MUNI
ECON

Anuitní počty - spoření a důchod

Prezentace příkladů

- Tým 7
- Tým 8

Na příští týden odevzdávají týmy 9 + 10 komentované prezentace!

Základní pojmy

- **Spoření vs. investice**
  - Spořící účty
  - Termínované vklady, vkladní knížky
  - Stavební spoření
  - Je doplňkové penzijní spoření (penzijní připojištění) opravdu spoření (pojištění)?
- **Důchod = pravidelný příjem (mzda, výnos z majetku, transfer)**
  - Státní
  - Soukromý
  - Doživotní
  - Nekonečný
  - Předlhůtní/polhůtní
- **Anuita**

  Představuje stálou platbu hrazenou v pravidelných časových intervalech po dané období. Při hodnocení těchto plateb se uplatňuje koncept časové hodnoty peněz.
  - **Předlhůtní anuita**
  - **Polhůtní anuita**

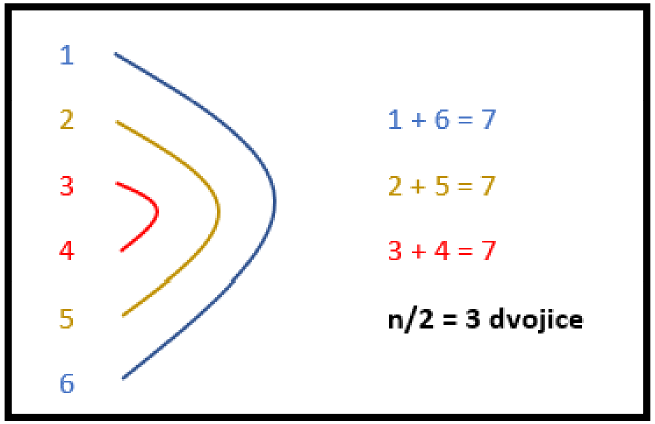
Vše, co potřebujete znát

1. Aritmetická posloupnost (tvoří ji jednoduché úročení)

$$a_{n+1} = a_n + \color{red}{\boldsymbol{d}}$$

Součet aritmetické posloupnosti = aritmetická řada

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$$

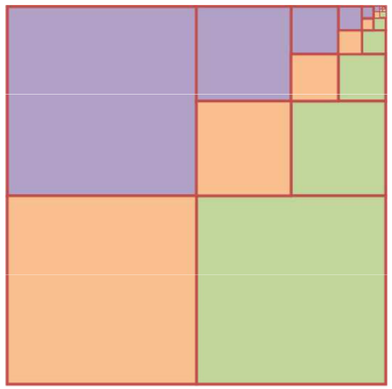


2. Geometrická posloupnost (tvoří ji složené úročení)

$$a_{n+1} = a_n \cdot \color{blue}{\boldsymbol{q}}$$

Součet geometrické posloupnosti = geometrická řada

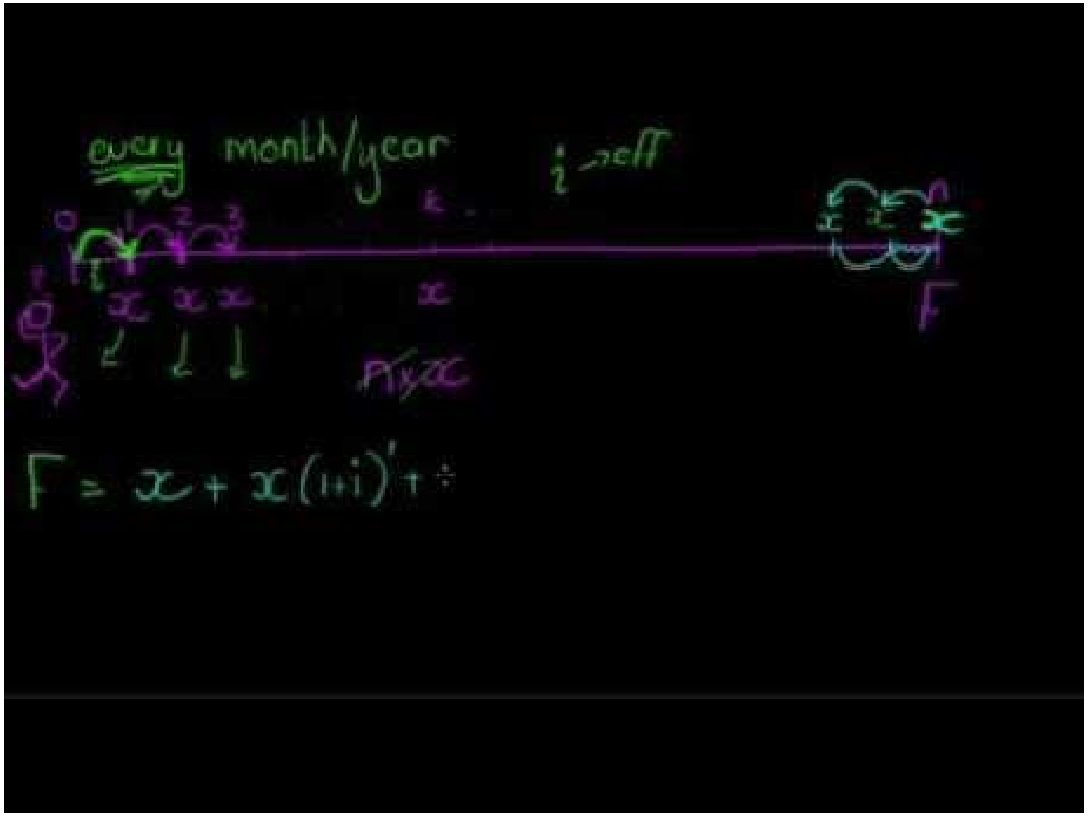
$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

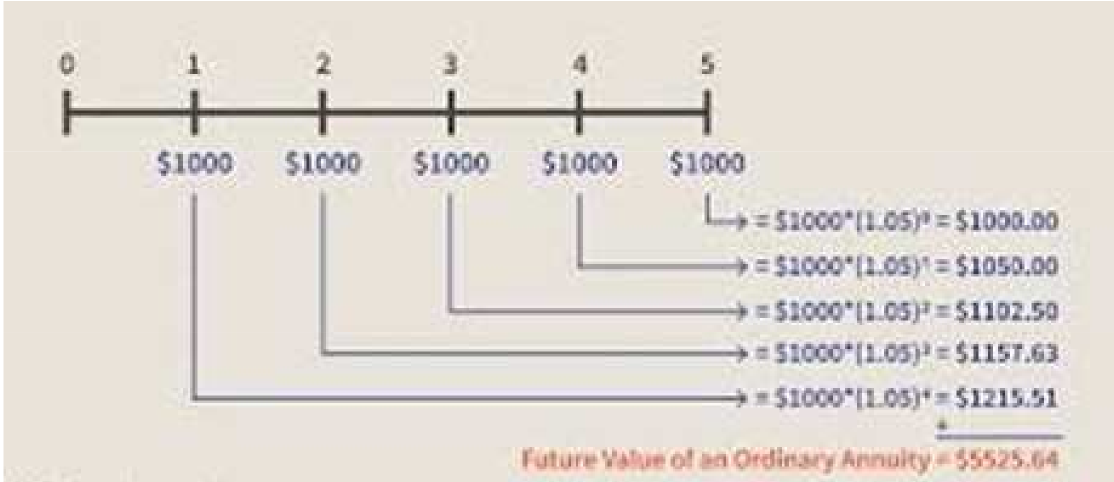


a1 = 1
q = ?

MUNI
ECON

Jak to funguje - FVA?





Začít v 1:40

MUNI ECON

Budoucí hodnota anuity (= spoření)

= Pravidelné úložky (spoření) v pravidelných intervalech po určitou dobu za daných podmínek

1. **Polhůtní spoření,** vklad proveden na konci každého období, tzn. tento vklad není po toto období úročen:

$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

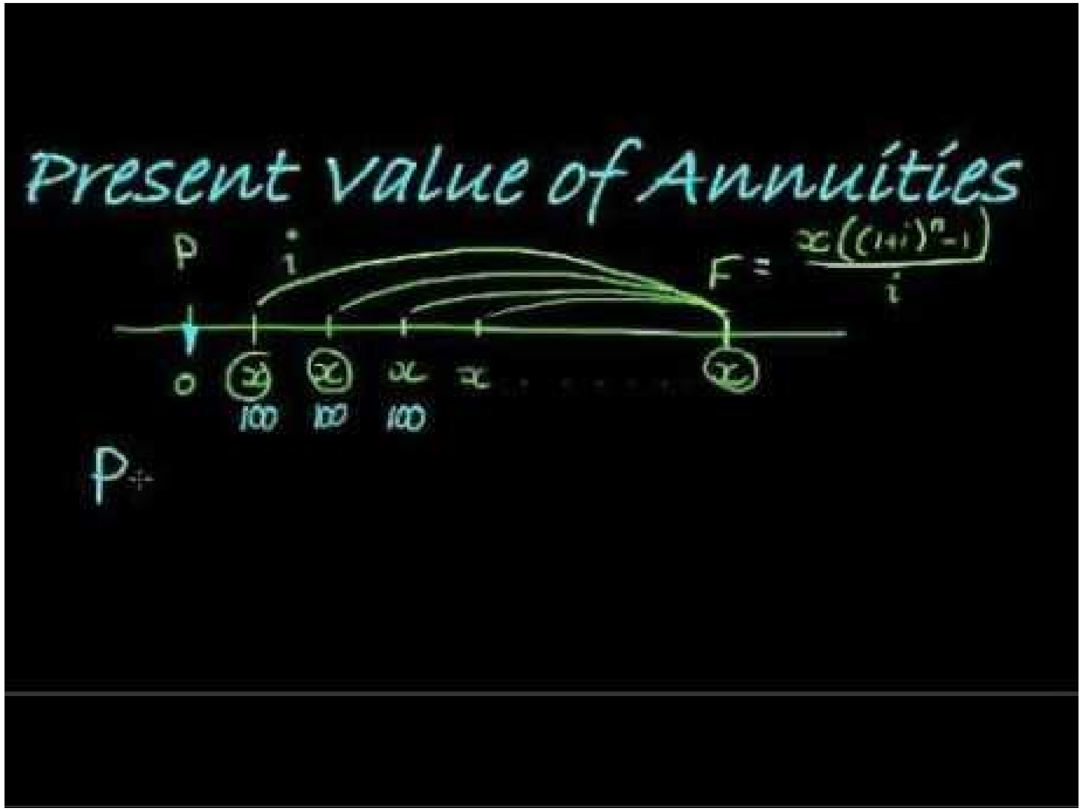
2. **Předlhůtní spoření,** vklad proveden na začátku každého období, tzn. je nutno o celé první období déle úročit:

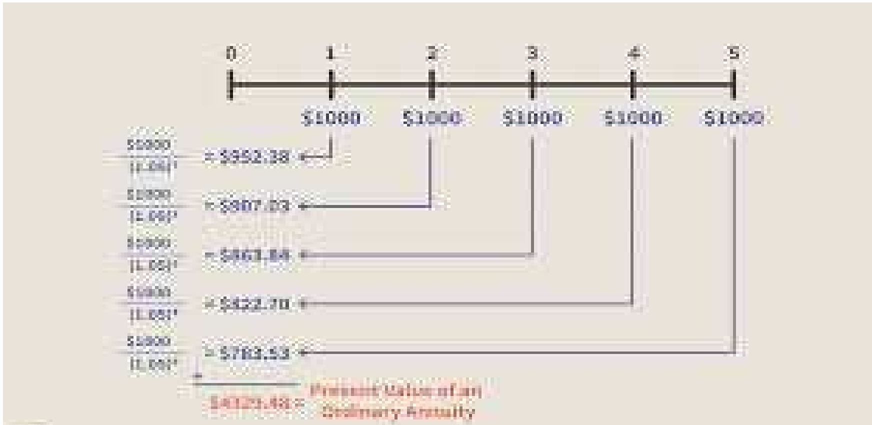
$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Kde ***FVA*** je budoucí hodnota anuity, ***a*** je výše anuitní platby, ***r*** je úroková míra, ***n*** je počet období.

MUNI ECON

Jak to funguje - PVA?

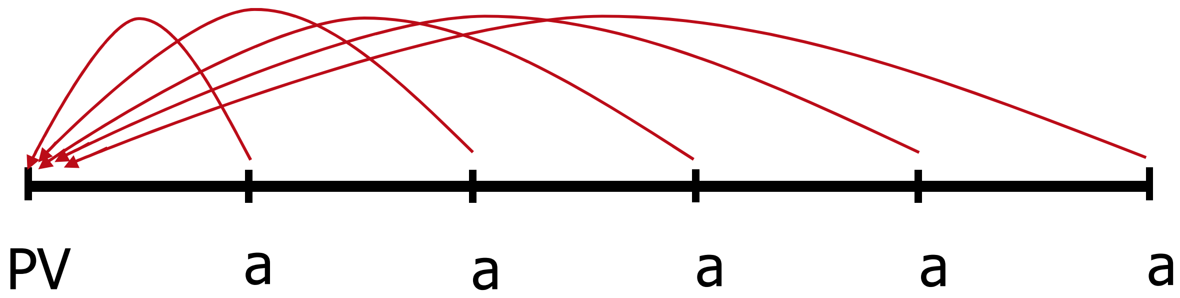




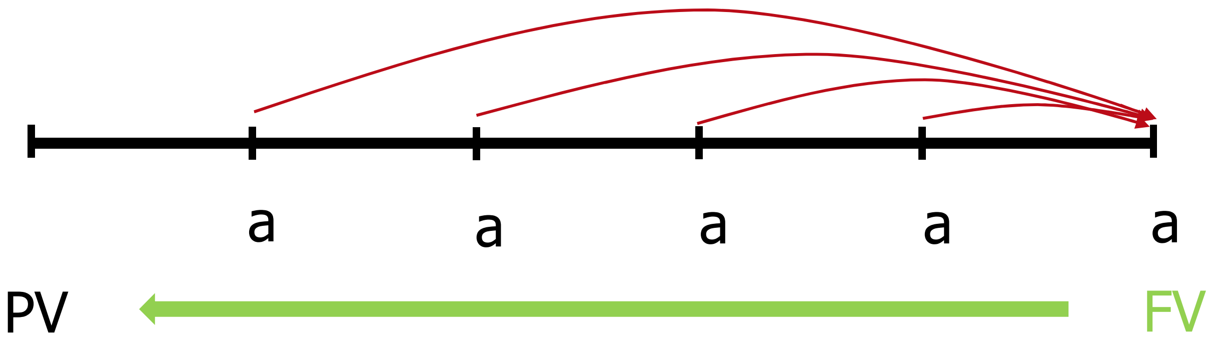
MUNI
ECON

Hraní si s časovými hodnotami

Skripta: „Princip důchodového počtu je založen na kalkulaci částky, ze které následně budou vypláceny anuity v průběhu daného časového intervalu. Tato částka musí být rovna součtu současných hodnot budoucích anuit."



Alternativně: Cílem je vyjádřit PV všech budoucích anuit. Toho lze však dosáhnout i tak, že využijeme nejprve dopočítání FV všech anuit, což již umíme ze spořícího počtu. Teprve následně budeme vypočtenou souhrnnou FV diskontovat do času 0, abychom spočítali PV. Tohoto typicky lze využít pro snadnější výpočet aritmetické řady v rámci PO < ÚO.



MUNI ECON

Současná hodnota anuity (= důchod)

= pravidelné výplaty (anuity) v pravidelných intervalech po určitou dobu za daných podmínek

= analogické k úvěru (důchod pro věřitele)

1. **Polhůtní důchod,** nechávám si vyplácet důchod na konci každého období, tzn. úročí se o období víc, a tedy pokud chci stanovit, kolik prostředků musím mít na účtu v čase 0, abych mohl vyplácet po počet období n důchod ve výši a, je současná hodnota nižší, než u předlhůtního důchodu (potřebuji méně):

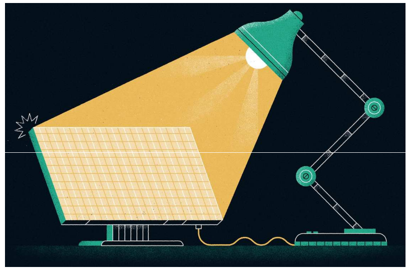
$$PVA = \boxed{a \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}} = \boxed{a \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}} = \boxed{a \times \frac{1-v^n}{r}}, \text{ kde } v = \frac{1}{1+r}, \text{ přičemž } \frac{1-v^n}{r} \text{ nazýváme zásobitel polhůtní.}$$

2. **Předlhůtní důchod**, nechávám si vyplácet důchod na začátku každého období, o to vyšší je PVA (potřebuji více):

$$PVA = \boxed{a \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}} = \boxed{a \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \times (1+r)} = \boxed{a \times \frac{1-v^n}{1-v}}, \text{ přičemž } \frac{1-v^n}{1-v} \text{ nazýváme zásobitel předlhůtní}$$

Kde ***PVA*** je současná hodnota anuity, ***a*** je výše anuitní platby, ***r*** je úroková míra, ***n*** je počet období.

Nekonečný důchod



- Jedná se o výplaty, které nemají ohraničenou dobu vyplácení anuit a svou povahou jsou při splnění určitých podmínek věčné, tedy tvoří perpetuity.
- Počet úrokových období se tedy blíží nekonečnu. Součet bude konvergovat k řešení vyjádřeného reálným číslem v případě, kdy |q| < 1.

Již známe obecný vztah pro součet geometrické řady:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a_1} \cdot \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{q^n}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{q}},$$

přičemž u věčného důchodu $n \to \infty$ a $|q| < 1$, tudíž člen q^n se bude limitně blížit nule. Proto lze vztah zapsat jako:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a_1} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{q}}$$

$D_0 = a \cdot \frac{1+r}{r}$ při ÚO = PO a předlhůtním důchodu

$D_1 = \frac{a}{r}$ při ÚO = PO a polhůtním důchodu

Jaké příklady budeme řešit?

- Co hledám?
  - FVA vs. PVA
  - Výši anuity = a
  - Délku spoření = **n**

$$FVA = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow \frac{FVA \times i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$ln\ \frac{FVA \times i}{a} + 1 = ln\ (1+i)^n \rightarrow ln\ \frac{FVA \times i}{a} + 1 = n \times ln\ (1+i) \rightarrow n = \frac{ln\ \frac{FVA \times i}{a} + 1}{ln\ (1+i)}$$

- Pozor na úrokové období, zadanou úrokovou míru a typ úročení
  - Kdy ukládáme prostředky = před/polhůtní spoření?
  - Ukládáme častěji během jednoho úrokového období?
  - Ukládáme méně často, než je náš účet úročen?
  - Je třeba upravit nominální úrokovou míru na úrokové období?
  - Úročí banka standardně (složeně), nebo jinak (např. spojitě)?

$r_{efektivní}$

$$FVA = a \times X \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Součet aritmetické řady: $\frac{n}{2} \times (x_1 + x_n)$

- Zohledňuji daň, inflaci, poplatky
  - Daň se platí vždy ze zisku!!!
  - Pozor na období: rozdíl mezi ÚO a DO, poplatky za správu apod.
  - Výpočet FVA lze využít i pro pravidelné měsíční poplatky apod.
  - Diskontuji FVA na reálnou hodnotu = totožný postup co známe

- Dynamický vývoj: průběžné změny v úrokové sazbě, inflaci apod.

Než začneme počítat

1. UO = PO   Tvoří geometrickou řadu.

$$FVA = a_1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}$$

2. UO < PO   Tvoří geometrickou řadu, pozor na kvocient.

$$FVA = a_1 \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m} \cdot m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}} - 1}$$

r – roční míra
l – počet UO během roku
m – počet vkladů během roku
n – počet let

3. UO > PO   Tvoří aritmetickou a geometrickou řadu.

$$FVA = a \times m \times \left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}$$

Vzorový příklad - spoření

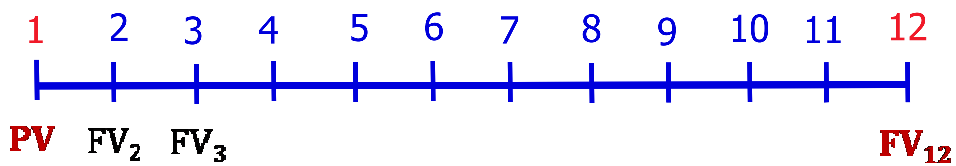
Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte při měsíčním spoření během 10 let částku 850.000 Kč? Banka připisuje úrok ročně a úroková sazba činí 3 % p. a. Prostředky vkládáte na BÚ **na začátku měsíce**. Kolik bude výška vkladu, jestli bude vklad **polhůtní.**

Jak řešíme?

MUNI ECON

Vzorový příklad – řešení 1a

Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte **při měsíčním spoření** během 10 let částku 850.000 Kč? Banka **připisuje úrok ročně** a úroková sazba činí 3 % p. a. Prostředky vkládáte na BÚ **na začátku měsíce**.



$$FV_2 = a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = a + a \times \frac{r}{12}$$

$$FV_3 = a \cdot \left(1 + \frac{r}{12} + \frac{r}{12}\right) + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = 2a + a \cdot \frac{2r}{12} + a \cdot \frac{r}{12}$$

Jaká je úložka za celé ÚO, jeden rok?
Suma úložek = 12a, ale co úroky?

- V rámci jednoho ÚO jednoduché úročení
- Každý měsíc vložíme **a**, tedy každé další **a** je za rok úročené o r/12 méně, než předešlé
- **Vzniká aritmetická řada:**

$$FV_{12} = 12a + a\left(\frac{12r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{11r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{10r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{9r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{8r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{7r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{6r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{5r}{12}\right) a \cdot \left(\frac{4r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{3r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{2r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{r}{12}\right)$$

$$FV_{12} = 12a + a\left[\frac{n}{2} \times (x_1 + x_n)\right] = a * \left(12 + \left[\frac{12}{2} \times \left(\frac{12r + 1r}{12}\right)\right]\right) = a \times \left(12 + 12 \times \frac{13r}{24}\right) = a \times 12 \times \left(1 + \frac{13r}{24}\right)$$

$$FV_{12} = a \times m \times \left(1 + \frac{12 + 1}{24} \times r\right)$$

$$FVA = a \times m \times \left(1 + \frac{m+1}{2 \times m} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vzorový příklad – řešení 1a

a = ?
FVA = 850 000
r = 3 % p. a.
n = 10 let
m(a) = 12 (měsíční spoření)
m(r) = 1 (ÚO = 1 rok)
m(a)>m(r) = AR

na začátku měsíce

Předlhůtní spoření:

Úložka za celé ÚO: $a \times m \times \left(1 + \frac{m+1}{2 \times m} \times r\right)$

$$FVA = \boldsymbol{a} \times m \times \left(1 + \frac{12+1}{24} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

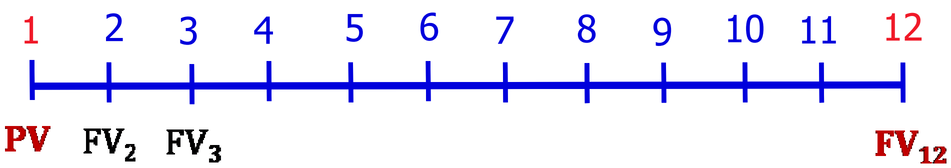
$$850\,000 = \boldsymbol{a} \times 12 \times \left(1 + \frac{12+1}{24} \times 0{,}03\right) \times \frac{(1+0{,}03)^{10} - 1}{0{,}03}$$

→ vyjádřit $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \frac{FVA \times r}{(1+r)^n - 1} \div \left(1 + \frac{13}{24} \times 0{,}03\right) \div \mathrm{m} = \mathbf{6080}$$

Vzorový příklad – řešení 1b - tabule

Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte **při** **měsíčním spoření** během 10 let částku 850.000 Kč? Banka **připisuje** **úrok ročně** a úroková sazba činí 3 % p. a. Kolik bude výška vkladu, jestli bude **vklad polhůtní.**

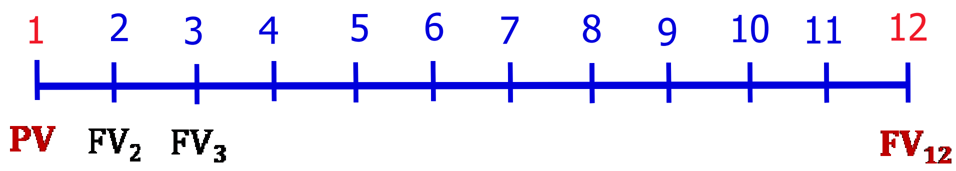


Jaká je úložka za celé ÚO, jeden rok?
Suma úložek = 12a, ale co úroky?

- V rámci jednoho ÚO jednoduché úročení
- Každý měsíc vložíme **a**, tedy každé další **a** je za rok úročené o r/12 méně, než předešlé
- **Vzniká aritmetická řada**

Vzorový příklad – řešení 1b

Kolik bude činit Vaše pravidelná úložka, kterou si zabezpečíte **při měsíčním spoření** během 10 let částku 850.000 Kč? Banka **připisuje úrok ročně** a úroková sazba činí 3 % p. a. Kolik bude výška vkladu, jestli bude **vklad polhůtní.**



Jaká je úložka za celé ÚO, jeden rok?
Suma úložek = 12a, ale co úroky?

- V rámci jednoho ÚO jednoduché úročení
- Každý měsíc vložíme **a**, tedy každé další **a** je za rok úročené o r/12 méně, než předešlé
- **Vzniká aritmetická řada**
- **PŘIDÁME ČLEN PRO ZJEDNODUŠENÍ:**

$$\mathbf{FV_2 = a}$$

$$\mathbf{FV_3 = a + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = 2a + a \times \frac{r}{12}}$$

$$\mathbf{FV_4 = a + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12} + \frac{r}{12}\right) + a \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right) = 3a + a \cdot \frac{2r}{12} + a \cdot \frac{r}{12}}$$

$$\boxed{\mathbf{FV_{12} = 12a + a \cdot \left(\frac{11r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{10r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{9r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{8r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{7r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{6r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{5r}{12}\right) a \cdot \left(\frac{4r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{3r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{2r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{1r}{12}\right) + a \cdot \left(\frac{0r}{12}\right)}}$$

$$\mathbf{FV_{12}} = 12\mathrm{a} + \mathrm{a}\left[\frac{n}{2} \times (x_1 + x_n)\right] = a * \left(12 + \left[\frac{12}{2} \times \left(\frac{11r + 0r}{12}\right)\right]\right) = a \times \left(12 + 12 \times \frac{11r}{24}\right) = \boldsymbol{a \times 12 \times \left(1 + \frac{11r}{24}\right)}$$

$$\mathbf{FV_{12}} = a \times m \times \left(1 + \frac{11 + 0}{24} \times r\right)$$

$$FVA = a \times m \times \left(1 + \frac{m - 1}{2 \times m} \times r\right) \times \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Vzorový příklad – řešení 1b

a = ?
FVA = 850 000
r = 3 % p. a.
n = 10 let
m(a) = 12 (měsíční spoření)
m(r) = 1 (ÚO = 1 rok)
m(a)>m(r) = AR

na konci měsíce

Polhůtní spoření:

Úložka za celé ÚO: $a \times m \times \left(1 + \frac{m-1}{2 \times m} \times r\right)$

$$FVA = \boldsymbol{a} \times m \times \left(1 + \frac{11}{24} \times r\right) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$850\,000 = \boldsymbol{a} \times 12 \times \left(1 + \frac{11}{24} \times 0{,}03\right) \times \frac{(1+0{,}03)^{10} - 1}{0{,}03}$$

→ vyjádřit $\boldsymbol{a}$:

Rozdíl mezi před – polhůtním spořením?

$$6080 \text{ Kč vs. } 6095 \text{ Kč} = \mathbf{15}\ \boldsymbol{K}\text{č}$$

$$\rightarrow \mathbf{12 \times 10 \times 15 = 1\,800}\ \textit{bez zohlednění ceny kapitálu!}$$

MUNI ECON

Příklady Socrative 1 - 3 na zamyšlení

+ Hlasování:

Pro který případ lze představený přístup (výpočet FVA pomocí součtu geometrické, případně i aritmetické řady) využít:

A) V případě standardního úročení jednorázového vkladu, pokud u tohoto vkladu musíme platit pravidelné poplatky vyjádřené jako procento ze zisku?

B) V případě standardního úročení jednorázového vkladu, pokud u tohoto vkladu musíme platit pravidelné poplatky vyjádřené v absolutní částce (např. poplatek za správu 50 Kč každé čtvrtletí)?

MUNI ECON

Příklad Socrative 4 - spoření

Kolik naspoříte za pět a půl roku, pokud budete pravidelně ukládat na **konci** každého **pololetí** částku 1.500 Kč? Bankovní instituce nabízí sazbu 3,7 % p. a. a připisuje úrok každý měsíc. Připisované úroky podléhají srážkové dani ve výši 15%.

Příklad Socrative 4 – řešení

a = 1 500

FVA = ?

r = 3,7 % p. a.

n = 5,5 let

m(a) = 2 (pololetní spoření)

m(r) = 12 (ÚO = 1 měsíc)

Tax = 15%

na konci měsíce

Polhůtní spoření:

$$FVA = a \times \frac{(1+r*(1-Tax))^{n}-1}{r*(1-Tax)}$$

$$FVA = 1\,500\ \times \frac{(1+\frac{0,037}{12}*0,85)^{6*(2\times 5,5)}-1}{\left(\frac{0,037}{12}*0,85\right)^{6}}$$

$$\boldsymbol{FVA = 17\,869,85769}\ \text{Kč}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 5 - spoření

Jak často musíte vkládat na bankovní účet částku 750 Kč vždy na začátku platební periody, jestliže za 8 let si naspoříte částku 250.275,3 Kč. Banka poskytuje úrokovou sazbu 0,3 % p. m. a úrokové období je tři měsíce.

Příklad Socrative 5 – řešení

a = 750

FVA = 250 275,3 Kč

r = 0,3 % p. m.

n = 8 let

m(a) = ?

m(r) = 4 (ÚO = 1 kvartál)

na začátku periody

Předlhůtní spoření:

$$FVA = \boxed{a \times m \times \left(1 + \frac{m+1}{m \times 2} \times r\right)} \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\boxed{am + am\frac{m+1}{m \times 2} \times r = am + \frac{am+a}{2} r = am + \frac{amr}{2} + \frac{ar}{2} = m\left(a + \frac{ar}{2}\right) + \frac{ar}{2}}$$

$$\left(\left(\frac{FVA}{(1+r_m)^{m \times n} - 1} \times r\right) - \frac{a \times r}{2}\right) / \left(a + \frac{a \times r_m}{2}\right) = m$$

$$m = \left(\frac{250275{,}3}{(1+0{,}009)^{4 \times 8} - 1} \times 0{,}009 - \frac{750 \times 0{,}009}{2}\right) / \left(750 + \frac{750 \times 0{,}009}{2}\right)$$

$$m = 9{,}000000983$$

Vkládáme minimálně 9x za čtvrtletí = 3x za měsíc = co 10 dní

MUNI ECON

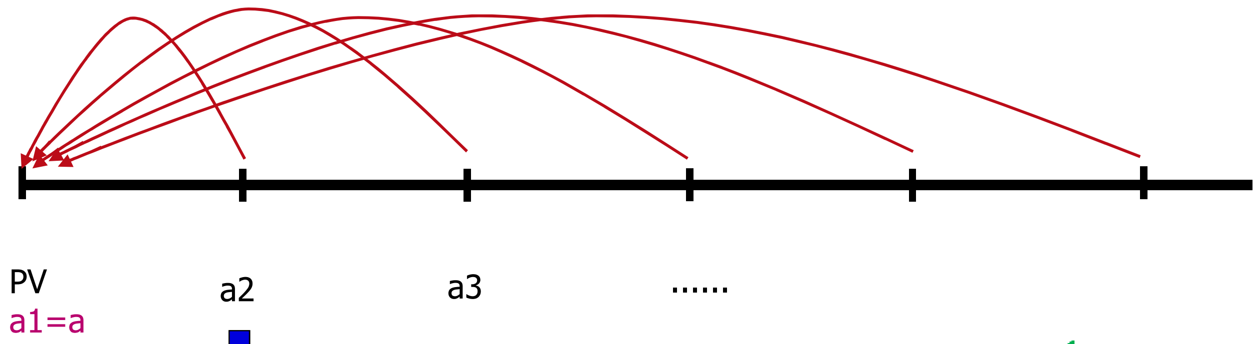
Vzorový příklad - důchod

Kolik anuit vyplatíte a jak dlouho budete vyplácet částku 789 Kč v pravidelných 15 denní intervalech, pokud víte, že máte k dispozici objem prostředků ve výši 135 250,64 Kč. Finanční ústav, který vám bude spravovat prostředky, garantuje po celou dobu úrokovou sazbu 1,8 % p. q. Úrok je počítán 24 krát do roka. Dále víte, že se jedná o předlhůtní důchod.

MUNI ECON

Vzorový příklad - řešení

PV = 135 250,64 Kč = D_0
a = 789 Kč
r = 1,8 % p.q. = 0,3 % p.15d.
PO = 15 dní
ÚO = 15 dní



$$D = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\frac{a}{1 + 0{,}003}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1 + 0{,}003}$$

$$D_0 = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}003}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+0{,}003}} \text{ nebo alternativně } = a \cdot (1 + 0{,}003) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}003}\right)^n}{0{,}003}$$

$$n = \frac{\ln\left[1 - \frac{D_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+0{,}003}\right)}{a}\right]}{\ln\left(\frac{1}{1+0{,}003}\right)}$$

$n = 240$ ⟹ počet anuit, tj. 10 let

MUNI ECON

Příklady Socrative 6 – 7 na zamyšlení

Příklad Socrative 8 - důchod

Kolik prostředků musíte mít k dispozici, abyste zajistili pravidelný dvoudenní důchod ve výši 10,- po dobu 12 let, jestliže víte, že úroková sazba, kterou po celou dobu bude banka garantovat, činí 3,4 % p. a. Banka připisuje úrok každý měsíc. Uvažujte předlhůtní úrok.

MUNI ECON

Příklad Socrative 8 – řešení

a = 10 Kč
n = 12 let
r = 3,4 % p.a.
ÚO = 30 D
PO = 2 D
m = 15
D_0 = ?

Nejprve vypočtěme co se stane v rámci 1 úrokovacího období

$$X_1 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r}$$

$$X_1 = 10 \cdot 15 \cdot \left(1 + \frac{16}{30} \cdot \frac{0{,}034}{12}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{0{,}034}{12}}$$

a dosadíme za a1 do geometrické řady, kde jeden člen odpovídá úrokovacímu období:

$$D_0 = X_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{0{,}034}{12}}\right)^{12 \cdot 12}}{1 - \frac{1}{1+\frac{0{,}034}{12}}} = \boxed{17\,742{,}87 \text{ Kč}}$$

Příklad Socrative 8 – řešení

a = 10 Kč
n = 12 let
r = 3,4 % p.a.
ÚO = 30 D
PO = 2 D
m = 15
D_0 = ?

Příklad lze samozřejmě zapsat v jedné rovnici:

$$D_0 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

což lze upravit do tvaru:

$$D_0 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot r\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r}$$

kde r = 0,034/12 a kde n = 12*12

MUNI ECON

Příklad Socrative 9 - důchod

Vypočítejte částku, která vám zajistí měsíční polhůtní věčný důchod ve výši 30 000,--. Víte, že úroková sazba činí 5 % p.a. a úrokovací období je jeden měsíc. Proveďte zkoušku (na tabuli).

Jak by se změnil výpočet, kdyby ÚO = 6 měsíců? (na tabuli)

Socrative room name: FIMA

MUNI ECON

Příklad Socrative 9 – řešení 1/2

a = 30 000 Kč
n = ∞
r = 5 % p.a.
ÚO = 1 M
PO = 1 M
Polhůtní
D_1 = ?

$$D_1 = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$D_1 = a \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)}}$$

$$D_1 = 7\,200\,000{,}00\ Kč$$

alternativně lze zkrátit: $D_1 = a \cdot \frac{1}{r}$

Zkouška: Pokud má být důchod věčný, tak musí být vyplácená anuita rovna (nebo menší) naběhlému úroku za dané období. Jinými slovy se dostupný kapitál po zúročení a výplatě anuity nesmí snižovat.

D_1 + I - a = D_1 ....

$$7\,200\,000 + 7\,200\,000 \cdot (1 + 0{,}05/12) - 30000 = 7\,200\,000$$

Příklad Socrative 9 – řešení 2/2

a = 30 000 Kč
n = ∞
r = 5 % p.a.
ÚO = 6 M
PO = 1 M
Polhůtní
D_1 = ?

Jak by se změnil výpočet, kdyby ÚO = 6 měsíců?

$$D_1 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot r\right) \frac{1}{(1+r)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+r)}}$$

$$D_1 = 30000 \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{6-1}{2 \cdot 6} \cdot \frac{0{,}05}{2}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)}}$$

$$D_1 = 7\,275\,000{,}00\ Kč$$

MUNI ECON

Zamyšlení:

Pokud platíme vstupní poplatek a roční průběžné poplatky, jak je zakomponujeme do výpočtu? Uvažujte situaci: Na konci každého roku platíte poplatek za vedení účtu 100 Kč. Poplatek za zřízení účtu je 1 000 Kč, chceme zjistit anuitu, díky které za dané období naspoříme 100 000 Kč = toto si budeme moci z účtu vybrat.

Příklad Socrative 10 - spoření

Stanovte výši předlhůtní anuity, která vám při spojitém úročení vygeneruje během 15 let 900.000,-. Víte, že kvartální efektivní úroková sazba činí 0,8 %. Prostředky vkládáte na bankovní účet v 15-denních intervalech. Na konci každého roku platíte poplatek za vedení účtu 300 Kč. Poplatek za zřízení účtu je 9 000 Kč

Socrative room name: FIMA

MUNI ECON

Příklad Socrative 10 – řešení

a = ? předlhůtní

FVA = 900 000 Kč

r = 0,8 % p. q.

n = 15 let

m(a) = 24 (15-denní interval)

m(r) = nekonečno= spojité úročení

Poplatek správa = 300 Kč/rok/na konci

Zřizovací poplatek = 9 000 Kč

Kolik musíme mít brutto, aby netto bylo 900 000 Kč?

$$FVA_{brutto} = FVA_{netto} + FV_{vstup} + FVA_{poplatek}$$

$$= 900\,000 + 9\,000 \times e^{\ln(1+0{,}008)*4*15} + 300 \times \frac{e^{\ln(1+0{,}008)*4*15} - 1}{e^{\ln(1+0{,}008)*4} - 1}$$

$$FVA_{brutto} = \mathbf{920195{,}2\ Kč} = \boldsymbol{to\ spoříme}$$

Předlhůtní anuita:

$$FVA_{brutto} = a \times e^{f_m} \times \frac{e^{f_m \times m \times n} - 1}{e^{f_m} - 1}$$

$$\frac{FVA_{brutto}}{e^{f_m} \times (e^{f_m \times m \times n} - 1)} \times \left(e^{f_m} - 1\right) = \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{920195{,}2}{e^{\frac{\ln(1+0{,}008)}{3*2}} \times \left(e^{\frac{\ln(1+0{,}008)}{3*2} \times 24 \times 15} - 1\right)} \times \left(e^{\frac{\ln(1+0{,}008)}{3*2}} - 1\right) = \mathbf{1992\ Kč}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 11 - spoření

Na účet jsme vložili 200 000 Kč na 5 let při sazbě 2% p.q. a čtvrtletním připisování úroků. Za zřízení účtu jsme z vkladu zaplatili poplatek 5000 Kč. Dále jsme platili půlroční poplatek ve výši 200 Kč (na konci). Kolik jsme na konci spoření měli na účtu prostředků?

Příklad Socrative 11 – řešení

PV = 200 000 Kč jednorázově

r = 2 % p. q.

n = 5 let

m(r) = 4 (čtvrtletní ÚO)

Poplatek = 200 Kč/půlrok/polhůtní

m(poplatek) = 2

Zřizovací poplatek = 5 000 Kč

FV_netto = ?

Složené úročení:

$$PV_{netto} = PV - Zřizovací\ poplatek = \mathbf{195\,000\,Kč}$$

$$FV_{brutto} = PV_{netto} \times (1+r)^{m \times n} = 195\,000 \times (1+0{,}02)^{4 \times 5}$$

$$FV_{brutto} = \mathbf{289759{,}74\ Kč}$$

Polhůtní anuita = poplatek = nutné sladit čas!

$$FVA_{poplatek} = a \times \frac{(1+r)^{m(poplatek) \times m_r / m(poplatek) \times n} - 1}{(1+r)^{m(poplatek)} - 1}$$

$$FVA_{poplatek} = 200 \times \frac{(1+0{,}02)^{2 \times 4/2 \times 5} - 1}{(1+0{,}02)^2 - 1} = \mathbf{2405{,}68\ Kč}$$

$$\boldsymbol{FV_{netto} = FV_{brutto} - FVA_{poplatek} = 287354}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 12 - spoření

Na účet jsme vložili 200 000 Kč na 5 let při sazbě 2 % p.q. a čtvrtletním připisování úroků. Za zřízení účtu jsme zaplatili poplatek 5000 Kč. Dále jsme platili půlroční poplatek ve výši 200 Kč (na konci). Jaká byla průměrná roční výnosnost investice?

Socrative room name: ABCDE

Příklad Socrative 12 – řešení

PV = 200 000 Kč jednorázově

n = 5 let

FV = 287 354 Kč

r_výnosnost = ? p. a.

$$r_{výnosnost} = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

$$r_{výnosnost} = \sqrt[5]{\frac{287\,354}{200\,000}} - 1$$

$$\boldsymbol{r_{výnosnost} = 7,5\,\%\,p.a.}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 13 - spoření

Jak dlouho musíte spořit pravidelnou úložku ve výši 2 000 Kč vždy na konci pololetí, jestliže si chcete našetřit na dovolenou v hodnotě 82238,05 Kč? Úroková sazba nabízená bankou je 1,8 % p. s. a úrok je připisován v měsíčních intervalech. Počítejte s efektivní úrokovou mírou.

Příklad Socrative 13 – řešení

a = 2 000

FVA = 82 238,05 Kč

r = 1,8 % p. s.

n = ?

m(a) = 2 (pololetní spoření)

m(r) = 6 (ÚO = 1 měsíc, 6x/půlrok)

m(a)<m(r), úročí se častěji

na konci pololetí

Polhůtní spoření:

1) Jak zohledníme častější úročení?

$$r_{ef(m_{anuita})} = (1+\frac{r_{p.s.}}{m_r})^{m_r} - 1 = (1+\frac{0{,}018}{6})^{6} - 1$$

2) Jak vypočítáme n?

$$FVA = a \times \frac{(1+r_{ef})^{m_a * \boldsymbol{n}} - 1}{r_{ef}}$$

$$ln\left(\frac{FVA}{a} \times r_{ef} + 1\right) = ln(1+r_{ef})^{m_a * \boldsymbol{n}}$$

$$\frac{ln\left(\frac{FVA}{a} \times r_{ef} + 1\right)}{ln(1+r_{ef}) \times m_a} = \boldsymbol{n = 15{,}49999962 = 15{,}5\ let}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 14 – část ½, důchod

- Kolik činí roční nominální diskontní sazba se dvěma konverzemi (odpovídá délce ÚO). Zvolená diskontní sazba vám zaručí pravidelný polhůtní měsíční důchod ve výši 4350 na půl roku. Dále víte, že suma současných hodnot výplat za úrokové období odpovídá částce 25491.

MUNI ECON

Příklad Socrative 14 – řešení ½

D_1 = 25 491 Kč
a = 4 350 Kč
ÚO = 6 M
PO = 1 M
m = 6

Jelikož PO < ÚO, tak budeme využívat lineární počty. Můžeme se rozhodnout zdali počítat skrze předlhůtní (obchodní diskont) nebo polhůtní úročení (úroková sazba).

$$D_1 = a \cdot m \cdot \left(1 - \frac{m+1}{2m} \cdot d\right)$$

nebo

$$D_1 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r}$$

$$d = 0{,}04 = 4\ \%\ \text{p. s.}$$

$$d_m = 2 * d = 8\ \%\ \text{p. a.}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 15 – část 2/2, důchod

- Kolik činí roční nominální diskontní sazba s dvěma konverzemi (odpovídá délce ÚO). Zvolená diskontní sazba vám zaručí pravidelný polhůtní měsíční důchod ve výši 4350 na půl roku. Dále víte, že suma současných hodnot výplat za úrokové období odpovídá částce 25491.

Určete roční efektivní úrokovou sazbu.

Příklad Socrative 15 – řešení 2/2

D_1 = 25 491 Kč
a = 4 350 Kč
ÚO = 6 M
PO = 1 M
m = 6

Vyjdeme z dopočtené pololetní diskontní sazby. Nemůžeme vycházet z roční sazby se dvěma konverzemi, jelikož to není efektivní sazba.

$$d = 0{,}04 = 4\ \%\ \text{p. s.}$$

$$r = \frac{d}{1-d} = 0{,}041\overline{66}$$

$$r_m = 2 \cdot r = 0{,}08\overline{33}$$

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m$$

kde m se v tomto případě rovná 2

$$r_e = 8{,}506944\ \%\ \text{p.a.}$$

MUNI ECON

Děkuji za aktivní účast

v případě dotazů piště ☺