Reálný úrok v procesu diskrétního a spojitého úročení.

Prezentace příkladů - minulá látka

– Tým 3
– Tým 4

Efektivní úroková míra – co je to?

Frekvence úročení:

p.a. =

p.s. =

p.q. =

p.m. =

p.sept. =

p.d. =

Lze i častěji?

MUNI ECON

Efektivní úroková míra

- Jak velká nominální míra při skládání úroků za vybranou časovou jednotku (např. rok) odpovídá nominální míře při denním, měsíčním nebo jiném skládání za tuto časovou jednotku. Nejčastěji sjednocujeme na bázi roční.

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

kde *r_ef*… efektivní úroková míra,
r… ……….nominální úroková míra,
m ……….. četnost skládání úroků.

Frekvence úročení:

p.a. = roční (*per annum*)

p.s. = pololetní (*per semestre*)

p.q. = čtvrtletní (*per quartale*)

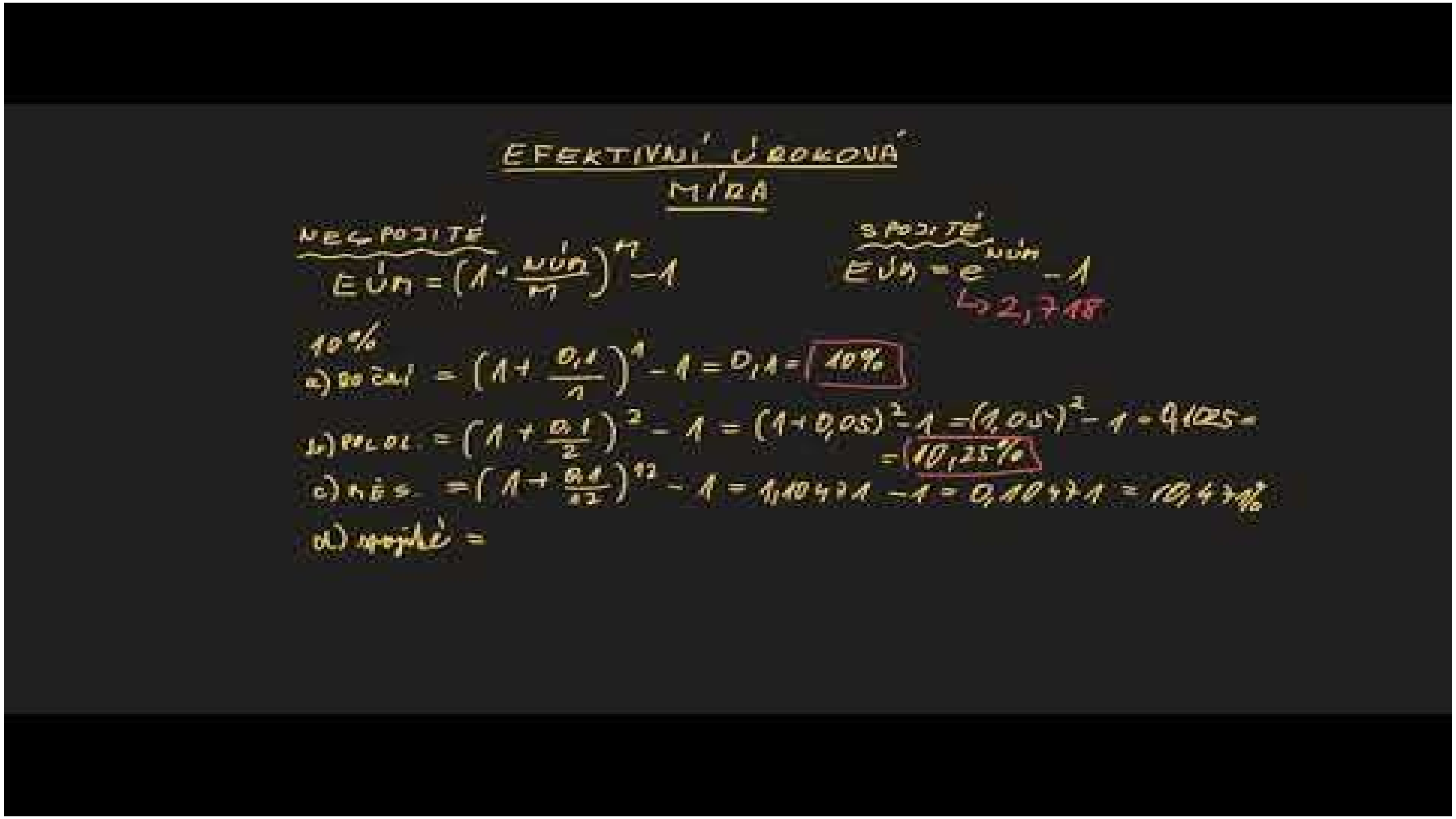
p.m. = měsíční (*per mensem*)

p.sept. = týdně (*per septimanam*)

p.d. = denně (*per diem*)

MUNI ECON

Jak to funguje?



Spojité úročení – co je to?

Spojité úročení – co je to?

Vysvětlení

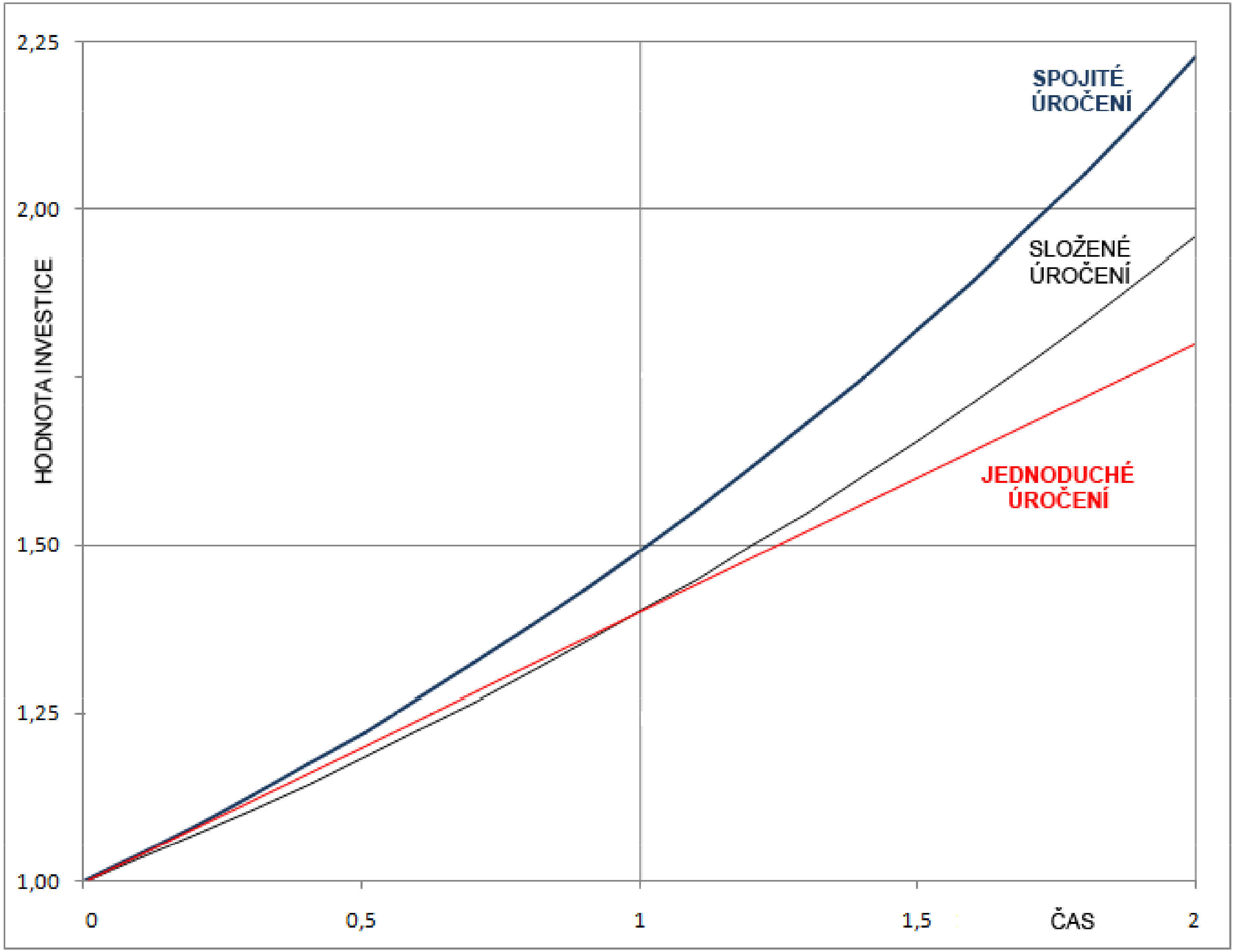
- Délka úrokovacích období se blíží nule
- Počet úrokovacích období se blíží nekonečnu
- Efektivní úroková sazba => úroková intenzita

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}$$

$$f = ln(1 + r_{ef}) \longleftrightarrow r_{ef} = e^{f} - 1$$

f = úroková intenzita
r_{ef} = efektivní úroková sazba
t = čas v letech

$$\boxed{FV = PV \times e^{f \times t}}$$


SPOJITÉ ÚROČENÍ
SLOŽENÉ ÚROČENÍ
JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ
HODNOTA INVESTICE
2,25
2,00
1,50
1,25
1,00
0
0,5
1
1,5
ČAS
2

Vzorový příklad – spojité úročení

Na tabuli: Jaká bude reálná hodnota kapitálu z vkladu 500 000 Kč, který necháte po dobu 3 let úročit měsíčním připisováním úroků? Úroková sazba, kterou finanční ústav poskytuje je 3,8 % p. a. Dále víte, že měsíční odhad inflace je 0,2 %.

- S jakou úrokovou intenzitou dosáhnu stejného zhodnocení?

- Řešte za předpokladu, že sazby zůstávají stejné, **proces je spojitý.**

Vzorový příklad – řešení 1. polovina

$FV_r = ?$

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

ú.o. = 1 měsíc = 12/rok

r = 3,8 % p. a.

$inflace_m = 0{,}2\ \% = \pi_m$

Jaká bude reálná hodnota kapitálu?

= „diskontuji inflací"

$$FV_r = PV \times \left(\frac{1 + r_m}{1 + \pi_m}\right)^{m \times t} = 500\,000 \times \left(\frac{1 + \frac{0{,}038}{12}}{1 + 0{,}002}\right)^{12\times3}$$

$$\boldsymbol{FV_r = \left(500\,000 \times (1 + 0{,}001165)^{12\times3}\right)}$$

$$\boldsymbol{FV_r = 521390{,}81\ Kč}$$

Nominální zhodnocení:

$$\boldsymbol{FV = \left(500\,000 \times (1 + 0{,}00317)^{12\times3}\right)}$$

$$\boldsymbol{= 560275{,}1367}$$

Inflace snižuje hodnotu peněz, proto „ponižuje" úrok,

Vzorový příklad – 2. polovina a)

S jakou úrokovou intenzitou dosáhnu stejného zhodnocení?

Tzn. Máme dánu r_{ef} očištěnou o inflaci, hledáme f.

Logická úvaha: bude f vyšší, nebo nižší, než r_{ef}?

MUNI ECON

Vzorový příklad – řešení 2. polovina, a)

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

inflace_m = 0,2 %; r = 3,8 % p. a. (12 ú.o.)

FV_r = ? = $FV_{r\,(1)}$

spojité úročení = ∞ ú.o./ rok

f_r = ?

1. Jak zohlednit inflaci a zjistit intenzitu?

   a) přes měsíční intenzitu

$$f_r(m) = ln\left(\frac{1 + r_m}{1 + \pi_m}\right) = \mathbf{0{,}116366\%}$$

   b) Přes efektivní úrokovou sazbu

$$f_r(rok) = ln(1 + r_{ef}) = \ln\left(\frac{1 + r_m}{1 + \pi_m}\right)^{12} = \mathbf{\mathit{1{,}396\%}}$$

2. Jaká bude reálná hodnota kapitálu?

$$FV_r = PV \times e^{f \times m \times t}$$

$$FV_r = PV \times e^{f \times t}$$

$$FV_r = (500\,000 \times e^{0{,}01396 \times 3})$$

$$\boldsymbol{FV_r = 521390{,}81\ Kč}$$

MUNI ECON

Vzorový příklad – 2. polovina b)

Řešte za předpokladu, že sazby zůstávají stejné, **proces úročení i inflace je spojitý.**

Logická úvaha: Jaká je hodnota úrokové a inflační intenzity? Bude FV vyšší než minule?

Jaká bude reálná hodnota kapitálu z vkladu 500 000 Kč, který necháte po dobu 3 let úročit měsíčním připisováním úroků? Úroková sazba, kterou finanční ústav poskytuje je 3,8 % p. a. Dále víte, že měsíční odhad inflace je 0,2 %.

Vzorový příklad – řešení 2. polovina, b)

b) Pouze spojitý proces

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

FV_r = ?

spojité úročení = ∞ ú.o./ rok

r = 3,8 % p. a. = **f**

inflace $_m$ = 0,2 % = f(π)

Základní úvaha:

$$FVr = PV\left(\frac{r_{ef}+1}{\pi_{ef}+1}\right)^t = PV\left(\frac{e^{f(rok)\times t}}{e^{\pi(rok)\times t}}\right)$$

Co je úroková intenzita?

$$FVr = PV\left(\frac{e^{f\times t}}{e^{f_\pi \times m\times t}}\right) = 500\,000 \times \left(\frac{e^{0,038\times 3}}{e^{0,002\times 12\times 3}}\right)$$

$$FV_r = 521447,2394$$

MUNI
ECON

Příklad Socrative 2 – 4

Zjistěte nominální úrokovou sazbu s počtem konverzí 4. Víte, že kapitál vzrostl z 500 000 Kč na 768 000 Kč během 8 let při spojitém úročení. Jaká bude úroková intenzita, efektivní úroková sazba a sazba, **kterou by banka inzerovala jako p. a. s kvartálním úrokovým obdobím při stejném zhodnocení**.

Ve výpočtu využijte úrokovou intenzitu a efektivní úrokovou sazbu.

Socrative room name: FIMA

Příklad Socrative 2 - 4 - řešení

- PV = 500 000
- FV = 768 000
- t = 8
- Úročení spojité
- r_{nom} = ? p. a.
- m = 4 = „kvartální úročení“

1. $f = \frac{ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{t} = 0{,}053647704 = 5{,}36\ \%$
2. $r_{ef} = e^{f} - 1 = 0{,}05511 = 5{,}511\ \%$
3. $r_{nom} = \left((1 + r_{ef})^{\frac{1}{4}} - 1\right) \times 4 = 0{,}054009$

$$r_{nom} = 5{,}4009\ \%$$

Příklad Socrative 5

Která úroková sazba je nejvýhodnější?

a) 15 % p. a. s ročním připsáním úroků

b) 1,24 % p. m. s půlročním připsáním úroků

c) 14,8 % p. a. s čtvrtletním připsáním úroků

d) 3,675 % p. q. s měsíčním připsáním úroků

e) 7,3 % p. s. ve spojitém úročení

Dopisovací tabulka na tabuli – počítáme společně

Socrative room name: FIMA

MUNI ECON

Příklad Socrative 5 - řešení

Efektivní úroková sazba:

a) $r_{ef} = r$

b) $r_{ef} = (1 + r \times 6)^2 - 1$

c) $r_{ef} = (1 + \frac{r}{4})^4 - 1$

d) $r_{ef} = (1 + \frac{r}{3})^{12} - 1$

e) $r_{ef} = e^f - 1$

$\ln((1+r)^2)$

zadání	r(x)	p. a.	r_{ef}
15 % p. a. roční připsání úroků	0,15	15,0%	15,00%
1,24 % p. m. půlroční připsání úroků	0,0124	14,9%	15,43%
14,8 % p. a. čtvrtletní připsání úroků	0,148	14,8%	15,64%
3,675 % p. q. měsíční připsání úroků	0,03675	14,7%	**15,73%**
7,3 % p. s. spojité úročení	0,073	14,6%	15,13%

MUNI ECON

Příklad Socrative 6

Vybrali jste si spořící účet s nabídkou 3,68 % p. q. s měsíčním připsáním úroků a vložili jste na něj 300 000. Po prvním roce jste se ale rozhodli, že využijete konkurenční nabídky, která vám umožnila úročit prostředky sazbou 8 % p. s. ve spojitém úročení. Kolik za další 2 roky získáte prostředků, jestliže podléháte 15% srážkové dani?

Zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Příklad Socrative 6 - řešení

PV	300 000 Kč
r(1)	3,68% p. q.
m(1)	3
t(1)	1
t(2)	2
r(2)	8% p. s.
m(2)	nekonečno
Tax	15%
FV(1)	
FV2()	
FV netto	

1. Jak aplikovat srážkovou daň?
2. Jaká je FV za první rok = na prvním účtu?
3. Jaká je FV na konci spoření = po dalších dvou letech za nových podmínek?

MUNI ECON

Příklad Socrative 6 - řešení

PV	300 000 Kč
r(1)	3,68% p. q.
m(1)	3
t(1)	1
t(2)	2
r(2)	8% p. s.
m(2)	nekonečno
Tax	15%
FV(1)	339 765
FV2()	441 387
FV netto	441 387

1. **Jak aplikovat srážkovou daň?**

$$r * (1 - Tax)$$

2. **Jaká je FV za první rok = na prvním účtu?**

$$FV(1) = PV\left(1 + \frac{r}{m} * (1 - Tax)\right)^{m \times 4 \times t} =$$
$$300\,000\left(1 + \frac{0{,}0368}{3} * 0{,}85\right)^{12 \times 1} = 339\,765{,}16 \text{ Kč}$$

3. **Jaká je FV na konci spoření = po dalších dvou letech za nových podmínek?**

$$FV(2) = FV(1) \times e^{f*(1-Tax) \times 2 \times t} = 339\,765{,}16 \times e^{\ln(1+0{,}08)*0{,}85 \times 2 \times 2}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 7

Očekáváte, že za 3 roky budete mít na spořícím účtu 300 000 Kč. Kolik je reálná hodnota zůstatku, jestliže předpokládáte, že roční inflace (dnes 3 %) každý rok o 10 % skokově vzroste, přičemž inflace působí na prostředky **spojitě**?

Úvaha: jak se inflace promítne do výše budoucího kapitálu?

Úvaha: jaký je rozdíl mezi procenty a procentními body?

Příklad Socrative 7 - řešení

FV netto	**300 000**
Inflace t(1)	**3%**
Inflace t(2)	**0,033**
Inflace t(3)	**0,0363**
FV(netto_real)	**272 080,99**

1. **Zjistíme inflační intenzity**

$$f(\pi_1) = ln(1+\pi_1) = ln(1{,}03) = 0{,}029558802$$
$$f(\pi_2) = ln(1+\pi_2) = ln(1{,}033) = 0{,}03246719$$
$$f(\pi_3) = ln(1+\pi_3) = ln(1{,}0363) = 0{,}0356567$$

1. **Diskontujeme inflací**

$$\boldsymbol{FV_r = \frac{FV\ netto}{e^{f(\pi_1)} \times e^{f(\pi_2)} \times e^{f(\pi_3)}} = \frac{FV\ netto}{e^{f(\pi_1)+f(\pi_2)+f(\pi_3)}}}$$

Lze řešit i jinak?

$$\boldsymbol{FVr = \left(\frac{300\,000}{e^{0{,}029558802\ +0{,}03246719\ +0{,}0356567}}\right)}$$

$$\boldsymbol{FV\ netto_{real} = 272\ 080,99\ Kč}$$

MUNI ECON

Nezapomeňte zodpovědět zbývající Socrative

MUNI ECON

Děkuji za aktivní účast

v případě dotazů piště ☺