Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- pojmy konstanta, proměnná, interval, okolí bodu, minimum, maximum, absolutní hodnota

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- pojmy konstanta, proměnná, interval, okolí bodu, minimum, maximum, absolutní hodnota
- algebraické výrazy a jejich úpravy

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- pojmy konstanta, proměnná, interval, okolí bodu, minimum, maximum, absolutní hodnota
- algebraické výrazy a jejich úpravy
- základní elementární funkce a jejich vlastnosti (polynom, racionální lomená funkce, odmocnina, exponenciální a goniometrické funkce, logaritmus)

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- pojmy konstanta, proměnná, interval, okolí bodu, minimum, maximum, absolutní hodnota
- algebraické výrazy a jejich úpravy
- základní elementární funkce a jejich vlastnosti (polynom, racionální lomená funkce, odmocnina, exponenciální a goniometrické funkce, logaritmus)
- pojmy sudá, lichá, periodická funkce

Matematická analýza

Pro pochopení látky jsou nutné znalosti středoškolské matematiky, zejména:

- množiny, množinové operace
- výroky, logické spojky, kvantifikátory
- číselné obory $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- pojmy konstanta, proměnná, interval, okolí bodu, minimum, maximum, absolutní hodnota
- algebraické výrazy a jejich úpravy
- základní elementární funkce a jejich vlastnosti (polynom, racionální lomená funkce, odmocnina, exponenciální a goniometrické funkce, logaritmus)
- pojmy sudá, lichá, periodická funkce
- rovnice a nerovnice

Základní definice

Funkce: Pro $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ nazýváme předpis $f : A \to B$, který každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$, reálnou funkcí reálné proměnné. Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mluvíme o funkci n proměnných.

Základní definice

Funkce: Pro $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ nazýváme předpis $f : A \to B$, který každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$, reálnou funkcí reálné proměnné. Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mluvíme o funkci n proměnných.

Používáme zápis $y = f(x)$, kde y nazýváme závislou a x nezávislou proměnnou. Pro konstantu $x_0 \in A$ čteme zápis $y_0 = f(x_0)$ jako: y_0 je funkční hodnota funkce f v bodě x_0.

Dále množinu A nazýváme definiční obor funkce f a značíme ji Df.

Množinu $\{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$ nazýváme obor hodnot funkce f, značíme Hf.

Základní definice

Funkce : Pro $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ nazýváme předpis $f : A \to B$, který každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$, reálnou funkcí reálné proměnné. Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mluvíme o funkci n proměnných.

Používáme zápis $y = f(x)$, kde y nazýváme závislou a x nezávislou proměnnou. Pro konstantu $x_0 \in A$ čteme zápis $y_0 = f(x_0)$ jako: y_0 je funkční hodnota funkce f v bodě x_0.

Dále množinu A nazýváme definiční obor funkce f a značíme ji Df.

Množinu $\{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$ nazýváme obor hodnot funkce f, značíme Hf.

Poznámka : Funkce většinou definujeme výrazem s proměnnou x, definičním oborem pak rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž má daný výraz smysl.

Příklad : Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Základní definice

Funkce : Pro $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ nazýváme předpis $f : A \to B$, který každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$, reálnou funkcí reálné proměnné. Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mluvíme o funkci n proměnných.

Používáme zápis $y = f(x)$, kde y nazýváme závislou a x nezávislou proměnnou. Pro konstantu $x_0 \in A$ čteme zápis $y_0 = f(x_0)$ jako: y_0 je funkční hodnota funkce f v bodě x_0.

Dále množinu A nazýváme definiční obor funkce f a značíme ji Df.

Množinu $\{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$ nazýváme obor hodnot funkce f, značíme Hf.

Poznámka : Funkce většinou definujeme výrazem s proměnnou x, definičním oborem pak rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž má daný výraz smysl.

Příklad : Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: $Df = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

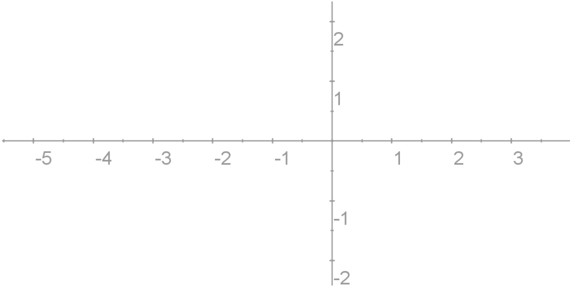
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x										
y										



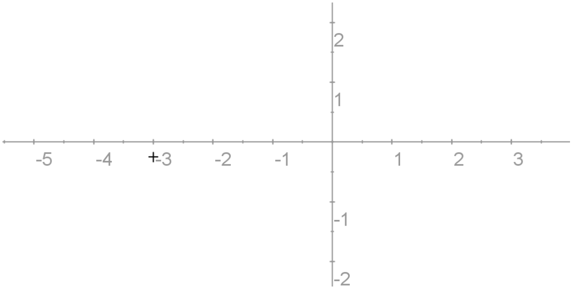
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3									
y	-1/4									



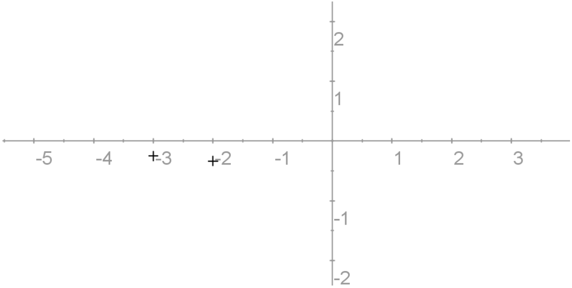
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2								
y	-1/4	-1/3								



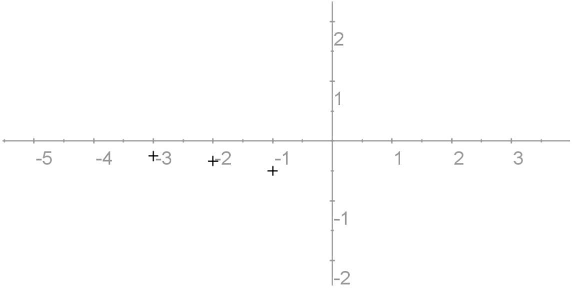
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1							
y	-1/4	-1/3	-1/2							

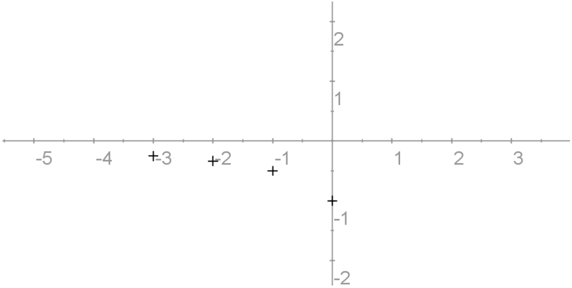


Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0						
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1						



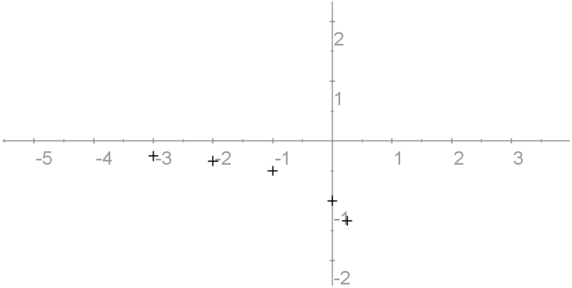
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4				
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3				



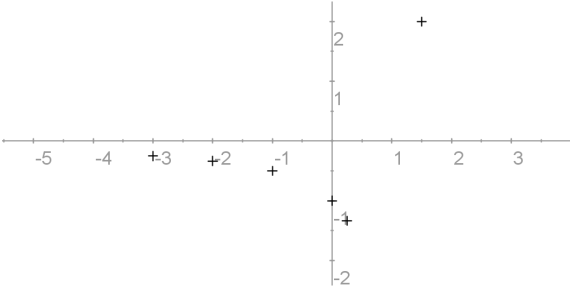
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2				
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2				



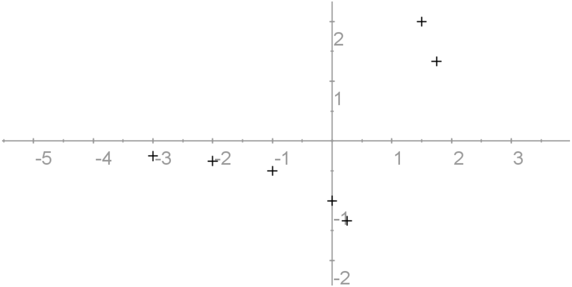
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2	7/4			
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2	4/3			



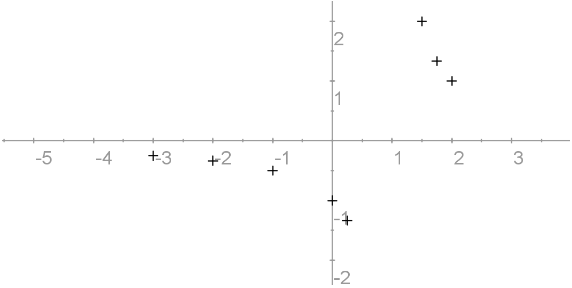
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2	7/4	2		
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2	4/3	1		



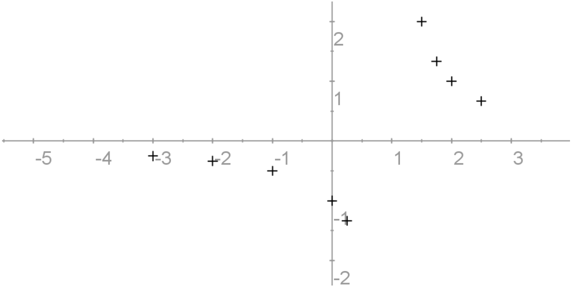
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2	7/4	2	5/2
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2	4/3	1	2/3



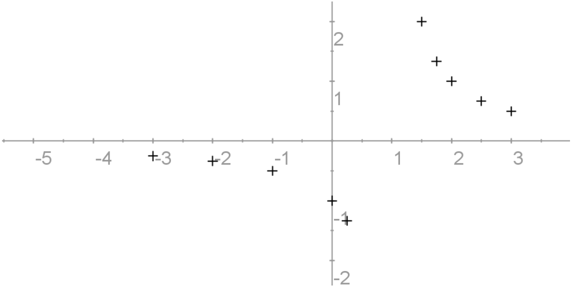
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2	7/4	2	5/2	3
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2	4/3	1	2/3	1/2



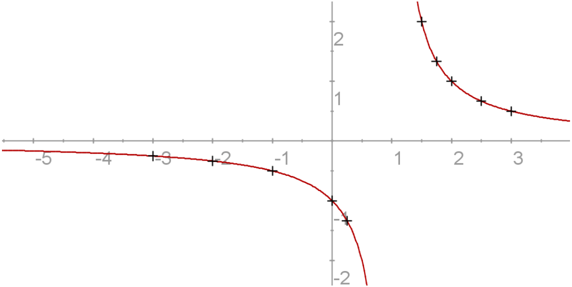
Graf funkce

Množinu bodů $\{[x, f(x)], x \in Df\}$ znázorněných v kartézském souřadném systému nazýváme grafem funkce.

Příklad : Načrtněte graf funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Řešení: Grafem funkce je hyperbola, vyznačme několik pomocných bodů:

x	-3	-2	-1	0	1/4	3/2	7/4	2	5/2	3
y	-1/4	-1/3	-1/2	-1	-4/3	2	4/3	1	2/3	1/2



Inverzní funkce

Řekneme, že funkce $f : A \to B$ je prostá, jestliže v různých bodech nabývá různých hodnot, tedy $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

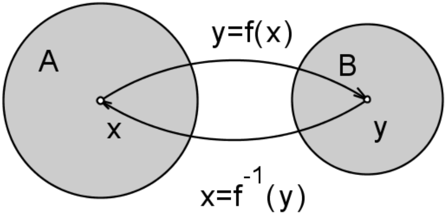
Řekneme, že funkce $f : A \to B$ je prostá, jestliže v různých bodech nabývá různých hodnot, tedy $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jestliže je funkce $f : A \to B$ je prostá a je-li $Hf = B$, pak k ní existuje inverzní funkce $f^{-1} : B \to A$, která každému $y \in B$ přiřadí jeho vzor, tedy $f^{-1}(y) = x$, kde $y = f(x)$.

Inverzní funkce

Řekneme, že funkce $f : A \to B$ je prostá, jestliže v různých bodech nabývá různých hodnot, tedy $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jestliže je funkce $f : A \to B$ je prostá a je-li $Hf = B$, pak k ní existuje inverzní funkce $f^{-1} : B \to A$, která každému $y \in B$ přiřadí jeho vzor, tedy $f^{-1}(y) = x$, kde $y = f(x)$.



Obrázek: Schéma inverzní funkce

Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 3x + 5$.

Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 3x + 5$.
Řešení: Jde o prostou funkci z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Z rovnice $y = 3x + 5$ vyjádříme x, tedy: $x = \frac{y-5}{3}$. Proto $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$. Jelikož jsme zvyklí používat označení y pro závislou proměnnou, píšeme $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$.

Inverzní funkce

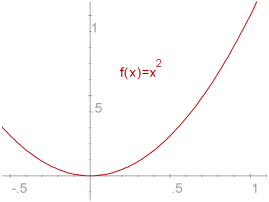
Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 3x + 5$.
Řešení: Jde o prostou funkci z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Z rovnice $y = 3x + 5$ vyjádříme x, tedy: $x = \frac{y-5}{3}$. Proto $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$. Jelikož jsme zvyklí používat označení y pro závislou proměnnou, píšeme $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$.

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = x^2$.

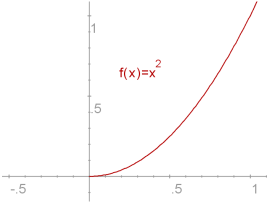
Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 3x + 5$.
Řešení: Jde o prostou funkci z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Z rovnice $y = 3x + 5$ vyjádříme x, tedy: $x = \frac{y-5}{3}$. Proto $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$. Jelikož jsme zvyklí používat označení y pro závislou proměnnou, píšeme $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$.

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = x^2$.
Řešení: Funkce $f(x) = x^2$ není na celém definičním oboru prostá, inverze tedy neexistuje. Zúžením definičního oboru na $A = \langle 0, \infty)$ bychom dostali prostou funkci $f : A \to A$. Víme, že k ní inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



Obrázek: $f : \mathbb{R} \to A$



Obrázek: $f : A \to A$

Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 2^x$ a načrtněte jejich grafy.

Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 2^x$ a načrtněte jejich grafy.
Řešení: Funkce $f(x) = 2^x$ je prostá funkce z $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$. Existuje tedy inverzní funkce, ze střední školy si pamatujeme, že jde o funkci $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Před vykreslením grafu ještě určeme několik bodů.

Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 2^x$ a načrtněte jejich grafy.
Řešení: Funkce $f(x) = 2^x$ je prostá funkce z $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$. Existuje tedy inverzní funkce, ze střední školy si pamatujeme, že jde o funkci $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Před vykreslením grafu ještě určeme několik bodů.

x	-2	-1	0	1	2
2^x	1/4	1/2	1	2	4

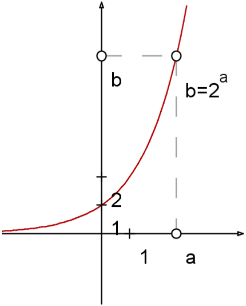
x	1/4	1/2	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

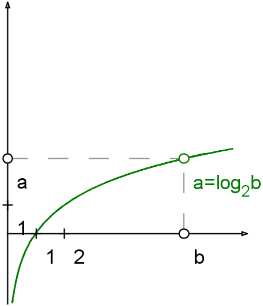
Inverzní funkce

Příklad : Určete funkci inverzní k $f(x) = 2^x$ a načrtněte jejich grafy.
Řešení: Funkce $f(x) = 2^x$ je prostá funkce z $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$. Existuje tedy inverzní funkce, ze střední školy si pamatujeme, že jde o funkci $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Před vykreslením grafu ještě určeme několik bodů.

x	-2	-1	0	1	2
2^x	1/4	1/2	1	2	4

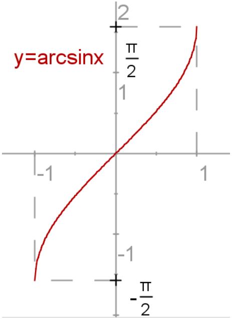
x	1/4	1/2	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

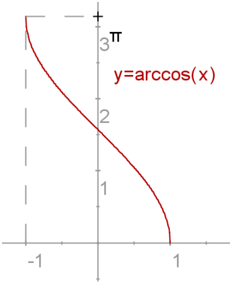




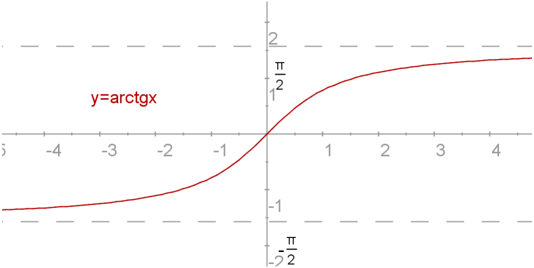
Cyklometrické funkce

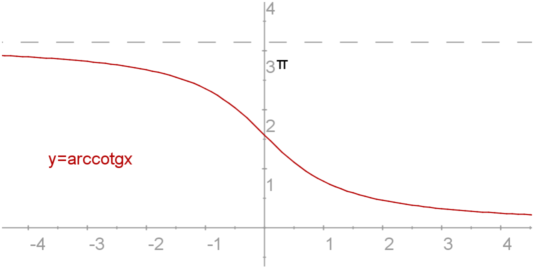
Definujeme je jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím.
Pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ definujeme
arcsin $x := u \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, takové, že sin $u = x$.
arccos $x := u \in \langle 0, \pi \rangle$, takové, že cos $u = x$.
Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme
arctg $x := u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takové, že tg$u = x$.
arccotg $x := u \in (0, \pi)$, takové, že cotg$u = x$.





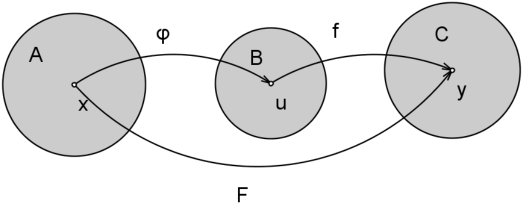
Cyklometrické funkce





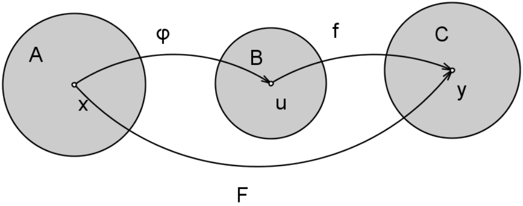
Složená funkce

Máme-li funkce $\varphi : A \to B$ a $f : B \to C$, pak můžeme definovat složenou funkci $F : A \to C$ předpisem $F(x) = f(\varphi(x))$. Funkci $u = \varphi(x)$ nazýváme vnitřní složkou a funkci $y = f(u)$ vnější složkou funkce F.



Složená funkce

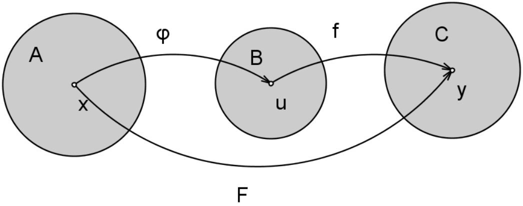
Máme-li funkce $\varphi : A \to B$ a $f : B \to C$, pak můžeme definovat složenou funkci $F : A \to C$ předpisem $F(x) = f(\varphi(x))$. Funkci $u = \varphi(x)$ nazýváme vnitřní složkou a funkci $y = f(u)$ vnější složkou funkce F.



Příklad : Určete základní elementární funkce, ze kterých je složená funkce $F(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{x+1}}$.

Složená funkce

Máme-li funkce $\varphi : A \to B$ a $f : B \to C$, pak můžeme definovat složenou funkci $F : A \to C$ předpisem $F(x) = f(\varphi(x))$. Funkci $u = \varphi(x)$ nazýváme vnitřní složkou a funkci $y = f(u)$ vnější složkou funkce F.



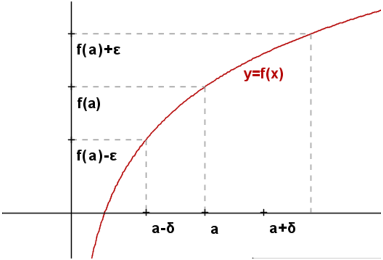
Příklad : Určete základní elementární funkce, ze kterých je složená funkce $F(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{x+1}}$.

Řešení: $x \to x+1 \to \sqrt{x+1} \to \sin\sqrt{x+1} \to \frac{1}{\sin\sqrt{x+1}}$.

Tedy $F(x) = f(g(h(j(x))))$, kde $j(x) = x+1$, $h(j) = \sqrt{j}$, $g(h) = \sin h$, $f(g) = \frac{1}{g}$.

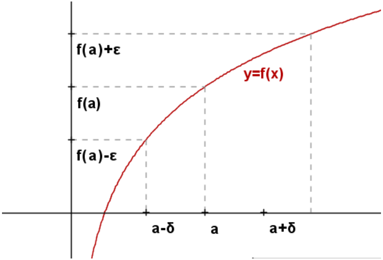
Spojitá funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže existuje $f(a)$ a pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje $U_\delta(a)$ ($\delta-$okolí bodu a) takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx f(a)$ (s přesností ε).



Spojitá funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže existuje $f(a)$ a pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje $U_\delta(a)$ ($\delta-$okolí bodu a) takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx f(a)$ (s přesností ε).



Poznámka : Můžeme též definovat spojitost zprava či zleva pro pravé či levé $\delta-$okolí bodu a ($U_\delta^+(a)$, resp. $U_\delta^-(a)$).

Poznámka : Základní elementární funkce jsou spojité ve všech bodech definičního oboru.

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.
Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.
Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x						
$f(x)$						

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha}$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.
Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1					
$f(x)$	2,1					

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1	0,9				
$f(x)$	2,1	1,9				

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.
Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1	0,9	1,01			
$f(x)$	2,1	1,9	2,01			

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1	0,9	1,01	0,99		
$f(x)$	2,1	1,9	2,01	1,99		

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x+1}$.
Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1	0,9	1,01	0,99	1,001	
$f(x)$	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.
Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1	0,9	1,01	0,99	1,001	0,999
$f(x)$	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999

Limita funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε). Potom píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Poznámka : Pokud je funkce x v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+1}$.

Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{8}{4} = 2$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	1,1	0,9	1,01	0,99	1,001	0,999
$f(x)$	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999

Závěr: Pro x "blížící se k 1"se hodnoty funkce "blíží k číslu 2".

Limita funkce

Věta : Pokud v nějakém okolí bodu x_0 platí: $\forall x \neq x_0 : f(x) = g(x)$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu právě tehdy když zde má limitu funkce $g(x)$ a platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Limita funkce

Věta : Pokud v nějakém okolí bodu x_0 platí: $\forall x \neq x_0 : f(x) = g(x)$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu právě tehdy když zde má limitu funkce $g(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

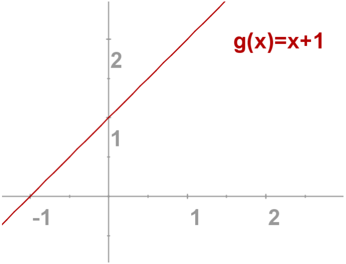
Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Řešení: Pro všechna $x \neq 1$ platí: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$.

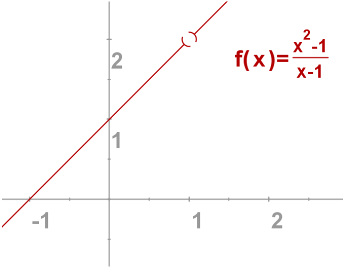
Limita funkce

Věta : Pokud v nějakém okolí bodu x_0 platí: $\forall x \neq x_0 : f(x) = g(x)$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu právě tehdy když zde má limitu funkce $g(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Příklad : Určete limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Řešení: Pro všechna $x \neq 1$ platí: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$. Tedy funkce $f(x)$ a $g(x) = x+1$ splňují předpoklady předchozí věty a proto $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$.





Jednostranná limita

Nahradíme-li v definici limity okolí bodu x_0 pravým okolím $U_\delta^+(a)$, respektive levým okolím $U_\delta^-(a)$, dostaneme definici limity zprava $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, resp. zleva $\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Jednostranná limita

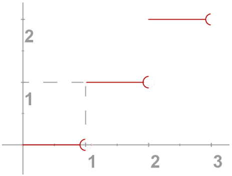
Nahradíme-li v definici limity okolí bodu x_0 pravým okolím $U_\delta^+(a)$, respektive levým okolím $U_\delta^-(a)$, dostaneme definici limity zprava $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, resp. zleva $\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Příklad : Pro funkci "celá část"$f(x) = \lfloor x \rfloor$ definované jako $\lfloor x \rfloor := n \in \mathbb{N} : n \leq x \wedge n+1 > x$, určete její limitu v bodě $x_0 = 1$.

Jednostranná limita

Nahradíme-li v definici limity okolí bodu x_0 pravým okolím $U_\delta^+(a)$, respektive levým okolím $U_\delta^-(a)$, dostaneme definici limity zprava $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, resp. zleva $\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Příklad : Pro funkci "celá část"$f(x) = \lfloor x \rfloor$ definované jako $\lfloor x \rfloor := n \in \mathbb{N} : n \leq x \wedge n+1 > x$, určete její limitu v bodě $x_0 = 1$.
Řešení: Limita neexistuje, pro x "napravo od bodu $x_0 = 1$"platí $\lfloor x \rfloor = 1$, ale "nalevo od bodu $x_0 = 1$"platí $\lfloor x \rfloor = 0$. Existují pouze jednostranné limity $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$.



Obrázek: Graf funkce "celá část", $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$
- $a \cdot \infty = \pm\infty$ ("+"pro $a > 0$, "-"pro $a < 0$)

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$
- $a \cdot \infty = \pm\infty$ ("+"pro $a > 0$, "-"pro $a < 0$)
- $a \cdot (-\infty) = \pm\infty$ ("-"pro $a > 0$, "+"pro $a < 0$)

Rozšíření množiny reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$
- $a \cdot \infty = \pm\infty$ ("+"pro $a > 0$, "-"pro $a < 0$)
- $a \cdot (-\infty) = \pm\infty$ ("-"pro $a > 0$, "+"pro $a < 0$)

Některé operace nejsou definovány, např. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x					
$f(x)$					

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5				
$f(x)$	0,3				

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5	95			
$f(x)$	0,3	0,03			

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5	95	995		
$f(x)$	0,3	0,03	0,003		

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5	95	995	9995	
$f(x)$	0,3	0,03	0,003	0,0003	

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5	95	995	9995	99995
$f(x)$	0,3	0,03	0,003	0,0003	0,00003

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce f má v nekonečnu limitu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε).

Píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: dosazujme do funkce "velká x".

x	5	95	995	9995	99995
$f(x)$	0,3	0,03	0,003	0,0003	0,00003

Vidíme, že hodnoty funkce klesají k nule, tedy $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{\infty} = 0$.

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

Příklad : Vyšetřete nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

Příklad : Vyšetřete nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
Řešení: Limity v nevlastních bodech:
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

Příklad : Vyšetřete nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
Řešení: Limity v nevlastních bodech:
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$
Protože $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, zkusíme též spočítat limitu funkce v bodě $x_0 = 2$:

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

Příklad : Vyšetřete nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
Řešení: Limity v nevlastních bodech:
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$
Protože $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, zkusíme též spočítat limitu funkce v bodě $x_0 = 2$:
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ neexistuje, neboť $\frac{1}{x-2} > 0$ pro $x > 2$, ale $\frac{1}{x-2} < 0$ pro $x < 2$.

Nevlastní limity

Poznámka : U limit $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, je-li $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ v nějakém okolí bodu x_0,
jinak limita neexistuje.

Příklad : Vyšetřete nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
Řešení: Limity v nevlastních bodech:
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$
Protože $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, zkusíme též spočítat limitu funkce v bodě $x_0 = 2$:
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ neexistuje, neboť $\frac{1}{x-2} > 0$ pro $x > 2$, ale $\frac{1}{x-2} < 0$ pro $x < 2$.
Platí pouze :
$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$
$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Nevlastní limita a graf

Jestliže $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$, řekneme, že má funkce v bodě x_0 asymptotu bez směrnice (též svislou asymptotu): graf funkce se v pravém (resp. levém) okolí bodu x_0 blíží k přímce $x = x_0$.

Nevlastní limita a graf

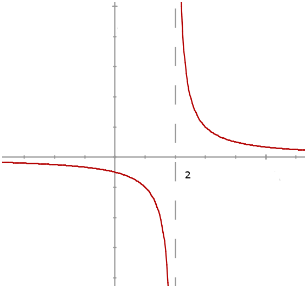
Jestliže $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$, řekneme, že má funkce v bodě x_0 asymptotu bez směrnice (též svislou asymptotu): graf funkce se v pravém (resp. levém) okolí bodu x_0 blíží k přímce $x = x_0$.

Jestliže $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$, (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$) řekneme, že má funkce vodorovnou asymptotu : graf funkce se na pravé (resp. levé) straně blíží k přímce $y = \alpha$.

Nevlastní limita a graf

Jestliže $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = \pm\infty$, řekneme, že má funkce v bodě x_0 asymptotu bez směrnice (též svislou asymptotu): graf funkce se v pravém (resp. levém) okolí bodu x_0 blíží k přímce $x = x_0$.

Jestliže $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$, (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$) řekneme, že má funkce vodorovnou asymptotu : graf funkce se na pravé (resp. levé) straně blíží k přímce $y = \alpha$.
Příklad : Funkce z předchozího příkladu $f(x) = \frac{1}{x-2}$ má asymptoty $x = 2$ a $y = 0$



Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Řešení: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$, výraz není definován.

Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Řešení: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$, výraz není definován. Pro $x \neq 0$ můžeme zlomek upravit: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$

Pravidla pro počítání limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad : Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Řešení: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$, výraz není definován. Pro $x \neq 0$ můžeme zlomek upravit: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-1} = \frac{2+0+0}{0-1} = -2$

Limita složené funkce

Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ a funkce f je spojitá v bodě a, kde $a = \lim_{x\to x_0} \varphi(x)$, potom $\lim_{x\to x_0} F(x) = f(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)) = f(a)$.

Limita složené funkce

Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ a funkce f je spojitá v bodě a, kde $a = \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$, potom $\lim_{x \to x_0} F(x) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)) = f(a).$

Příklad : $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

Limita složené funkce

Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ a funkce f je spojitá v bodě a, kde $a = \lim_{x\to x_0} \varphi(x)$, potom $\lim_{x\to x_0} F(x) = f(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)) = f(a)$.

Příklad : $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

Poznámka : U limit typu $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, apod. se někdy funkce rozšíří vhodným výrazem na podílový tvar.

Limita složené funkce

Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ a funkce f je spojitá v bodě a, kde $a = \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$, potom $\lim_{x \to x_0} F(x) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)) = f(a)$.

Příklad : $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

Poznámka : U limit typu $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, apod. se někdy funkce rozšíří vhodným výrazem na podílový tvar.

Příklad : $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = "\infty - \infty \lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$

Derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo

$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Poznámka : V případě, že existuje jen $\lim_{x \to x_0+}$, mluvíme o derivaci zprava, pro $\lim_{x \to x_0-}$, mluvíme o derivaci zleva

Derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Poznámka : V případě, že existuje jen $\lim_{x \to x_0+}$, mluvíme o derivaci zprava, pro $\lim_{x \to x_0-}$, mluvíme o derivaci zleva

Příklad : Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2$.

Derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Poznámka : V případě, že existuje jen $\lim_{x \to x_0 +}$, mluvíme o derivaci zprava, pro $\lim_{x \to x_0 -}$, mluvíme o derivaci zleva

Příklad : Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2$.
Řešení: $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$

Derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje číslo

$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

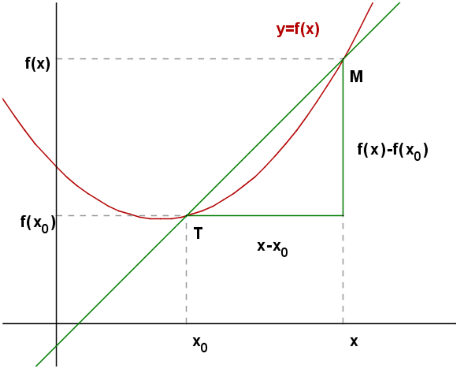
Poznámka : V případě, že existuje jen $\lim_{x\to x_0+}$, mluvíme o derivaci zprava, pro $\lim_{x\to x_0-}$, mluvíme o derivaci zleva

Příklad : Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2$.
Řešení: $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

Poznámka : Pro $y = f(x)$ píšeme též $y' = \frac{dy}{dx}$, derivace tedy vyjadřuje okamžitý relativní přírůstek neboli tempo růstu závislé proměnné. V ekonomii například veličina TC (celkové náklady) závisí na veličině Q (velikost produkce). Definujeme veličinu $MC = TC' = \frac{dTC}{dQ}$, tuto veličinu nazýváme marginální náklady.

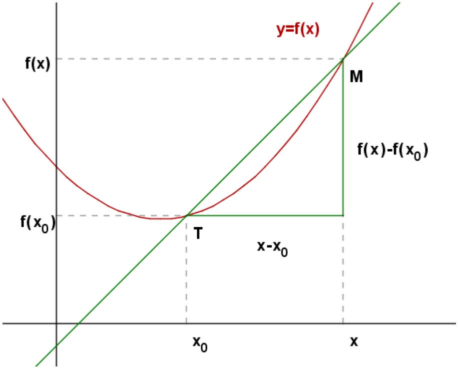
Geometrický význam derivace

Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je směrnicí přímky jdoucí body $T[x_0, f(x_0)]$, $M[x, f(x)]$:



Geometrický význam derivace

Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je směrnicí přímky jdoucí body $T[x_0, f(x_0)]$, $M[x, f(x)]$:



Limitním přechodem se bod M přibliží k bodu T, číslo $f'(x_0)$ tedy vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.
Příklad : Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.

Příklad : Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.

Řešení: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x + x_0) = 2x_0$.

Závěr: Pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 2x$.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.
Příklad : Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.
Řešení: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x + x_0) = 2x_0$.
Závěr: Pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 2x$.

Jestliže na nějakém intervalu $I_1 \subseteq I$ má funkce f' derivaci, pak tuto derivaci značíme f'' a nazýváme druhou derivací. Analogicky můžeme derivovat třetí derivaci a derivace vyšších řádů.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.

Příklad : Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.

Řešení: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x + x_0) = 2x_0$.

Závěr: Pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 2x$.

Jestliže na nějakém intervalu $I_1 \subseteq I$ má funkce f' derivaci, pak tuto derivaci značíme f'' a nazýváme druhou derivací. Analogicky můžeme derivovat třetí derivaci a derivace vyšších řádů.

Příklad : Určete druhou derivaci f'' pro funkci $f(x) = x^2$.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na tomto intervalu spojitá. Přiřazení $x_0 \to f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.

Příklad : Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.

Řešení: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x + x_0) = 2x_0$.

Závěr: Pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 2x$.

Jestliže na nějakém intervalu $I_1 \subseteq I$ má funkce f' derivaci, pak tuto derivaci značíme f'' a nazýváme druhou derivací. Analogicky můžeme derivovat třetí derivaci a derivace vyšších řádů.

Příklad : Určete druhou derivaci f'' pro funkci $f(x) = x^2$.

Řešení: Jelikož $f'(x) = 2x$, platí: $f''(x) = (2x)' = 2$.

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \; r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \; r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \; r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\mathrm{cotg}\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\mathrm{cotg}\ x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \; r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\mathrm{tg}\; x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\mathrm{cotg}\; x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ *a* $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ a $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)\ a\ c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ a $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ *a* $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Příklad : Určete derivace pro funkce $u(x) = \sin x \cdot e^x$, $v(x) = \frac{\operatorname{arctg}\ x}{x^2}$.

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ *a* $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Příklad : Určete derivace pro funkce $u(x) = \sin x \cdot e^x$, $v(x) = \frac{\text{arctg } x}{x^2}$.
Řešení: $u'(x) = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$

Pravidla pro derivování

Příklad : Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.
Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Pro libovolné funkce $f(x),\ g(x)$ *a* $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Příklad : Určete derivace pro funkce $u(x) = \sin x \cdot e^x$, $v(x) = \frac{\text{arctg } x}{x^2}$.
Řešení: $u'(x) = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$

$v'(x) = \frac{(\text{arctg } x)' \cdot x^2 - \text{arctg } x \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2} - (\text{arctg } x) \cdot 2x}{x^4}$

Derivace složené funkce $F(x) = f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

Derivace složené funkce $F(x) = f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

Příklad : Určete derivaci funkce $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Derivace složené funkce $F(x) = f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

Příklad : Určete derivaci funkce $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
Řešení: Jde o složenou funkci, vnitřní složka $u = x^2 + 1$, vnější složka $f(u) = \sqrt{u}$.

Derivace složené funkce $F(x) = f(\varphi(x))$

Má-li vnitřní složka $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

Příklad : Určete derivaci funkce $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
Řešení: Jde o složenou funkci, vnitřní složka $u = x^2 + 1$, vnější složka $f(u) = \sqrt{u}$.
Tyto funkce mají derivace $u' = 2x,\ f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Tedy
$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$.

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Příklad : Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Příklad : Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.
Řešení: Dle definice derivace je směrnice hledané tečny rovna $f'(1)$.
Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky procházející bodem $T = [1, f(1)]$ se směrnicí $f'(1)$ je: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$.

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Příklad : Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.
Řešení: Dle definice derivace je směrnice hledané tečny rovna $f'(1)$.
Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky procházející bodem $T = [1, f(1)]$ se směrnicí $f'(1)$ je: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1).$

Nyní zbývá určit čísla $f(1),\ f'(1)$:
$f(1) = e^0 = 1,$

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Příklad : Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.
Řešení: Dle definice derivace je směrnice hledané tečny rovna $f'(1)$.
Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky procházející bodem $T = [1, f(1)]$ se směrnicí $f'(1)$ je: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1).$

Nyní zbývá určit čísla $f(1)$, $f'(1)$:
$f(1) = e^0 = 1,$
$f'(x) = e^{1-x} \cdot (1 - x)' = -e^{1-x}$. Tedy $f'(1) = -e^0 = -1.$

Použití derivací

Pomocí derivací lze řešit velmi rozsáhlou skupinu praktických úloh: výpočet složitých limit, hledání extrémů funkce, vyšetřování průběhu funkce, přibližné výpočty, apod.

Příklad : Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.
Řešení: Dle definice derivace je směrnice hledané tečny rovna $f'(1)$.
Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky procházející bodem $T = [1, f(1)]$ se směrnicí $f'(1)$ je: $\boxed{y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1).}$

Nyní zbývá určit čísla $f(1),\ f'(1)$:
$f(1) = e^0 = 1,$
$f'(x) = e^{1-x} \cdot (1 - x)' = -e^{1-x}$. Tedy $f'(1) = -e^0 = -1$.

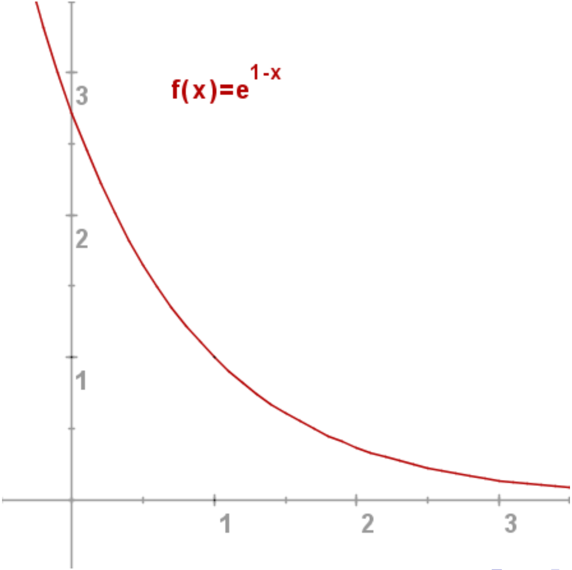
Rovnice hledané přímky je $y - 1 = -1 \cdot (x - 1)$, tj. $y = -x + 2$.

Rovnice tečny ke grafu

Znázorněme si graf funkce $f(x) = e^{1-x}$ a její tečnu v bodě $T[1, 1]$.

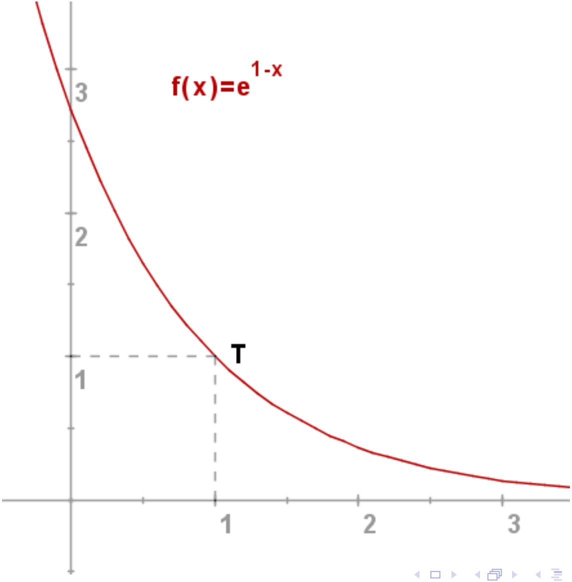
Rovnice tečny ke grafu

Znázorněme si graf funkce $f(x) = e^{1-x}$ a její tečnu v bodě $T[1, 1]$.



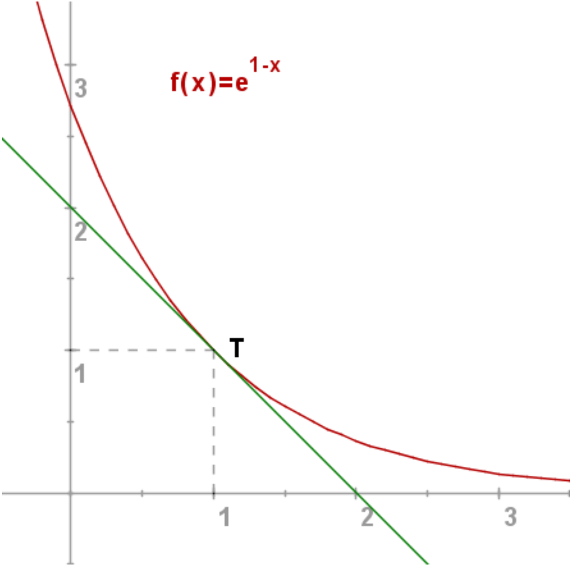
Rovnice tečny ke grafu

Znázorněme si graf funkce $f(x) = e^{1-x}$ a její tečnu v bodě $T[1, 1]$.



Rovnice tečny ke grafu

Znázorněme si graf funkce $f(x) = e^{1-x}$ a její tečnu v bodě $T[1, 1]$.



Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,
přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,
přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.
Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,

přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$. Použijeme *L'Hôspitalovo pravidlo*:

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,
přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$. Použijeme *L'Hôspitalovo pravidlo*:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,
přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$. Použijeme *L'Hôspitalovo pravidlo*:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Poznámka : Některé limity je nutné před vlastním výpočtem převést do podílového tvaru.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x$.

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,
přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$. Použijeme *L'Hôspitalovo pravidlo*:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Poznámka : Některé limity je nutné před vlastním výpočtem převést do podílového tvaru.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x$.

Řešení: $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x = "0 \cdot (-\infty)"$. Limitu zapíšeme jako: $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$.
Nyní již jde o limitu typu "$\frac{0}{0}$", použijeme L' H:

Výpočet limit pomocí derivací - *L'Hôspitalovo pravidlo*

Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pak: existuje - li $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,
přičemž symbol "lim"může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}^*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$. Použijeme *L'Hôspitalovo pravidlo*:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Poznámka : Některé limity je nutné před vlastním výpočtem převést do podílového tvaru.

Příklad : Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x$.
Řešení: $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x = "0 \cdot (-\infty)"$. Limitu zapíšeme jako: $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$.
Nyní již jde o limitu typu "$\frac{0}{0}$", použijeme L' H:
$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0+} -2x^{\frac{1}{2}} = 0$.

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I nerostoucí.

Příklad : Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I nerostoucí.

Příklad : Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Budeme vycházet z funkce $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nulové body funkce $f'(x)$ jsou $-1, 1$, ty rozdělí reálnou osu na tři intervaly. Znamení funkce $f'(x)$ je následující :

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I nerostoucí.

Příklad : Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Budeme vycházet z funkce $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nulové body funkce $f'(x)$ jsou $-1, 1$, ty rozdělí reálnou osu na tři intervaly. Znamení funkce $f'(x)$ je následující :

(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
+	-	+

Derivace a monotónnost funkce

Věta : Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$, funkce f je na intervalu I nerostoucí.

Příklad : Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Budeme vycházet z funkce $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nulové body funkce $f'(x)$ jsou $-1, 1$, ty rozdělí reálnou osu na tři intervaly. Znamení funkce $f'(x)$ je následující :

(-∞, -1)	(-1,1)	(1,∞)
+	-	+

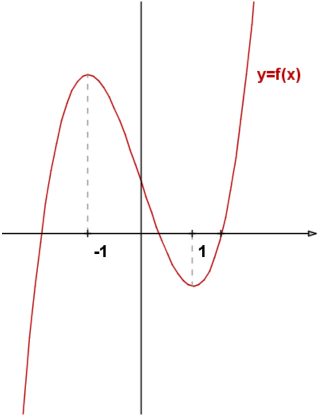
Tedy podle předchozí věty je funkce $f(x)$ rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$, klesající na $(-1, 1)$ a opět rostoucí na $(1, \infty)$.

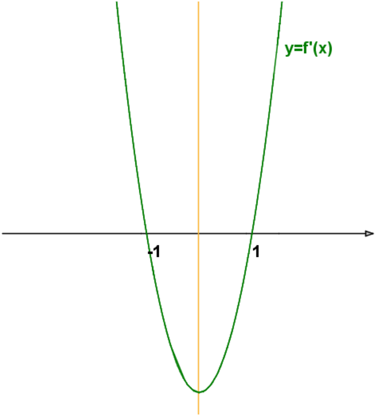
Intervaly monotónnosti funkce

Znázorněme si graf funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$ a graf její derivace $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Intervaly monotónnosti funkce

Znázorněme si graf funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$ a graf její derivace $f'(x) = 3x^2 - 3$.





Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum), jestliže je definována v nějakém okolí bodu x_0 a jestliže pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

Lokální minima a maxima souhrnně nazýváme lokální extrémy.

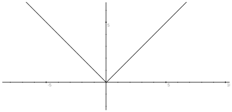
Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum), jestliže je definována v nějakém okolí bodu x_0 a jestliže pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

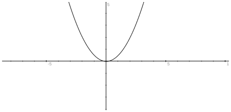
Lokální minima a maxima souhrnně nazýváme lokální extrémy.

Věta : Pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li zde derivace, pak pro tuto derivaci platí $f'(x_0) = 0$. Body s nulovou derivací nazýváme stacionární.

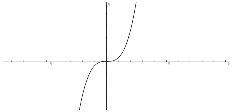
Poznámka : Podmínka $f'(x_0) = 0$ však není ani nutnou ani postačující podmínkou pro existenci extrému, viz funkce $f_1(x)$, která má v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum, ale nemá zde derivaci nebo funkce $f_3(x)$, pro kterou platí $f'(0) = 0$, ale nemá žádný lokální extrém.



Obrázek: $f_1(x) = |x|$



Obrázek: $f_2(x) = x^2/2$



Obrázek: $f_3(x) = x^3/3$

Existence lokálního extrému

Věta : Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) = 0$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že:

- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x_0) > 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x_0) < 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum

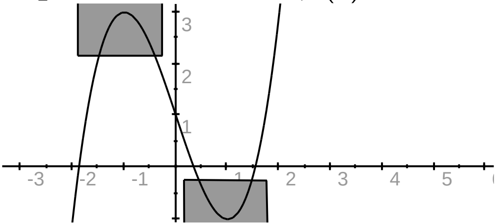
Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Existence lokálního extrému

Věta : Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) = 0$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že:

- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x_0) > 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x_0) < 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum

Příklad : Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$
Řešení: Již dříve jsme spočetli $f'(x) = 3x^2 - 3$ a našli stacionární body $-1, 1$. Víme, že derivace $f'(x)$ je kladná nalevo od bodu $x_1 = -1$ a napravo od bodu $x_2 = 1$ a záporná mezi nimi. Takže v bodě $x_1 = -1$ nastává lokální maximum, $f(-1) = 3$ a v bodě $x_2 = 1$ lokální minimum, $f(1) = -1$.



Absolutní extrémy

Řekneme, že funkce $f(x)$ má na množině M absolutní minimum (resp. maximum) v bodě x_0, jestliže je funkce definována na M a platí

$\forall x \in M : f(x) \geq f(x_0)$, resp. $\forall x \in M : f(x) \leq f(x_0)$.

Poznámka : Absolutní minima a maxima nazýváme absolutní extrémy nebo též globální extrémy. Pokud v definici zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme tzv. ostré (či vlastní) extrémy.

Absolutní extrémy

Řekneme, že funkce $f(x)$ má na množině M absolutní minimum (resp. maximum) v bodě x_0, jestliže je funkce definována na M a platí
$\forall x \in M : f(x) \geq f(x_0)$, resp. $\forall x \in M : f(x) \leq f(x_0)$.

Poznámka : Absolutní minima a maxima nazýváme absolutní extrémy nebo též globální extrémy. Pokud v definici zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme tzv. ostré (či vlastní) extrémy.

Věta : (Weierstrassova) Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak funkce $f(x)$ nabývá na tomto intervalu svého absolutního minima, a to buď v bodě lokálního extrému nebo v některém z krajních bodů a, b. Totéž platí pro absolutní maximum.

Příklad : Celkové příjmy (TR) i celkové náklady (TC) jsou funkcí vyrobeného množství, bylo zjištěno, že:
$TR(Q) = Q^3 - 2Q^2 - 2Q$,
$TC(Q) = Q^3 - Q^2 - 10Q$
Optimalizujte zisk $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, jestliže výrobní kapacita je 10 jednotek produktu.

Absolutní extrémy - příklad

Příklad : Celkové příjmy (TR) i celkové náklady (TC) jsou funkcí vyrobeného množství, bylo zjištěno, že:
$TR(Q) = Q^3 - 2Q^2 - 2Q$,
$TC(Q) = Q^3 - Q^2 - 10Q$
Optimalizujte zisk $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, jestliže výrobní kapacita je 10 jednotek produktu.

Řešení: Hledáme tedy extrémy funkce $P(Q) = -Q^2 + 8Q$ na intervalu $\langle 0, 10 \rangle$.
Spočteme $P'(Q) = -2Q + 8$, stacionární bod je $Q = 4$.

Absolutní extrémy - příklad

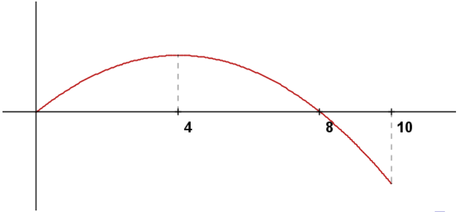
Příklad : Celkové příjmy (TR) i celkové náklady (TC) jsou funkcí vyrobeného množství, bylo zjištěno, že:
$TR(Q) = Q^3 - 2Q^2 - 2Q$,
$TC(Q) = Q^3 - Q^2 - 10Q$
Optimalizujte zisk $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, jestliže výrobní kapacita je 10 jednotek produktu.

Řešení: Hledáme tedy extrémy funkce $P(Q) = -Q^2 + 8Q$ na intervalu $\langle 0, 10 \rangle$.
Spočteme $P'(Q) = -2Q + 8$, stacionární bod je $Q = 4$.
Globální extrémy mohou nastat v bodech $0, 4, 10$. Porovnáme hodnoty $P(0) = 0$, $P(4) = 16$, $P(10) = -20$. Maximálního zisku je tedy dosaženo pro množství $Q = 4$, naopak největší ztrátu způsobí úplné využití výrobních kapacit, $Q = 10$.

Absolutní extrémy - příklad

Příklad : Celkové příjmy (TR) i celkové náklady (TC) jsou funkcí vyrobeného množství, bylo zjištěno, že:
$TR(Q) = Q^3 - 2Q^2 - 2Q$,
$TC(Q) = Q^3 - Q^2 - 10Q$
Optimalizujte zisk $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, jestliže výrobní kapacita je 10 jednotek produktu.

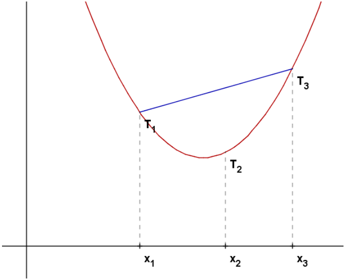
Řešení: Hledáme tedy extrémy funkce $P(Q) = -Q^2 + 8Q$ na intervalu $\langle 0, 10\rangle$.
Spočteme $P'(Q) = -2Q + 8$, stacionární bod je $Q = 4$.
Globální extrémy mohou nastat v bodech $0, 4, 10$. Porovnáme hodnoty $P(0) = 0$, $P(4) = 16$, $P(10) = -20$. Maximálního zisku je tedy dosaženo pro množství $Q = 4$, naopak největší ztrátu způsobí úplné využití výrobních kapacit, $Q = 10$.



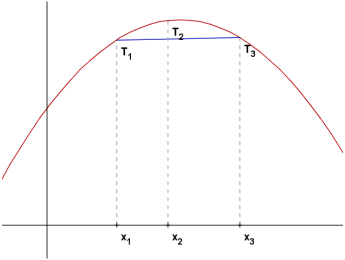
Konvexita a konkávnost funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu I

- ryze konvexní, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí: $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $T_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží pod úsečkou spojující body $T_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $T_3 = [x_3, f(x_3)]$. Obdobně o funkci f řekneme, že je na I
- ryze konkávní, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí: $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $T_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží nad úsečkou spojující body $T_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $T_3 = [x_3, f(x_3)]$



Obrázek: Konvexní funkce



Obrázek: Konkávní funkce

Konvexita a konkávnost funkce

Poznámka : Připustíme-li v definici, aby bod T_2 ležel i na úsečce $T_1 T_3$, pak vynecháme slůvko "ryze".

Věta : Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu I druhou derivaci. Pak platí

- $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$, pak je funkce konvexní na I
- $\forall x \in I : f''(x) \leq 0$, pak je funkce konkávní na I

Poznámka : Body, ve kterých "se mění konvexita a konkávnost funkce"nazýváme inflexní body. (Přesná definice je ve skriptech). Funkce může mít inflexní bod pouze v bodech, kde existuje první derivace a druhá derivace buď neexistuje nebo je nulová.

Konvexita a konkávnost funkce

Poznámka : Připustíme-li v definici, aby bod T_2 ležel i na úsečce $T_1 T_3$, pak vynecháme slůvko "ryze".

Věta : Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu I druhou derivaci. Pak platí

- $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$, pak je funkce konvexní na I
- $\forall x \in I : f''(x) \leq 0$, pak je funkce konkávní na I

Poznámka : Body, ve kterých "se mění konvexita a konkávnost funkce"nazýváme inflexní body. (Přesná definice je ve skriptech). Funkce může mít inflexní bod pouze v bodech, kde existuje první derivace a druhá derivace buď neexistuje nebo je nulová.

Věta : Jestliže pro funkci f v bodě x_0 platí: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$ a $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, pak

- je -li n sudé, má funkce f v bodě x_0 inflexní bod
- je -li n liché, má funkce f v bodě x_0 lokální extrém,a to maximum pro $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ a minimum $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.

Konvexita a konkávnost funkce - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = ln(x^2 + 2)$. Určete inflexní body této funkce a zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní.

Konvexita a konkávnost funkce - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = ln(x^2 + 2)$. Určete inflexní body této funkce a zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní.

Řešení: Určíme druhou derivaci, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$, $f''(x) = \frac{2(x^2+2)-2x.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Konvexita a konkávnost funkce - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = ln(x^2 + 2)$. Určete inflexní body této funkce a zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní.

Řešení: Určíme druhou derivaci, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$, $f''(x) = \frac{2(x^2+2)-2x.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Nulové body druhé derivace jsou $\pm\sqrt{2}$. Určeme znamení funkce $f''(x)$:

$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
-	+	-

Konvexita a konkávnost funkce - příklad

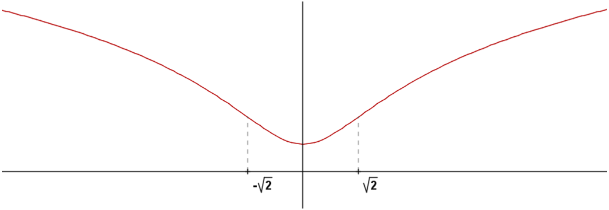
Příklad : Je dána funkce $f(x) = ln(x^2 + 2)$. Určete inflexní body této funkce a zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní.

Řešení: Určíme druhou derivaci, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$, $f''(x) = \frac{2(x^2+2)-2x.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Nulové body druhé derivace jsou $\pm\sqrt{2}$. Určeme znamení funkce $f''(x)$:

$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
-	+	-

Tedy funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2})$, konvexní na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a opět konkávní na $(\sqrt{2}, \infty)$. inflexní body jsou $\pm\sqrt{2}$.



Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží"graf funkce.

Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_a f(x) = \pm\infty$, kde symbol $\lim_a$ označuje některou z limit $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$

Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží"graf funkce.

Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_a f(x) = \pm\infty$, kde symbol $\lim_a$ označuje některou z limit $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má asymptoty bez směrnice $x = -2,\ x = -3$, neboť

$\lim_{x\to -3-} f(x) =$

$\lim_{x\to -3+} f(x) =$

$\lim_{x\to -2-} f(x) =$

$\lim_{x\to -2+} f(x) =$

Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží"graf funkce.

Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_a f(x) = \pm\infty$, kde symbol $\lim_a$ označuje některou z limit $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má asymptoty bez směrnice $x = -2,\ x = -3$, neboť

$\lim_{x\to -3-} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to -3+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2+} f(x) = \infty$

Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží"graf funkce.

Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_a f(x) = \pm\infty$, kde symbol $\lim_a$ označuje některou z limit $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má asymptoty bez směrnice $x = -2,\ x = -3$, neboť

$\lim_{x\to -3-} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to -3+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -2-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -2+} f(x) = \infty$

Přímku $y = Ax + B$ nazveme asymptotou funkce $f(x)$ ve nevlastním bodě ∞, resp. $-\infty$, jestliže $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0$, resp. $\lim_{x\to -\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0$.

Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží"graf funkce.

Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_a f(x) = \pm\infty$, kde symbol $\lim_a$ označuje některou z limit $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má asymptoty bez směrnice $x = -2$, $x = -3$, neboť

$\lim_{x\to -3-} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to -3+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -2-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -2+} f(x) = \infty$

Přímku $y = Ax + B$ nazveme asymptotou funkce $f(x)$ ve nevlastním bodě ∞, resp. $-\infty$, jestliže $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0$, resp. $\lim_{x\to -\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0$.

Příklad : Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ má v nevlastních bodech asymptotu $y = 0$, protože $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x^2+5x+6} - 0) = 0$.

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \; B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax),$ resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \; B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax).$

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} =$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax),$ resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax).$

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1,$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} =$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ $A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$
Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} =$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$
Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$,

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ $A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$
Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} =$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

Asymptoty funkce

Poznámka : Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Věta : Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax)$, resp.
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - Ax)$.

Příklad : Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:
$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$
Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:
$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$, $B = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$
Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 2$.

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Řešení:

1. Funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, je všude kladná, není sudá ani lichá ani periodická

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Řešení:

1. Funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, je všude kladná, není sudá ani lichá ani periodická
2. $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, stacionární bod je -1, funkce je klesající na $(-\infty, -1)$ a rostoucí na $(-1, \infty)$, tedy v bodě -1 nabývá funkce lokálního minima $f(-1) = 1$.

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Řešení:

1. Funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, je všude kladná, není sudá ani lichá ani periodická
2. $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, stacionární bod je -1, funkce je klesající na $(-\infty, -1)$ a rostoucí na $(-1, \infty)$, tedy v bodě -1 nabývá funkce lokálního minima $f(-1) = 1$.
3. $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$, druhá derivace je všude kladná, tedy funkce je konvexní na $\mathbb{R}$.

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme:

1. Df, nulové body a znamení funkce, periodicitu, paritu funkce
2. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce
3. Kde je funkce konvexní, konkávní a jaké jsou inflexní body funkce
4. Asymptoty a graf funkce

Příklad : Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Řešení:

1. Funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, je všude kladná, není sudá ani lichá ani periodická
2. $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, stacionární bod je -1, funkce je klesající na $(-\infty, -1)$ a rostoucí na $(-1, \infty)$, tedy v bodě -1 nabývá funkce lokálního minima $f(-1) = 1$.
3. $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$, druhá derivace je všude kladná, tedy funkce je konvexní na $\mathbb{R}$.
4. Funkce nemá svislé asymptoty. Určeme ještě asymptoty funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ v nevlastních bodech.

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} =$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} =$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 1$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} =$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 1$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = -1,$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 1$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = -1,$

$B = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} =$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 1$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = -1,$

$B = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = -1$

Průběh funkce - příklad

$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = 1,$

$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = 1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = x + 1$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^2}} = -1,$

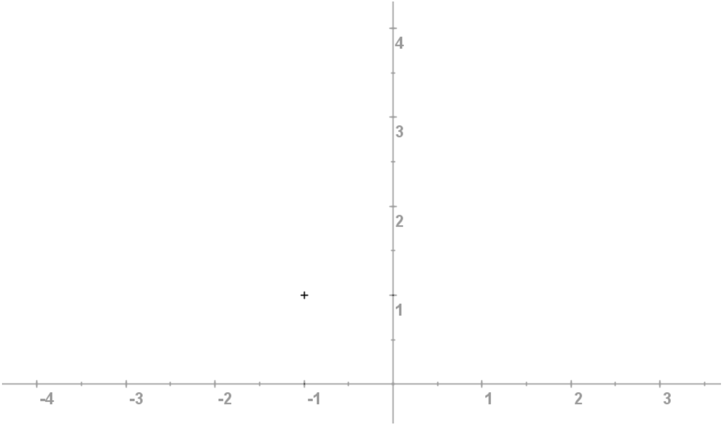
$B = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = -1$

Tedy hledaná asypmtota je: $y = -x - 1$. Nyní již můžeme nakreslit graf funkce.

Průběh funkce - příklad

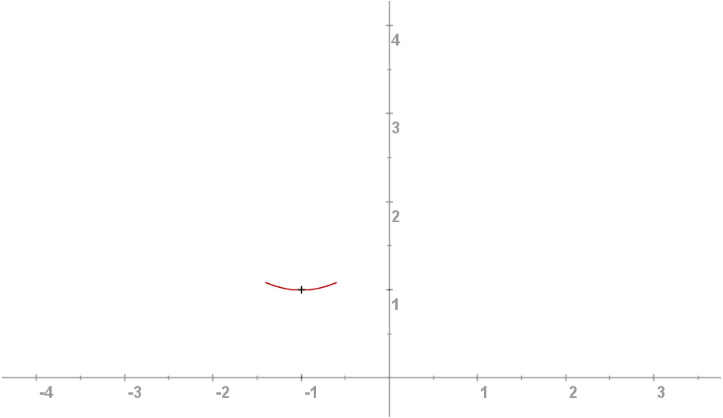
Zjistili jsme, že: funkce má lokální minimum v bodě -1, $f(-1) = 1$



Obrázek: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Průběh funkce - příklad

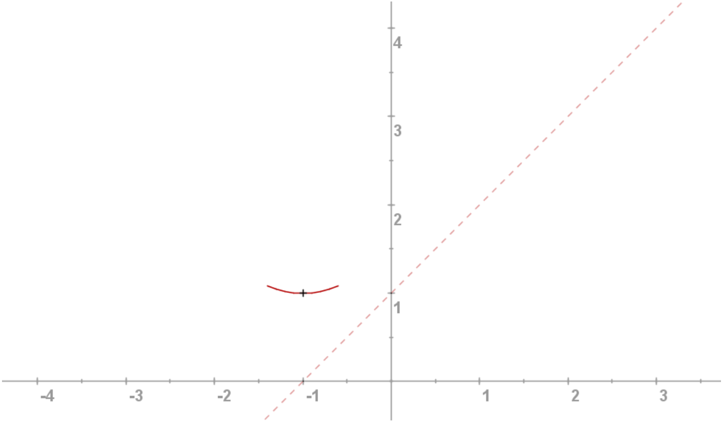
Zjistili jsme, že: funkce je konvexní



Obrázek: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Průběh funkce - příklad

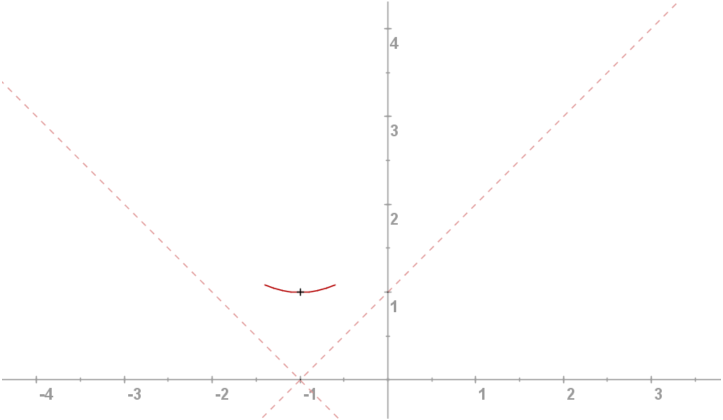
Zjistili jsme, že: funkce má v $+\infty$ asymptotu $y = x + 1$



Obrázek: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Průběh funkce - příklad

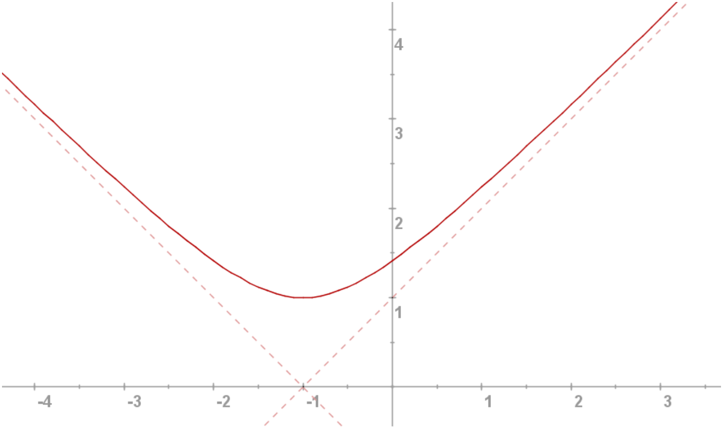
Zjistili jsme, že: funkce má v $-\infty$ asymptotu $y = -x - 1$



Obrázek: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Průběh funkce - příklad

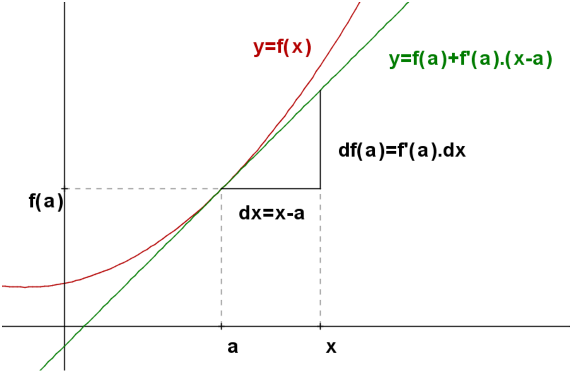
Zjistili jsme, že: nyní již můžeme načrtnout graf



Obrázek: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Diferenciál

Uvažujme funkci $f(x)$, která má v bodě a derivaci $f'(a)$. Sestrojíme - li v bodě a tečnu ke grafu funkce f, $t : y = f(a) + f'(a).(x - a)$, můžeme pro x blízká bodu a odhadnout hodnotu $f(x)$ jako $f(x) \approx f(a) + f'(a).(x - a)$. Výraz $df(a) = f'(a).(x - a)$ nazýváme diferenciálem funkce f v bodě a, píšeme $df(a) = f'(a).dx$.



Obrázek: Diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a pro $dx = (x - a)$

Diferenciál - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

1. Určete diferenciál funkce f v bodě a
2. Pomocí tohoto diferenciálu odhadněte $\sqrt{5}$.

Diferenciál - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

1. Určete diferenciál funkce f v bodě a
2. Pomocí tohoto diferenciálu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$. Tedy $df(4) = \frac{dx}{4}$.

Diferenciál - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

1. Určete diferenciál funkce f v bodě a
2. Pomocí tohoto diferenciálu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$. Tedy $df(4) = \frac{dx}{4}$.
2. $\sqrt{5} = f(5) \approx f(a) + f'(a).(5 - a) = \sqrt{4} + \frac{5-4}{4} = 2,25$

Diferenciál - příklad

Příklad : Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

1. Určete diferenciál funkce f v bodě a
2. Pomocí tohoto diferenciálu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$. Tedy $df(4) = \frac{dx}{4}$.
2. $\sqrt{5} = f(5) \approx f(a) + f'(a).(5 - a) = \sqrt{4} + \frac{5-4}{4} = 2,25$

Pozn.: Skutečná hodnota zaokrouhlená na 3 desetinná místa je $\sqrt{5} = 2,236$.

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Příklad : Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$

1. Určete Taylorův polynom $T_3(x)$
2. Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Příklad : Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$

1. Určete Taylorův polynom $T_3(x)$
2. Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.
   Dosadíme: $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = \frac{-1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Příklad : Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$

1. Určete Taylorův polynom $T_3(x)$
2. Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.
   Dosadíme: $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = \frac{-1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$
   Tedy $T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}.\frac{-1}{32}.(x-4)^2 + \frac{1}{6}.\frac{3}{256}.(x-4)^3$

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Příklad : Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$

1. Určete Taylorův polynom $T_3(x)$
2. Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.
   Dosadíme: $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = \frac{-1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$
   Tedy $T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32}.(x-4)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256}.(x-4)^3$
2. $\sqrt{5} = f(5) \approx 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256} = 2,236328125$

Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu.
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě a derivace až do n-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro "x blízká bodu a"platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

Příklad : Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$

1. Určete Taylorův polynom $T_3(x)$
2. Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

Řešení:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.
   Dosadíme: $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = \frac{-1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$
   Tedy $T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32}.(x-4)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256}.(x-4)^3$
2. $\sqrt{5} = f(5) \approx 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{32} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{256} = 2,236328125$

Pozn.: Skutečná hodnota zaokrouhlená na 3 desetinná místa je $\sqrt{5} = 2,236$.

Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x)$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x)$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Poznámka : Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, pak funkce $F(x)$ je zde spojitá (dokonce má derivaci). Jaké podmínky musí splňovat $f(x)$? Postačující podmínkou k tomu, aby k $f(x)$ existovala primitivní funkce je spojitost $f(x)$ na I. Je primitivní funkce určena jednoznačně?

Příklad : Funkce $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ je též primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ z předchozího příkladu.

Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x),$ pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Poznámka : Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, pak funkce $F(x)$ je zde spojitá (dokonce má derivaci). Jaké podmínky musí splňovat $f(x)$? Postačující podmínkou k tomu, aby k $f(x)$ existovala primitivní funkce je spojitost $f(x)$ na I. Je primitivní funkce určena jednoznačně?

Příklad : Funkce $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ je též primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ z předchozího příkladu.

Věta : Jsou-li funkce $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, taková, že pro $\forall x \in I : F(x) = G(x) + c$

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ limitu rovnu $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \to X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízká X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ limitu rovnu $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \to X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízká X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Poznámka : Pro počítání s limitami platí analogická pravidla jako u funkce jedné proměnné. Obdobně se zavádějí i nevlastní limity.

Definice : Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je spojitá v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí:
$\lim_{X \to X^0} f(X) = f(X^0)$.

Limita funkce více proměnných

Definice : Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ limitu rovnu $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim_{X \to X^0} f(X) = A$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí: $|f(X) - A| < \varepsilon$. (tj. "pro všechna X blízká X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Poznámka : Pro počítání s limitami platí analogická pravidla jako u funkce jedné proměnné. Obdobně se zavádějí i nevlastní limity.

Definice : Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je spojitá v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí:
$\lim_{X \to X^0} f(X) = f(X^0)$.

Příklad : Funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$ kromě bodu $[0, 0]$.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a položme y rovno konstantě y_0. Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0, tj. existuje-li $g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, nazveme ji parciální derivací funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x. Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0. Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0, tj. existuje-li $g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, nazveme ji parciální derivací funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x. Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y.

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i, ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například
$f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \ldots, f'_{x_n}(X^0)$.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0. Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0, tj. existuje-li $g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$, nazveme ji parciální derivací funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x. Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y.

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i, ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například $f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \dots, f'_{x_n}(X^0)$.

Příklad : Funkce $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x + y - 1$ má parciální derivace $f'_x(x, y) = 2x + 0 + 5y - 4 + 0$ a $f'_y(x, y) = 0 + 6y + 5x - 0 + 1$

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a položme y rovno konstantě y_0. Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x, y_0)$. Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0, tj. existuje-li $g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$, nazveme ji parciální derivací funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x. Označujeme ji $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $f_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Analogicky se definuje parciální derivace podle y.

Poznámka : Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i, ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například
$f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \dots, f'_{x_n}(X^0)$.

Příklad : Funkce $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x + y - 1$ má parciální derivace $f'_x(x, y) = 2x + 0 + 5y - 4 + 0$ a $f'_y(x, y) = 0 + 6y + 5x - 0 + 1$

Příklad : Funkce $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z^2}$ má parciální derivace
$f'_x(x, y, z) = \frac{1.(y+z^2) - x.0}{(y+z^2)^2} = \frac{1}{(y+z^2)}$, $f'_y(x, y, z) = \frac{0.(y+z^2) - x.1}{(y+z^2)^2} = \frac{-x}{(y+z^2)^2}$ a
$f'_z(x, y, z) = \frac{0.(y+z^2) - x.2z}{(y+z^2)^2} = \frac{-2xz}{(y+z^2)^2}$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.
$f_x = 6x - yz$, $f_y = 2y - xz$, $f_z = 3z^2 - xy$,

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.

$f_x = 6x - yz$, $f_y = 2y - xz$, $f_z = 3z^2 - xy$,

$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 2$, $f_{zz} = 6z$,

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$f_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $f''_{x_i x_j}(X_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci
$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.
$f_x = 6x - yz$, $f_y = 2y - xz$, $f_z = 3z^2 - xy$,
$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 2$, $f_{zz} = 6z$,
$f_{xy} = -z$, $f_{xz} = -y$, $f_{yz} = -x$,

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$\boxed{f_{x_i x_j}(X_0)}$ nebo $\boxed{f''_{x_i x_j}(X_0)}$ nebo $\boxed{\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci
$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.
$f_x = 6x - yz$, $f_y = 2y - xz$, $f_z = 3z^2 - xy$,
$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 2$, $f_{zz} = 6z$,
$f_{xy} = -z$, $f_{xz} = -y$, $f_{yz} = -x$,
$f_{yx} = -z$, $f_{zx} = -y$, $f_{zy} = -x$.

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derivaci podle x_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$), f_{x_i}. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$\boxed{f_{x_i x_j}(X_0)}$ nebo $\boxed{f''_{x_i x_j}(X_0)}$ nebo $\boxed{\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}}$

Poznámka : Jestliže $i = j$, píšeme f''_{x_i} nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad : Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu pro funkci $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.
$f_x = 6x - yz$, $f_y = 2y - xz$, $f_z = 3z^2 - xy$,
$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 2$, $f_{zz} = 6z$,
$f_{xy} = -z$, $f_{xz} = -y$, $f_{yz} = -x$,
$f_{yx} = -z$, $f_{zx} = -y$, $f_{zy} = -x$.

Věta : Jestliže má funkce f spojité parciální derivace až do řádu k v nějakém okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0, nezáleží na pořadí, ve kterém derivujeme, tedy např.

$\boxed{f''_{x_i x_j}(X_0) = f''_{x_j x_i}(X_0)}$