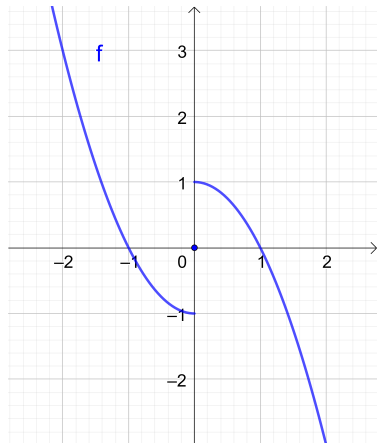
$$f(x) =$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 & \dots x < 0 \\ 0 & \dots x = 0 \\ -x^2 + 1 & \dots x > 0 \end{cases}$$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -1$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1$

- ▶ $f(0) = 0$



- ▶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{ohraničen funkce}}{\text{„nekonečno“}} = 0$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- ▶ Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, pak
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$,
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pro $B \neq 0$.

Funkce, limita - L'Hospitalovo pravidlo

- ▶ Pro limity typu " $\frac{0}{0}$ " a " $\pm \frac{\infty}{\infty}$ ".
- ▶ Pokud existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

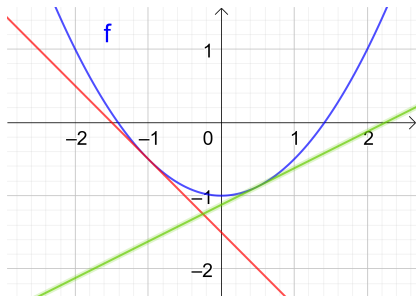
Example

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^3-7x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2-7} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6x} = \left| \frac{2}{\infty} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \cos x = \cancel{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

Funkce, derivace

- ▶ Definice: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
 - ▶ Směrnice tečny v daném bodě.
 - ▶ Rovnice tečny: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
 - ▶ Diferenciál
 - ▶ $f'(x) < 0$... klesající funkce
 - ▶ $f'(x) > 0$... rostoucí funkce
 - ▶ $f'(x) = 0$
- ▶ $f''(x), f^{(3)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$



Funkce, počítání derivací

$[k]' = 0$, je-li k konstantní funkce,

$$[\sin x]' = \cos x,$$

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2},$$

$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$, pro $a > 0$,

$$[e^x]' = e^x,$$

$$[x^a]' = a \cdot x^{a-1}$$

$$[\cos x]' = -\sin x,$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2},$$

$[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, pro $a > 0, a \neq 1$,

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}.$$

$$[f + g]' = f' + g'$$

$$[f - g]' = f' - g'$$

$$[fg]' = f'g + fg' \quad \text{součinné pravidlo}$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{podílové pravidlo}$$

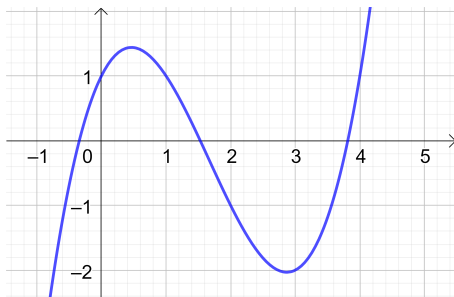
$$[g(f)]' = g'(f) \cdot f' \quad \text{řetízkové pravidlo}$$

Example

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

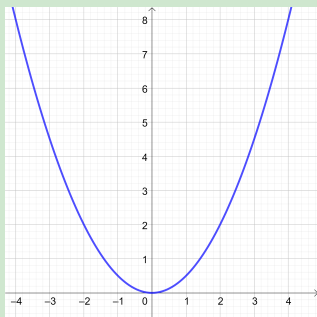
$$(e^{x^2+3})' = e^{x^2+3} \cdot (x^2 + 3)' = e^{x^2+3} \cdot (2x + 0) = 2xe^{x^2+3}$$

$$\left(\ln \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot (x^{-1})' = x \cdot (-1 \cdot x^{-2}) = -\frac{1}{x}$$

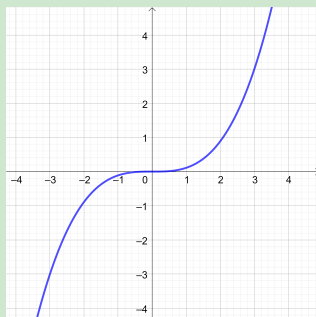


- ▶ Lokální extrémy
 - ▶ Maximum - „před“ funkce roste, „po“ funkce klesá.
 - ▶ Minimum - „před“ funkce klesá, „po“ funkce roste.
- ▶ Lokální extrém $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
- ▶ $f'(x_i) = 0$ + tam kde není definovaná \Rightarrow stacionární body = kandidáti na extrém.

Example



Obrázek: Funkce $f : y = \frac{x^2}{2}$.



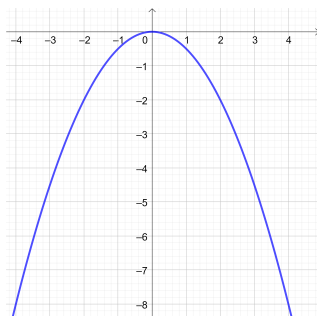
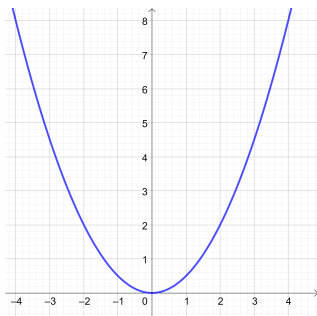
Obrázek: Funkce $g : y = \frac{x^3}{9}$.

Body, kde je derivace nulová jsou kandidáti na extrém.

$$f'(x) = x \Rightarrow x_{1,f} = 0 \quad \dots \quad \text{minimum}$$

$$g'(x) = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x_{1,g} = 0 \quad \dots \quad \text{není extrém}$$

Funkce, konvexnost, konkávnost



- ▶ Konvexní funkce - v každém bodě leží „nad“ tečnou.
- ▶ Konkávní funkce - v každém bodě leží „pod“ tečnou.
- ▶ Derivace
 - ▶ konvexní ... $f''(x) > 0$,
 - ▶ konkávní ... $f''(x) < 0$,
 - ▶ $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$ kandidáti na změnu zakřivení \Rightarrow inflexní body.

Funkce, asymptoty

- ▶ Asymptota = tečna v nekonečnu.
- ▶ Asymptoty bez směrnice
 - ▶ kolmé na osu x , tzn. přímky $x = x_i$
 - ▶ v bodech nespojitosti,
 - ▶ v krajích definičního oboru,
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x) = \pm\infty$.
- ▶ Asymptoty se směrnicí
 - ▶ přímky $y = ax + b$, pro x jdoucí k plus/minus nekonečnu
 - ▶ $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,
 - ▶ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$.

Example

Funkce $y = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a se směrnicí $y = 0$.

Průběh funkce

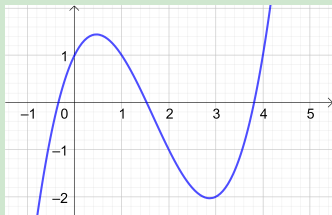
- ▶ Nalezneme nulové body zadané funkce.
- ▶ Určíme znaménka funkce na jednotlivých intervalech.
- ▶ Spočteme derivaci.
- ▶ Nalezneme nulové body derivace.
- ▶ Určíme znaménka derivace na jednotlivých intervalech.
- ▶ Určíme extrémy.
- ▶ Spočteme druhou derivaci.
- ▶ Nalezneme nulové body druhé derivace.
- ▶ Určíme znaménka druhé derivace na jednotlivých intervalech.
- ▶ Určíme inflexní body.
- ▶ Nalezneme asymptoty.
- ▶ Načrtneme obrázek
- ▶ Rozhodneme o paritě, určíme $H(f)$, globálnost extrémů.

Funkce, globální extrémy

- ▶ Extrémy na celém definičním oboru:
 - ▶ v bodech lokálních extrémů,
 - ▶ v krajích definičního oboru.

Example

Funkce $y = x^2$ má jeden lokální extrém, a ten je i extrémem globálním.



Funkce na obrázku má dva lokální extrémy, ale žádný globální. Kdybychom si danou funkci vzali jen na intervalu $\langle 2; 4 \rangle$, měla by funkce tři lokální extrémy a dva globální.

Taylorův polynom

- ▶ Taylorův polynom stupně n se středem x_0 .
- ▶ Definice: $T_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.
- ▶ McLaurinův polynom: $x_0 = 0$.
- ▶ Aproximace funkce.
- ▶ Taylorova řada: $n = \infty$.

Example

Určete Taylorův polynom třetího stupně funkce $\ln x$ se středem v bodě 1.

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2$$

$$\text{Teď dosadíme do vzorce: } T(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

- ▶ Diferenciál:
 - ▶ přírůstek na tečně,
 - ▶ Taylorův polynom prvního stupně, tzn.
 $D_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
 - ▶ $d_f(x) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Example

Pomocí diferenciálu odhadněte $\sqrt{9,05}$. Nejprve si zvolíme střed $x_0 = 9$. Dále $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nyní podle vzorečku pro diferenciál $\sqrt{9,05} \doteq \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0,05 \doteq 3,0083$.

Funkce více proměnných

- ▶ Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, např.
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2^2 + x_1 x_n + x_2 x_{n-1} - x_n^7.$
- ▶ Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$:
 - ▶ graf je 3-rozměrný
 - ▶ definiční obor je 2-rozměrný

Example

Určete a znázorněte definiční obor funkce

$$f : z = \ln((1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)).$$

$$a) \quad 1 - x^2 - y^2 > 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 4$$

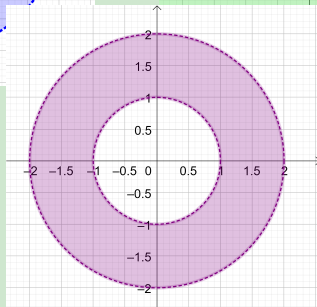
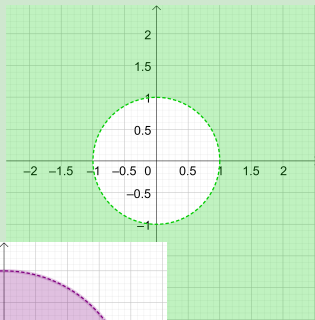
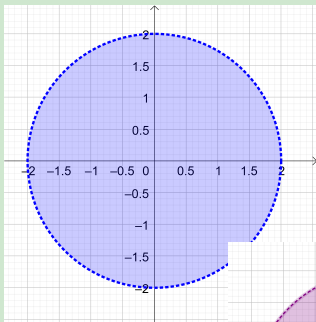
$$b) \quad 1 - x^2 - y^2 < 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 < 0$$

$$x^2 + y^2 > 1 \wedge x^2 + y^2 < 4$$

$$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Funkce více proměnných

Example



Parciální derivace

- ▶ Více proměnných, více směrů \Rightarrow více derivací.
- ▶ Ve směru souřadnicové osy - parciální derivace:
 - ▶ $f(x, y) \Rightarrow f_x(x, y), f_y(x, y)$
 - ▶ $f(x, y, z) \Rightarrow f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)$
 - ▶ $f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y), \dots, f_{xyxy}(x, y), \dots$
 - ▶ derivujeme pouze podle jedné proměnné, ostatní chápeme jako konstanty.

Example

Určete všechny parciální derivace funkce

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + xy - 3$ až do řádu 2.

$$f_x(x, y) = 2x - 2 + y \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 1$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

- ▶ Podobně jak u funkcí jedné proměnné:

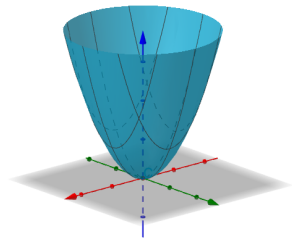
- ▶ $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0 \Rightarrow$ kandidáti na extrém $[x_i, y_i]$.

- ▶ Hessova matice

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

- ▶ Dosadíme kandidáty a spočteme determinant

- ▶ $|H(x_i, y_i)| > 0 \wedge f_{xx}(x_i, y_i) > 0 \Rightarrow$ minimum,
- ▶ $|H(x_i, y_i)| > 0 \wedge f_{xx}(x_i, y_i) < 0 \Rightarrow$ maximum,
- ▶ $|H(x_i, y_i)| < 0 \Rightarrow$ není extrém (sedlový bod).



Example

```
install.packages("plot3D")
library(plot3D)
X<- seq(-10,10, length.out = 20)
Y<- seq(-10,10, length.out = 20)
M<-mesh(X,Y)
x<-M$x
y<-M$y
z=x^2 + y^2
perspbox(x,y,z, bty = 'b2', ticktype = 'detailed', d = 2, main =
'funkce z=x^2 + y^2')
persp3D(x,y,z,add = T)
```

Neurčitý integrál

- ▶ $\int f(x) dx$
- ▶ Hledáme *primitivní funkci* F , aby $F'(x) = f(x)$.
- ▶ $\int f(x) dx = \{F(x) + c\}$

Example

Nalezněte integrál $\int 7x dx$.

Co musím zderivovat, abych dostal $x \dots$ „nějaký násobek“ x^2
 $\dots (x^2)' = 2x \dots (7x^2)' = 14x \dots (7/2 \cdot x^2)' = 7x$. Takže $7/2 \cdot x^2$
je primitivní k $7x$. Ale stejně tak $7/2 \cdot x^2 - 3$ a nebo $7/2 \cdot x^2 + \pi$.

Neurčitý integrál

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0; \quad \text{pro } \alpha \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0 \qquad \int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{cotg}(x) + C, \quad x \neq k\pi$$
$$\int \sinh(x) dx = \operatorname{cosh}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{cosh}^2(x)} dx = \operatorname{tgh}(x) + C$$
$$\int \operatorname{cosh}(x) dx = \sinh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sinh^2(x)} dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C, \quad x \neq 0$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin}(x) + C, \quad x \in (-1, 1)$$

Racionální lomená funkce: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$.

- ▶ Pokud je $m \geq n$, nejprve podělíme,
- ▶ rozložíme zlomek na parciální zlomky,
- ▶ zintegrujeme každou část zvlášť.

Rozklad na parciální zlomky:

- ▶ rozklad zlomku na součet zlomků tvaru $\frac{M}{N^k}$,
- ▶ N se nedá rozložit, M má nižší stupeň než N .

Example

Spočtěte $\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} dx$.

Jmenovatel více rozložit nelze. Zapišeme tedy obecné členy:

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Vynásobíme jmenovatelem a vyřešíme vzniklou rovnici:

$$3x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1).$$

Postupně do rovnice dosadíme za x tři různá čísla:

$$x = 1: \quad 3 = 3A \quad \Rightarrow A = 1,$$

$$x = 0: \quad 0 = 2 - C \quad \Rightarrow C = 2,$$

$$x = -1: \quad -3 = 3 + (-B + 2)(-2) \quad \Rightarrow B = -1.$$

Example

Máme tedy

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+2}{x^2+2}.$$

Dosadíme zpátky do integrálu:

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x}{x^2+2} dx + \int \frac{2}{x^2+2} dx.$$

Spočtíme jednotlivé integrály:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-1} dx &= \ln(x-1) + c_1, \\ \int \frac{x}{x^2+2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + c_2,\end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2 + 2} dx &= \int \frac{2}{2\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c_3\end{aligned}$$

Dohromady

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

$$\blacktriangleright \int f(x) dx = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

Example

Pomocí subs. metody spočtěte $\int x \sin x^2 dx$.

$$\begin{aligned} \int x \sin x^2 dx &= \left| \begin{array}{l} z = x^2 \\ dz = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{2} \sin z dz = \frac{\cos z}{2} + c \\ &= \frac{\cos x^2}{2} + c \end{aligned}$$

Substituční metoda

- ▶ vždy mohu substituovat cokoliv jakkoliv, ale chceme aby nám to pomohlo

Example

Pomocí subs. metody spočtěte $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} z = \ln x \\ dz = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \left| \begin{array}{l} z = \frac{1}{\ln x} \\ dz = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int -1 dz = -z + c \\ &= -\frac{1}{\ln x} + c \end{aligned}$$

- ▶ $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$
- ▶ V případech jako:
 $\int P(x) \cdot \sin x \, dx, \int P(x) \cdot \cos x \, dx, \int P(x) \cdot e^x \, dx, \int P(x) \cdot \ln x \, dx$

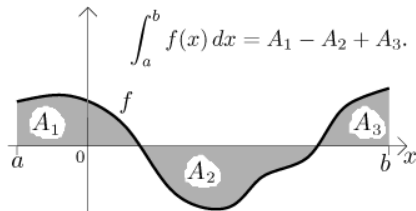
Example

Pomocí metody per-partes spočtěte $\int x \ln x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int 2x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 2x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ v = x^2 \end{array} \right| = x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot 2x \, dx \\ &= x^2 \ln x - \int 2 \, dx = x^2 \ln x - 2x + c\end{aligned}$$

Určitý - Riemannův integrál

- ▶ Integrál $\int_a^b f(x) dx$ na daném intervalu (a, b) .
- ▶ Orientovaný obsah oblasti ohraničené zadanou křivkou, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.



- ▶ Newton-Leibnitzova formule:
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, kde F je primitivní k f .

Example

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-\pi) = 0$$

Určitý - Riemannův integrál

- ▶ Substituční metoda - pokud transformujeme meze, není nutné dosadit zpátky

Example

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} z = \ln x \\ dz = \frac{1}{x} dx \\ e^2 \rightarrow 2 \\ e \rightarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{z} \right]_1^2$$
$$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}$$

Určitý - Riemannův integrál

► Per-partes - $\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$

Example

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{array} \right| = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Nevlastní integrál

- ▶ Integrály do „nekonečna“
- ▶ „Utíká“:
 - ▶ funkce - $\int_0^1 \frac{1}{x} dx \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx$,
 - ▶ mez - $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$.

Example

Spočtěte $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \int_{-1}^a \frac{1}{x^2} dx + \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^a + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{a} - 1 \right] + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-1 + \frac{1}{a} \right] = \infty\end{aligned}$$