PRÁCE OPRAVOVANÁ TUTOREM

Matematika 2, kombinované studium, 2021

JMÉNO (hůlkovým písmem): ....
UČO: ....
Datum odevzdání: ....
Podpis: ....

POT musí být vypracován RUČNĚ (prosím o slušnou úpravu, nečitelné řešení nebude hodnoceno). U úloh se hodnotí nejen výsledné řešení, ale též POSTUP! Pro ověření správnosti výsledků lze použít výpočetní program Wolfram Alpha. Práci je nutné odevzdat v papírové podobě na posledním tutoriálu nebo vložit naskenovanou jako **JEDEN soubor formátu pdf** do odevzdávárny nejpozději do 31.12.2021.

Zadání úloh

Příklad 1: Pro následující matice najděte vlastní čísla a také vektory, které odpovídají reálným vlastním číslům.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Pomocí Sylvestrova kritéria rozhodněte o definitnosti kvadratické formy:

a) $24x^2 + 3y^2 - 2yz + 2z^2 - 12xy + 4xz$ b) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 6yz + 3z^2$

c) $-x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 4x_2^2 + 6x_3^2$ d) $-x^2 + 2xy - 5y^2 - 4yz - z^2$

Příklad 3: Najděte lineární aproximaci (Taylorův polynom prvního řádu) v bodě $[1, 1]$ pro funkce

a) $f(x, y) = 2e^{xy}$

b) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

c) $f(x, y) = \ln(x + xy^2 - 1)$

d) $f(x, y) = \sqrt{3x - 2y}$

Příklad 4: Načrtněte uvedené množiny a rozhodněte, zda jsou konvexní:

a) $\{(x, y) : 25 \geq x^2 + y^2 > 16\}$

b) $\{(x, y) : xy \leq 1\}$

c) $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 1\}$

d) $\{(x, y) : x + y \leq 2\}$

Příklad 5: Rozhodněte o konvexitě/konkávnosti uvedených funkcí na množině $M = \{(x, y), x > 0, \text{ a } y > 0\}$. Zdůvodněte!

a) $z = 1 + y^2 - e^x$

b) $z = e^{x+y} - \frac{y}{2}$

c) $z = \ln(x + 3y)^2$

d) $z = \mathrm{e}^{2x \cdot y}$

Příklad 6: Použitím grafické metody řešte problémy lineárního programování a určete, která omezení jsou v bodě optima aktivní (mají nenulovou stínovou cenu). Zapište též duální problém.

a) $\mathit{max}\ \ 3x_1 + 4x_2$ s podmínkami $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \leq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

b) $\mathit{max}\ \ 2x + 7y$ s podmínkami $\begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ 3x + 7y \leq 21 \end{cases}$ $x \geq 0,\ y \geq 0$

c) $\mathit{max}\ \ x + y$ s podmínkami $\begin{cases} -x + 2y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ 3x + y \leq 15 \end{cases}$

d) $\mathit{min}\ \ y - x$ s podmínkami $\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ -2x + y \leq -1 \end{cases}$ $x \geq 0,\ y \geq 2$

Příklad 7: Pro každou z úloh formulujte matematický model a výsledný problém lineárního programování řešte graficky.

a) Zákazník se rozhoduje o nákupu ovoce, přitom má na výběr pomeranče a jablka. Cena pomerančů je 40 Kč za kg a cena jablek je 25 Kč za kg. Je známo, že 1 kg pomerančů obsahuje 4 mg vitamínu C a 1 kg jablek obsahuje 5 mg vitamínu C. Maximalizujte celkový obsah vitamínu C v zakoupeném ovoci, máte-li k dispozici rozpočet 200 Kč a tašku o nosnosti 20 kg.

b) Kandidát na starostu v okresním městě plánuje poslední etapu předvolební kampaně, na kterou si vyhradil rozpočet 40 000Kč. Agentura mu nabízí zajistit vyvěšení reklamních banerů po 500Kč s odhadovným dosahem 3000 lidí za baner. Dále je možné objednat odvysílání předvolebních spotů v kabelové televizi s cenou 800 Kč a dosahem 7000 lidí za jedno odvysílání. Kandidát rozhodl, že by chtěl objednat alespoň 16 reklam každého druhu, s podmínkou, že zveřejněných banerů nebude více než odvysílaných spotů. Pomožte navrhnout kampaň v rámci stanoveného rozpočtu, tak aby oslovila co nejvíce lidí a přitom splňovala všechny stanovené podmínky.

c) V keramické dílně vyrábějí designové misky a hrnky. K výrobě je potřeba pouze speciální keramická hlína a kvalifikovaná pracovní síla. Tabulka uvádí náročnost jednotlivých produktů na výrobní zdroje společně s jejich prodejní cenou.

Výrobek	Práce (hodin/ks)	Hlína (kg/ks)	Příjem (Kč/ks)
Miska	1	0,4	40
Hrnek	2	0,3	50

Dílna má na týden k dispozici 1 pracovníka s 40-hodinovým pracovním týdnem a 12 kg hlíny, odbyt je zajištěn prostřednictvím partnerské firmy. Rozvrhněte výrobu mezi jednotlivé výrobky tak, aby byl maximalizován zisk.

d) Specializovaný zemědělský obchod prodává směsi hnojiv s obchodními názvy Gro-Plus a Crop-Fast. Směsi mají různý obsah účinných látek, viz tabulka:

Značka	Dusík (kg/balení)	Fosfor (kg/balení)
Gro-Plus	2	4
Crop-Fast	4	3

Zemědělské družstvo potřebuje pro svá pole minimálně 16 kg dusíku a 24 kg fosforu. Jedno balení Gro-Plus stojí 60 Kč, zatímco balení Crop-Fast je jen za 30 Kč. Navrhněte družstvu, nejlevnější kombinaci hnojiv, tak aby byly splněny požadavky na obsah účinných látek.

Příklad 8: Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů řešte problém a pomocí zjištěné hodnoty multiplikátoru **odhadněte**, o kolik se zvýší optimum při změně omezení o $0,1$.

a) max $\ln(x) + 2\ln(y)$ za podmínky $x + y = 1$.

b) min $2x + 3y - 4$ za podmínky $x \cdot y = 6$.

c) min $e^{x/2} + e^{y}$ za podmínky $x + 2y = 4$.

d) min $x + 4y^2$ za podmínky $x \cdot y = 1$.

Příklad 9: Pro daný optimalizační problém sestavte Lagrangeovu funkci a vyjádřete Kuhn-Tuckerovy podmínky pro optimální řešení.

a) *max* $2 - x^2 - y^2$ s podmínkami $x \geq 1$ *a* $y \geq 2$

b) *min* $x^2 + x + y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 \leq 1$.

c) *min* $(x+1)^2 + \frac{1}{4}y^2$ za podmínky $2x + y \geq 4$.

d) *min* $(x-1)^2 + 2(y-2)^2$ za podmínky $x - y \geq 0$.

Příklad 10: Spotřebitel má užitkovou funkci $F(x, y)$, kde x je množství výrobku A a y množství výrobku B. Vyjádřete pro něj mezní míru substituce mezi A a B (tj. $-y'(x)$) a vyčíslete je pro $x = 1, y = 1$.

a) $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{9y}$

b) $F(x, y) = 2 - e^{x} - e^{y}$

c) $F(x, y) = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{y + 2}$

d) $F(x, y) = \ln(1 + 2x) + \ln(y + 1)$