Úvodní informace

Martin Chvátal

268707@mail.muni.cz

BKM_MABA - **Matematika pro byznysovou analytiku**

podzimní semestr 2022, Brno

Přednášky

- Sobota 17.9. 16:00–19:50, P201
- Sobota 8.10. 12:00–15:50, P103
- Pátek 9.12. 16:00–19:50, P304

- Pokud máte jakýkoliv dotaz k čemukoliv během hodiny, rovnou se ptejte, nečekejte s dotazy.
- V období mezi přednáškami se očekává, že si projdete probranou látku. S případnými dotazy se na mne můžete obrátit na email, Teamsy, případně na začátku následující hodiny.

Zkoušky

Termín	Den	Čas	Místnost
Ř			
Ř+O			
O			

- Prosím zapisujte se ideálně už na první termín, aby jste mohli plně využít i termíny opravné (při případném neúspěchu).

Požadavky pro úspěšné ukončení

- Podrobněji ve Studijních materiálech v ISu, složka Organizační pokyny.

- Odevzdání všech 5ti odpovědníků během semestru (online).
  - 1. odpovědník: 19.9.-2.10.
  - 2. odpovědník: 10.10.-23.10.
  - 3. odpovědník: 31.10.-14.11.
  - 4. odpovědník: 14.11.-28.11.
  - 5. odpovědník: 5.12.-19.12.
- Odevzdání odpovědníků $\Rightarrow$ připuštění ke zkoušce.
- Až 5 bodů za odpovědník (body v poznámkovém bloku v ISu).

Požadavky pro úspěšné ukončení

- Zkouška písemná část (60b) na 90 minut, ústní část dobrovolně (až 10b na zlepšení známky).
- Hodnocení:

  F - do 40ti bodů,
  E - 40 - 50 (bez) bodů,
  D - 50 - 60 (bez) bodů,
  C - 60 - 70 (bez) bodů,
  B - 70 - 80 (bez) bodů,
  A - 80 bodů a více.

Jakékoli opisování, zaznamenávání nebo vynášení testů, používání nedovolených pomůcek jakož i komunikačních prostředků nebo jiné narušování objektivity zkoušky (zápočtu) bude považováno za nesplnění podmínek k ukončení předmětu a za hrubé porušení studijních předpisů. Následkem toho uzavře vyučující zkoušku (zápočet) hodnocením v ISu známkou "F"a děkan zahájí disciplinární řízení, jehož výsledkem může být až ukončení studia.

Obsah přednášek

- **1. blok**
  - Výroková logika
  - Matice
  - Lineární nezávislost
  - Determinanty a inverzní matice
  - Soustavy lineárních rovnic
- **2. blok**
  - Vlastní čísla a vektory
  - Funkce a limity
  - Derivace
- **3. blok**
  - Optimalizace funkce jedné proměnné
  - Funkce dvou proměnných
  - Neurčitý a určitý integrál

Literatura

- SYDSÆTER, Knut, Peter J. HAMMOND, Arne STRØM a Andrés CARVAJAL: **Essential mathematics for economic analysis**. Fifth edition. Harlow: Pearson, 2016. xvi, 807. ISBN 9781292074610.
- BAUER, Luboš, Hana LIPOVSKÁ, Miloslav MIKULÍK a Vít MIKULÍK: **Matematika v ekonomii a ekonomice**. První vydání. Praha: Grada Publishing, a.s., 2015. 352 s. ISBN 978-80-247-4419-3.

- Další literatura je uvedena v informacích o předmětu.

Přednáška

Výroková logika - výrok

- Logika - věda, která se zabývá usuzováním, pravdivostí, dokazatelností a vyvratitelností.
  - „Číslo 6 je dělitelné 3 a zároveň 4.“
- Výrok: každá oznamovací věta, u které lze určit pravdivost.
  - „Jablko je ovoce“ (pravdivý výrok).
  - „Číslo 8 je prvočíslo“ (nepravdivý výrok).
  - „ESF je nejlepší fakulta na světě“ - NENÍ výrok.
- Atomický výrok: nejjednodušší výrok.
  - „Číslo 6 je dělitelné 3.“
  - „Číslo 6 je dělitelné 4.“

Výroková logika - spojky

- Výrokové spojky:
  - $\wedge$ konjunkce - „a“ - „a současně“,
  - $\vee$ disjunkce - „nebo“,
  - $\Rightarrow$ implikace - „jestliže ... pak“,
  - $\Leftrightarrow$ ekvivalence - „právě tehdy, když“ - „tehdy a jen tehdy, když“,
  - $\neg$ negace.

Example

Snědl jsem jablko. Snědl jsem hrušku.
Snědl jsem jablko a hrušku. (*konjunkce*)
Snědl jsem jablko nebo hrušku. (*disjunkce*)
Jestliže jsem snědl jablko, pak jsem snědl i hrušku. (*implikace*)
Snědl jsem jablko právě tehdy, když jsem snědl hrušku. (*ekvivalence*)
Nesnědl jsem jablko. (*negace*)

Výroková logika - formule

- Formule: složení atomických výroků pomocí spojek.
  - Výše uvedené příklady jsou formule.
  - Výroky značíme pomocí velkých písmen.

Example

$$\begin{array}{lll} A & \dots & \text{„Snědl jsem jablko,“} \\ B & \dots & \text{„Snědl jsem hrušku.“} \end{array}$$

$A \wedge B$, (*konjunkce*)
$A \vee B$, (*disjunkce*)
$A \Rightarrow B$, (*implikace*)
$A \Leftrightarrow B$, (*ekvivalence*)
$\neg A$. (*negace*)

Výroková logika - pravdivost

- Pravdivost:
  - atomický výrok platí $\longrightarrow$ pravdivost 1,
  - atomický výrok neplatí $\longrightarrow$ pravdivost 0,
  - pro formule viz tabulka níže

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Example

```
A<-c(T,T,F,F);B<-c(T,F,T,F)
A& B
A | B
imp<-function(A,B){!A | B}
imp(A,B)
eqv<-function(A,B){(A& B)|(!A & !B)}
eqv(A,B)
```

- Negace

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg B \wedge A$	$(\neg B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Výroková logika - pravdivost

Example

Napište pravdivostní tabulku pro formuli $A \Rightarrow (B \wedge \neg(A \vee B))$.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$B \wedge \neg(A \vee B)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

$A \Rightarrow (B \wedge \neg(A \vee B))$
0
0
1
1

- Tautologie, kontradikce.

Výroková logika - příklady

Example

Pan Spock každé pondělí, úterý a středu lže, kdežto pan Dat lže ve čtvrtek, pátek a v sobotu. V ostatní dny mluví chlapci pravdu. Jednou se ovšem potkali a proběhl následující rozhovor:

> Pan Spock: „Včera jsem lhal.“
>
> Pad Dat: „Jo, já taky.“

Který je den?

Výroková logika - příklady

Example

Pan Spock každé pondělí, úterý a středu lže, kdežto pan Dat lže ve čtvrtek, pátek a v sobotu. V ostatní dny mluví chlapci pravdu. Jednou se ovšem potkali a proběhl následující rozhovor:

Pan Spock: „Včera jsem lhal."

Pad Dat: „Jo, já taky."

Který je den?

Dat \ Spock	Pravda	Lež
Pravda	×	×
Lež	čtvrtek	×

Example

Ze třídy byla ukradena třídní kniha. Podezřelí jsou Antonín, Barbora a Cyril. Bylo zjištěno, že:

> V době krádeže nebyl ve třídě Antonín nebo tam nebyla Barbora.
>
> Pokud v době krádeže nebyla ve třídě Barbora, nebyl tam ani Antonín.
>
> Cyril byl ve třídě právě tehdy, když tam nebyl Antonín.
>
> Pachatel byl v době krádeže ve třídě sám.

U koho má učitel třídní knihu hledat?

Example

Ze třídy byla ukradena třídní kniha. Podezřelí jsou Antonín, Barbora a Cyril. Bylo zjištěno, že:

> V době krádeže nebyl ve třídě Antonín nebo tam nebyla Barbora.
>
> Pokud v době krádeže nebyla ve třídě Barbora, nebyl tam ani Antonín.
>
> Cyril byl ve třídě právě tehdy, když tam nebyl Antonín.
>
> Pachatel byl v době krádeže ve třídě sám.

U koho má učitel třídní knihu hledat?

A	B	C	$\neg A \vee \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$C \Leftrightarrow \neg A$
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1

Kvatifikátory

- $\forall$ Pro všechny - $\forall x \in (-2, 5) : |x| < 6$.
- $\exists$ Existuje - $\exists x \in (-2, 5) : |x| < 1$.

Negace

- $\neg(\forall x : A) \Leftrightarrow \exists x : \neg A$
- $\neg(\exists x : A) \Leftrightarrow \forall x : \neg A$

Example

Definice limity L v bodě a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{O}_a : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Matice

- dvojrozměrné obdélníkové pole či tabulka čísel, které chápeme jako jeden objekt
- matice A o rozměru $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Example

Matice A o rozměru 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \pi & \mathrm{e} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matice

Example

Zapište matici 2×2 zadanou prvky $a_{ij} = i + j - 1$.

Example

Zapište matici 2×2 zadanou prvky $a_{ij} = i + j - 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Example

(A <- matrix(c(1, 2, 2, 3), 2)) ... po sloupečcích zadáváme

- čtvercová matice: $m = n$.
- řádkový/sloupcový vektor: $m/n = 1$.
- Matice značíme velkými písmeny $A, B, \ldots$ a vektory malými písmeny $x, \mathbf{x}, \vec{x}, \ldots$

Operace s maticemi

- ROVNOST: $A = B$, pokud mají stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$.
- SČÍTÁNÍ: $A \pm B = C$, musí mít stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích sečteme/odečteme, tzn. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- NÁSOBENÍ SKALÁREM: $c \cdot A = B$, všechny prvky vynásobíme daným číslem, tzn. $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$.

Example

Nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, tak aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b - c & c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- ROVNOST: $A = B$, pokud mají stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$.
- SČÍTÁNÍ: $A \pm B = C$, musí mít stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích sečteme/odečteme, tzn. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- NÁSOBENÍ SKALÁREM: $c \cdot A = B$, všechny prvky vynásobíme daným číslem, tzn. $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$.

Example

Nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, tak aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b - c & c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $a = 2, c = 3, b = 1$.

Example

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete $2A$ a $2A + B$.

Example

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete $2A$ a $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Example

A <- matrix(c(1,-2,1,2.5),2)

B <-matrix(c(7,-2,3,-4),2)

Násobení skalárem:

2*A

2*A + B

- NÁSOBENÍ DVOU MATIC: $C = A \cdot B$, kde A, B je matice o rozměru $n \times m$, resp. $m \times l$ a matice C je rozměru $n \times l$. Prvky matice C vzniknou následovně: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Example

```
A <- matrix(c(1,2,1,3,3,4),2)
B <- matrix(c(-1,-2,3,0,-1,1),3)
```

Maticové násobení:

```
A %*% B
B %*% A
```

Operace s maticemi

- asociativita: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- distributivita zprava: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C)$
- distributivita zleva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- je-li $c \in \mathbb{R}$, pak $(c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B) = c \cdot (A \cdot B)$
- obecně NEPLATÍ komutativita $A \cdot B \neq B \cdot A$

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pak $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$, ale $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Jednotková matice

- Pro reálná čísla: $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.
- Označení: I. Čtvercová matice. Na hlavní diagonále jsou 1 a všude jinde 0.
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pak

$$I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = A.$$

Jednotková matice

Example

```
A <- matrix(c(1,4,2,5,3,6),2)
I2 <- diag(2)
I3 <- matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),3)
```

Musíme násobit matice „správných“ rozměrů:

```
I2 %*% A
A %*% I3
```

Naopak dostaneme chybu:

```
I3 %*% A
A %*% I2
```

Transponovaná matice

- Prohodíme sloupce a řádky.
- Označení: A^T nebo A'.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

```
A <-matrix(c(1,4,2,5,3,6),2);(t(A))
```

- Symetrická matice: $A = A^T$.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A^T$$

Lineární závislost

- Řekneme, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže rovnice

$$a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \vec{0}$$

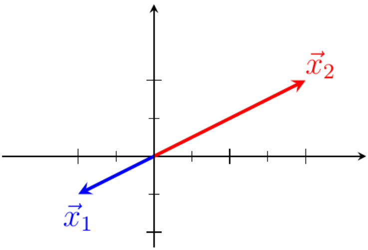
  má pouze triviální řešení, tzn. $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_n = 0$. V opačném případě říkáme, že jsou vektory *lineárně závislé*.
- Lineární kombinace (levá strana), soustava rovnic

Example

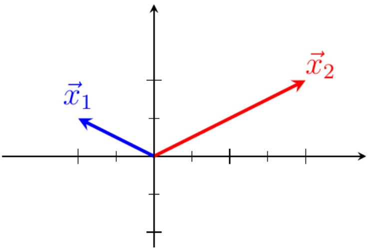
Mějme $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zřejmě platí

$$1 \cdot \mathrm{u} + 2 \cdot \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vektory u, v jsou lineárně závislé.



Obrázek: Lineárně závislé vektory.



Obrázek: Lineárně nezávislé vektory.

Hodnost matice

- Počet lineárně nezávislých sloupců/řádků matice.
- Značíme $h(A)$.

Example

Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak $h(A) = 2, h(I) = 3$.

Gaussova eliminační metoda

- Elementární řádkové úpravy:
  - vynásobení řádku nenulovým číslem,
  - prohození dvou řádků,
  - přičtení libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému.
- Dostáváme ekvivalentní matice (nesou stejnou informaci co se závislosti týče).
- Upravíme do schodovitého tvaru.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow h(A) = 3$

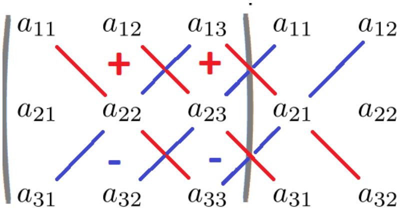
```
A<-matrix(c(1,1,2,2,1,0,3,4,6),3)
library(pracma)
rref(A)
```

Determinant

- Číslo, které přiřadíme čtvercové matici, značíme $det(A)$ nebo $|A|$.
  - regulární matice: $det(A) \neq 0$
  - singulární matice: $det(A) = 0$
- matice 1×1 : $det\,(a) = |a| = a$
- matice 2×2 : $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- matice 3×3 :
  $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$
  $a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Determinant

- Sarrusovo pravidlo (pouze pro matice 3×3)



- $|A| = |A^T|$

Determinant - Laplaceův rozvoj

- Sníží řád matice pro výpočet determinantu.
- $|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}|C_{ij}|$, kde matice C_{ij} vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.
- Pro jednoduchost vybíráme řádek či sloupec s největším počtem 0.

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak podle druhého řádku

$$|A| = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 + 0 + 0 + (-2) = -1$$

Example

```
A <- matrix(c(0,1,1,0,1,0,-1,2,-1,0,1,-1,2,2,-1,0),4);(det(A))
```

Determinant - Laplaceův rozvoj

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak podle prvního sloupce

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 1 + (-2) + 0 = -1$$

Determinant - přímý výpočet

- Má-li matice pod hlavní diagonálou samé 0, pak je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$
- Pomocí elementárních řádkových úprav
  - vynásobení řádku nenulovým číslem $\Rightarrow$ determinant daným číslem vydělím,
  - prohození dvou řádků $\Rightarrow$ determinantu změním znaménko,
  - přičtení libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému $\Rightarrow$ determinant nezměním.

Determinant - přímý výpočet

Example

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$$

Inverzní matice

- pro reálná čísla: $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1$
- Značíme A^{-1}. Definice: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.
  - čtvercová matice
  - regulární matice

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pak $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Example

Výpočet inverzní matice k $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

```
A <- matrix(c(0,1,1,1,0,2,-1,2,1),3);(solve(A))
```

- Zapíšeme rozšířenou matici a pomocí elementárních řádkových úprav získáme inverzní matici

$$(A|I) \sim \cdots \sim (I|A^{-1}) \, .$$

Example

$$A \ldots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \ldots A^{-1}$$

- Ověřit.

Adjungovaná matice a inverze

- Adjungovaná matice: $\mathrm{adj}\, A =$

$$= \begin{pmatrix} +|C_{11}| & -|C_{12}| & \cdots & (-1)^{1+n}|C_{1n}| \\ -|C_{21}| & +|C_{22}| & \cdots & (-1)^{2+n}|C_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|C_{n1}| & (-1)^{n+2}|C_{n2}| & \cdots & (-1)^{n+n}|C_{nn}| \end{pmatrix}^T,$$

  kde matice C_{ij} vznikly z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.
- Inverzní matice: $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\, A}{|A|}$,
  - determinant musí existovat a být různý od 0.

Example

Mějme $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nejprve spočtěme determinant a poté adjungovanou matici.

$$|A| = 0 + 2 + (-2) - 0 - 0 - 1 = -1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -4 & +1 & +2 \\ -3 & +1 & +1 \\ +2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & +2 \\ +1 & +1 & -1 \\ +2 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +4 & +3 & -2 \\ -1 & -1 & +1 \\ -2 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

- Systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

- Maticový zápis daného systému:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{matice\ soustavy} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\text{vektor neznámých}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{vektor pravých stran}} .$$

- $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

Maticový zápis

Example

Uvažujme systém

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1. \end{array}$$

Pak maticový zápis tohoto systému je

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Gausova eliminační metoda

- Převedeme do maticového zápisu ... rozšířená matice soustavy.
- Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do tvaru, aby pod diagonálou byly samé 0.

Example

$$(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -21 & 37 \end{array}\right)$$

- Převedeme zpátky do soustavy rovnic a danou soustavu vyřešíme.

Example

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ & & & - & 21x_3 & = & 37 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{37}{21}$$

$$\Rightarrow x_2 = -4 - 2 \cdot \left(-\frac{37}{21}\right) = -\frac{10}{21}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + 3 \cdot \left(-\frac{10}{21}\right) - \left(-\frac{37}{21}\right) = \frac{70}{21}$$

Gausova eliminační metoda

Example

Řešení soustavy rovnic:

```
A<-matrix(c(2,1,-1,3,-3,2,-1,1,-3),3)
b<-c(7,3,1)
x<-solve(A,b)
```

Cramerovo pravidlo

- Umožňuje přímý výpočet soustavy lineárních rovnic ($m = n$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{|A_n|}{|A|}, \end{aligned}$$

kde matice A_i vznikne z matice soustavy A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran.

Example

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 3 - 2 + 3 - 4 + 9 = 21$$

Example

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 63 + 3 - 6 - 3 - 14 + 27 = 70$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 7 - 1 - 3 - 2 + 21 = -10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 + 14 - 21 - 12 - 3 = -37$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{37}{21}, \qquad x_2 = -\frac{10}{21}, \qquad x_1 = \frac{70}{21}.$$

Determinant

- Co když $|A| = 0$?

Example

Pro systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} & x & + & y & = & & 2 \\ - & x & - & y & = & - & 2 \end{array}$$

je determinant matice soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

- $|A| = 0$ značí, že jsou jednotlivé rovnice (řádky matice) na sobě lineárně závislé.

Počet řešení soustavy rovnic

- Právě jedno řešení:
  - počet lineárně nezávislých rovnic = počet neznámých,
  - $h(A) = h(A|b) = n$.
- Nekonečně mnoho řešení:
  - počet lineárně nezávislých rovnic < počet neznámých,
  - $h(A) = h(A|b) < n$.
- Žádné řešení:
  - když dojdeme ke "sporu",
  - $h(A) < h(A|b)$.

Example

Systém

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$$

zřejmě nemá žádné řešení.

Vlastní čísla, vlastní vektory

- Definice: Jestliže pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ a reálné číslo λ platí
$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$
pak $\mathbf{v}$ nazýváme *vlastní vektor* a λ *vlastní číslo* k matici A.
- Postup

$$A \cdot \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = \vec{0}$$
$$(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \vec{0}$$
$$det(A - \lambda I) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$
$$(A - \lambda_i I) \cdot \mathbf{v} = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$$

Vlastní čísla, vlastní vektory

Example

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)\cdot(-\lambda) - 3\cdot(-1) \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\lambda_1 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_2 : \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Vlastní čísla, vlastní vektory

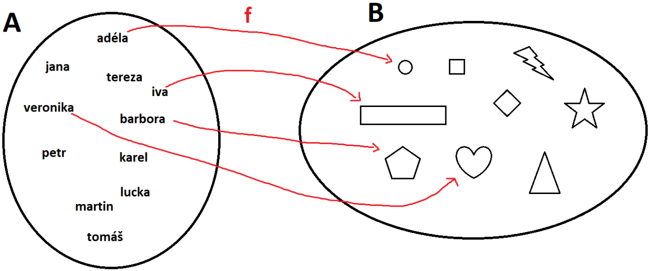
Example

```
A<-matrix(c(4,3,-1,0),2)
eigen(A)
eigen(A)$values
eigen(A)$vectors
```

Vlastní vektor je libovolný násobek:

```
eigen(A)$vectors[,1]/eigen(A)$vectors[1]
eigen(A)$vectors[,2]/eigen(A)$vectors[3]
```

Funkce



- Funkcí $f : A \to B$ nazýváme pravidlo/předpis, který prvkům z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B.
- Množinu prvků z A, které se na něco zobrazí nazýváme definiční obor $D(f) = \{$adéla, iva, veronika, barbora$\}$.
- Množinu prvků z B, na které se něco zobrazí nazýváme obor hodnot $H(f) = \{$kolečko, obdélník, pětiúhelník, srdce$\}$.

Funkce

- Funkci zadáváme předpisem, tabulkou, výčtem prvků.
- Reálná funkce reálné proměnné: $A = B = \mathbb{R}$.
- Zadáváme předpisem: $y = f(x)$.

Obrázek: Funkce $f : y = \sqrt{x},\ D(f) = \langle 0, \infty),\ H(f) = \langle 0, \infty)$

Example

plot(function(x) sqrt(x), xlim=c(-1,9), col="red", lwd = 3, ylab="y", main = "y=sqrt(x)")

Funkce - definiční obor

- $\frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}}$ ... jmenovatel $\neq 0$
- $\sqrt[2n]{\text{argument}}$ ... argument ≥ 0
- $\log(\text{argument})$ ... argument > 0

Example

Určete definiční obor funkce $f: \ y = \frac{3x}{\sqrt{(x-1)^2-1}}$. Máme tu dvě problémové funkce ... zlomek a odmocninu. Nejprve se podíváme na zlomek. Tedy ve jmenovateli nesmí být 0. Řešíme rovnici

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2-1} &= 0 \\
(x-1)^2-1 &= 0 \\
(x-1)^2 &= 1 \\
x_1 = 2, \ x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Tedy v definičním oboru nesmí být body 0 a 2.

Example

Dále pod odmocninou nesmí být záporné číslo, tzn. řešíme nerovnici

$$(x-1)^2 - 1 \geq 0$$
$$(x-1)^2 \geq 1$$
$$x \geq 2 \wedge x \leq 0$$

Dohromady máme $D(f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus \langle 0, 2 \rangle$. Jelikož je v tomto příkladě ve jmenovateli zlomku pouze daná odmocnina, mohli jsme to počítat najednou, jako $(x-1)^2 - 1 > 0$.

Funkce, parita

- Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže $D(f)$ je symetrický podle 0 a $f(-x) = f(x)$.
- Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže $D(f)$ je symetrický podle 0 a $f(-x) = -f(x)$.

Example

Rozhodněte o paritě funkcí $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$ a $g(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$.

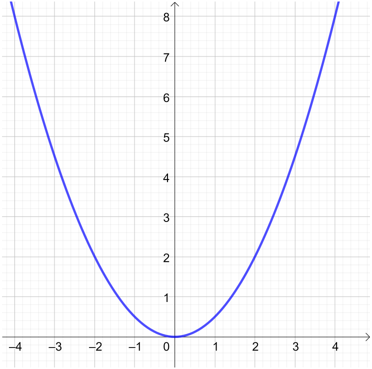
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^3} = \frac{x^2+1}{-x^3} = -\frac{x^2+1}{x^3} = -f(x) \Rightarrow f \text{ je lichá}$$

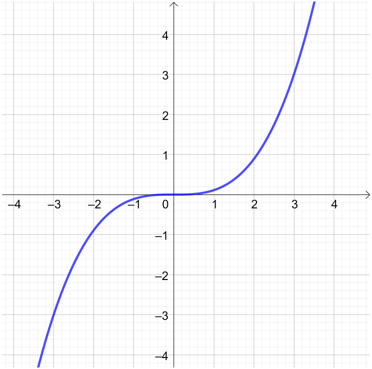
$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \Rightarrow g \text{ není ani sudá ani lichá}$$

Funkce, parita

- sudá - graf osově symetrický podle osy y
- lichá - graf středově symetrický podle počátku



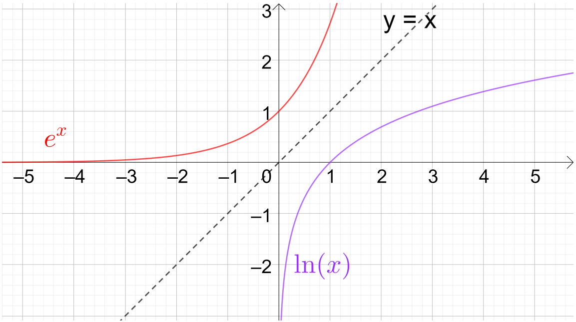
Obrázek: Funkce $y = \frac{x^2}{2}$ je sudá.



Obrázek: Funkce $y = \frac{x^3}{9}$ je lichá.

Funkce, inverzní funkce

- Značíme $f^{-1}(x)$.
- Definice: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Existuje pouze pro prosté funkce (stále rostoucí či stále klesající).
- Grafy f a $f^{-1}(x)$ jsou osově symetrické podle osy $y = x$.



Obrázek: Funkce $y = \mathrm{e}^x$ je inverzní k $y = \ln(x)$ a naopak.

Example

Určete inverzní funkci k funkci $f : y = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} f^{-1} : x &= y^2 + 1 \\ x - 1 &= y^2 \\ \sqrt{x-1} &= |y| \\ y &= \pm\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Funkce f není prostá $\Rightarrow$ neexistuje inverze. Pokud bychom do zadání přidali definiční obor $\langle 0, \infty)$, pak by $f^{-1} : y = \sqrt{x-1}$.

- $D(f) = H(f^{-1})$
- $H(f) = D(f^{-1})$

Funkce, limita

- Limita - zkoumáme chování funkce v okolí určitého bodu
  - v daném bodě spojitá/definovaná $\rightarrow$ funkční hodnota
  - jinak limita - „nekonečné přiblížení“

Example

x	1	0,1	0,01	0	-0,01	-0,1	- 1
$\frac{\sin x}{x}$	0.8415	0.9983	0.9999		0.9999	0.9983	0.8415

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

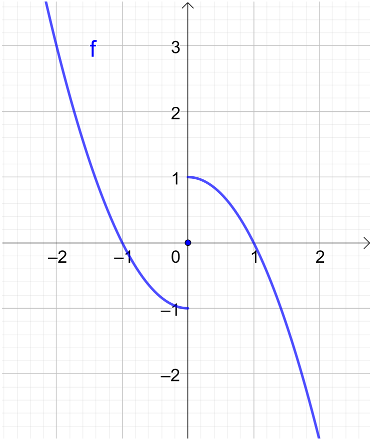
- Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu L, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \text{ platí: } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Značení: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

- K bodu se můžeme blížit zleva ($\lim_{x \to x_0^+} f(x)$) nebo zprava ($\lim_{x \to x_0^-} f(x)$)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \dots \quad x < 0 \\ 0 & \dots \quad x = 0 \\ -x^2 + 1 & \dots \quad x > 0 \end{cases}$$



  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -1$
  - $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 1$
  - $f(0) = 0$

Funkce, limita

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\text{ohraničená funkce}}{\text{„nekonečno“}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, pak
  - $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A + B$,
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
  - $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pro $B \neq 0$.

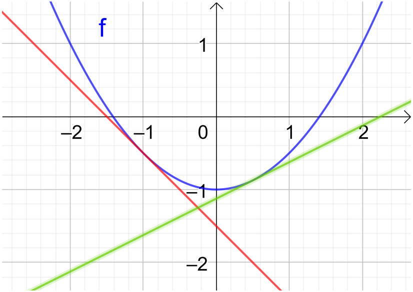
- Pro limity typu "$\frac{0}{0}$" a "$\pm\frac{\infty}{\infty}$".
- Pokud existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Example

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{x^3-7x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2-7} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x} = \left|\frac{2}{\infty}\right| = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} &= \lim_{x\to\infty} 1+\cos x = \nexists\\ &= \lim_{x\to\infty} 1+\frac{\sin x}{x} = 1\end{aligned}$$

- Definice: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Směrnice tečny v daném bodě.
  - Rovnice tečny: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
  - Diferenciál
  - $f'(x) < 0$ … klesající funkce
  - $f'(x) > 0$ … rostoucí funkce
  - $f'(x) = 0$



- $f''(x), f^{(3)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$

Funkce, počítání derivací

$[k]' = 0$, je-li k konstantní funkce, $[x^a]' = a \cdot x^{a-1}$

$[\sin x]' = \cos x$, $[\cos x]' = -\sin x$,

$[\mathrm{tg}\, x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $[\mathrm{cotg}\, x]' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$,

$[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[\arccos x]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$[\mathrm{arctg}\, x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $[\mathrm{arccotg}\, x]' = \dfrac{-1}{1+x^2}$,

$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$, pro $a > 0$, $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, pro $a > 0, a \neq 1$,

$[e^x]' = e^x$, $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$.

$$[f+g]' = f' + g'$$
$$[f-g]' = f' - g'$$
$$[fg]' = f'g + fg' \qquad \text{součinové pravidlo}$$
$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{podílové pravidlo}$$
$$[g(f)]' = g'(f) \cdot f' \qquad \text{řetízkové pravidlo}$$

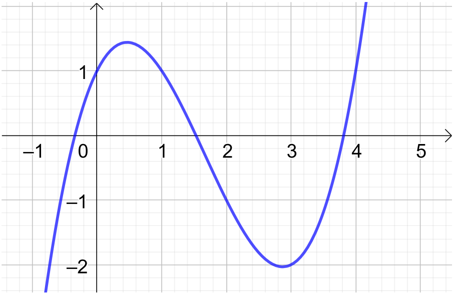
Example

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\mathrm{e}^{x^2+3}\right)' = \mathrm{e}^{x^2+3} \cdot (x^2+3)' = \mathrm{e}^{x^2+3} \cdot (2x+0) = 2x\mathrm{e}^{x^2+3}$$

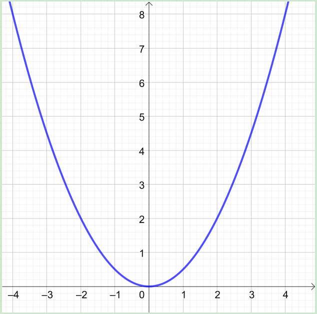
$$\left(\ln \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(x^{-1}\right)' = x \cdot \left(-1 \cdot x^{-2}\right) = -\frac{1}{x}$$

Funkce, extrémy

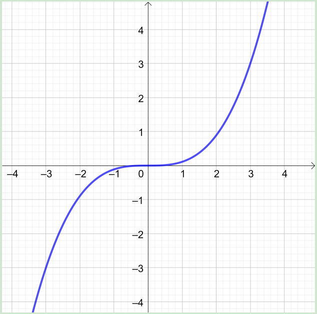


- Lokální extrémy
  - Maximum - „před“ funkce roste, „po“ funkce klesá.
  - Minimum - „před“ funkce klesá, „po“ funkce roste.
- Lokální extrém $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
- $f'(x_i) = 0$ + tam kde není definovaná $\Rightarrow$ stacionární body = kandidáti na extrém.

Example



Obrázek: Funkce $f : y = \frac{x^2}{2}$.

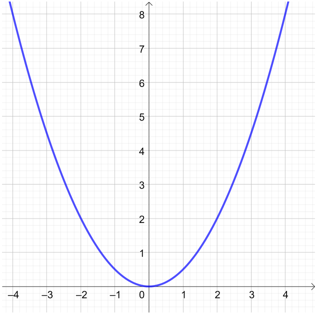


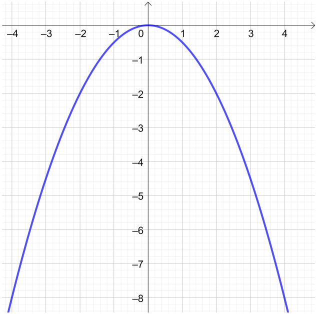
Obrázek: Funkce $g : y = \frac{x^3}{9}$.

Body, kde je derivace nulová jsou kandidáti na extrém.

$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad x_{1,f} = 0 \quad \ldots \quad$ minimum

$g'(x) = \frac{x^2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1,g} = 0 \quad \ldots \quad$ není extrém





- Konvexní funkce - v každém bodě leží „nad“ tečnou.
- Konkávní funkce - v každém bodě leží „pod“ tečnou.
- Derivace
  - konvexní . . . $f''(x) > 0$,
  - konkávní . . . $f''(x) < 0$,
  - $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$ kandidáti na změnu zakřivení $\Rightarrow$ inflexní body.

Funkce, asymptoty

- Asymptota = tečna v nekonečnu.
- Asymptoty bez směrnice
  - kolmé na osu x, tzn. přímky $x = x_i$
  - v bodech nespojitosti,
  - v krajích definičního oboru,
  - $\lim_{x \to x_i} f(x) = \pm\infty$.
- Asymptoty se směrnicí
  - přímky $y = ax + b$, pro x jdoucí k plus/minus nekonečnu
  - $a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,
  - $b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$.

Example

Funkce $y = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a se směrnicí $y = 0$.

Průběh funkce

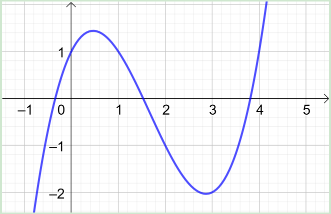
- Nalezneme nulové body zadané funkce.
- Určíme znaménka funkce na jednotlivých intervalech.
- Spočteme derivaci.
- Nalezneme nulové body derivace.
- Určíme znaménka derivace na jednotlivých intervalech.
- Určíme extrémy.
- Spočteme druhou derivaci.
- Nalezneme nulové body druhé derivace.
- Určíme znaménka druhé derivace na jednotlivých intervalech.
- Určíme inflexní body.
- Nalezneme asymptoty.
- Načrtneme obrázek
- Rozhodneme o paritě, určíme $H(f)$, globálnost extrémů.

Funkce, globální extrémy

- Extrémy na celém definičním oboru:
  - v bodech lokálních extrémů,
  - v krajích definičního oboru.

Example

Funkce $y = x^2$ má jeden lokální extrém, a ten je i extrémem globálním.



Funkce na obrázku má dva lokální extrémy, ale žádný globální. Kdybychom si danou funkci vzali jen na intervalu $\langle 2; 4 \rangle$, měla by funkce tři lokální extrémy a dva globální.

Taylorův polynom

- Taylorův polynom stupně n se středem x_0.
- Definice: $T_n(x, x_0) =$
  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$
- McLaurinův polynom: $x_0 = 0$.
- Aproximace funkce.
- Taylorova řada: $n = \infty$.

Example

Určete Taylorův polynom třetího stupně funkce $\ln x$ se středem v bodě 1.

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2$$

Teď dosadíme do vzorce: $T(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$.

Taylorův polynom

- Diferenciál:
  - přírůstek na tečně,
  - Taylorův polynom prvního stupně, tzn. $D_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
  - $d_f(x) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Example

Pomocí diferenciálu odhadněte $\sqrt{9,05}$. Nejprve si zvolíme střed $x_0 = 9$. Dále $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nyní podle vzorečku pro diferenciál $\sqrt{9,05} \doteq \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0,05 \doteq 3,0083$.

Funkce více proměnných

- Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, např.
  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2^2 + x_1 x_n + x_2 x_{n-1} - x_n^7.]$
- Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$:
  - graf je 3-rozměrný
  - definiční obor je 2-rozměrný

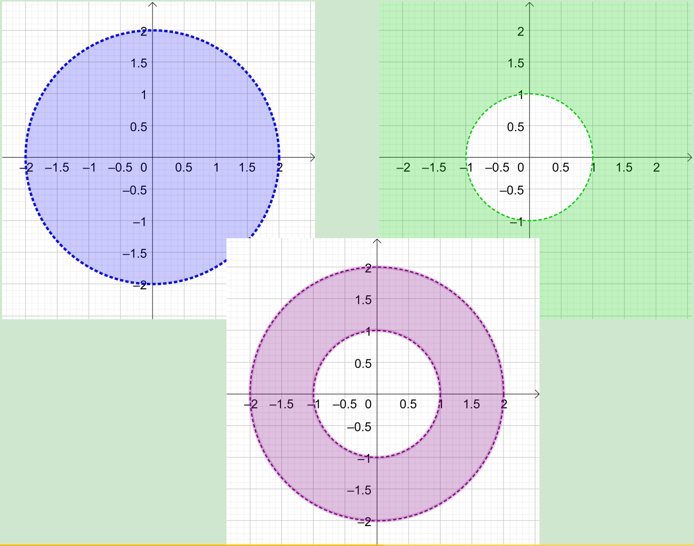
Example

Určete a znázorněte definiční obor funkce
$f : z = \ln\left((1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\right)$.

$$\begin{array}{ll} a) & 1 - x^2 - y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 + y^2 - 4 > 0 \\ & \quad x^2 + y^2 < 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 > 4 \\ b) & 1 - x^2 - y^2 < 0 \ \wedge \ x^2 + y^2 - 4 < 0 \\ & \quad x^2 + y^2 > 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 < 4 \end{array}$$

$D(f) = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$.

Example



Parciální derivace

- Více proměnných, více směrů $\Rightarrow$ více derivací.
- Ve směru souřadnicové osy - parciální derivace:
  - $f(x,y) \Rightarrow f_x(x,y), f_y(x,y)$
  - $f(x,y,z) \Rightarrow f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)$
  - $f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y), \dots, f_{xyxxy}(x,y), \dots$
  - derivujeme pouze podle jedné proměnné, ostatní chápeme jako konstanty.

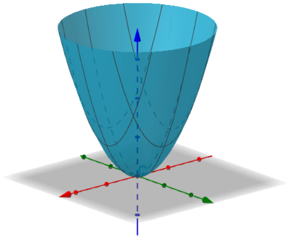
Example

Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + xy - 3$ až do řádu 2.

$$
\begin{array}{ll}
f_x(x,y) = 2x - 2 + y & f_y(x,y) = 2y + x \\
f_{xx}(x,y) = 2 & f_{xy}(x,y) = 1 \\
f_{yx}(x,y) = 1 & f_{yy}(x,y) = 2
\end{array}
$$

Hledání extrémů

- Podobně jak u funkcí jedné proměnné:
- $f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0 \Rightarrow$ kandidáti na extrém $[x_i, y_i]$.
- Hessova matice $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$.



- Dosadíme kandidáty a spočteme determinant
  - $|H(x_i, y_i)| > 0 \wedge f_{xx}(x_i, y_i) > 0 \Rightarrow$ minimum,
  - $|H(x_i, y_i)| > 0 \wedge f_{xx}(x_i, y_i) < 0 \Rightarrow$ maximum,
  - $|H(x_i, y_i)| < 0 \Rightarrow$ není extrém (sedlový bod).

Example

```
install.packages("plot3D")
library(plot3D)
X<- seq(-10,10, length.out = 20)
Y<- seq(-10,10, length.out = 20)
M<-mesh(X,Y)
x<-M$x
y<-M$y
z=x^2 + y^2
perspbox(x,y,z, bty = 'b2', ticktype = 'detailed', d = 2, main =
'funkce z=x^2 + y^2')
persp3D(x,y,z,add = T)
```

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- Hledáme *primitivní funkci* F, aby $F'(x) = f(x)$.
- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c\}$

Example

Nalezněte integrál $\int 7x\,\mathrm{d}x$.
Co musím zderivovat, abych dostal x … „nějaký násobek“ x^2 … $(x^2)' = 2x$ … $(7x^2)' = 14x$ … $(7/2 \cdot x^2)' = 7x$. Takže $7/2 \cdot x^2$ je primitivní k $7x$. Ale stejně tak $7/2 \cdot x^2 - 3$ a nebo $7/2 \cdot x^2 + \pi$.

Neurčitý integrál

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x>0; \quad \text{pro } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotg}(x) + C,\ x \neq k\pi$$

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \mathrm{tgh}(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotgh}(x) + C,\ x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C,\ x \in (-1,1)$$

Racionální lomená funkce: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x$.

- Pokud je $m \geq n$, nejprve podělíme,
- rozložíme zlomek na parciální zlomky,
- zintegrujeme každou část zvlášť.

Rozklad na parciální zlomky:

- rozklad zlomku na součet zlomků tvaru $\frac{M}{N^k}$,
- N se nedá rozložit, M má nižší stupeň než N.

Example

Spočtěte $\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$.
Jmenovatel více rozložit nelze. Zapíšeme tedy obecné členy:

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Vynásobíme jmenovatelem a vyřešíme vzniklou rovnici:

$$3x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1).$$

Postupně do rovnice dosadíme za x tři různá čísla:

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad & 3 &= 3A & &\Rightarrow A = 1, \\ x = 0: &\quad & 0 &= 2 - C & &\Rightarrow C = 2, \\ x = -1: &\quad & -3 &= 3 + (-B+2)(-2) & &\Rightarrow B = -1. \end{aligned}$$

Example

Máme tedy

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+2}{x^2+2}.$$

Dosadíme zpátky do integrálu:

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

Spočtěme jednotlivé integrály:

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1) + c_1,$$

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + c_2,$$

Example

$$\int \frac{2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_3$$

Dohromady

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Substituční metoda

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x$

Example

Pomocí subs. metody spočtěte $\int x \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

$$\int x \sin x^2\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = x^2 \\ \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{2} \sin z\,\mathrm{d}z = \frac{\cos z}{2} + c$$

$$= \frac{\cos x^2}{2} + c$$

- vždy mohu substituovat cokoliv jakkoliv, ale chceme aby nám to pomohlo

Example

Pomocí subs. metody spočtěte $\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \ln x \\ \mathrm{d}z = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{z} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \frac{1}{\ln x} \\ \mathrm{d}z = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int -1\,\mathrm{d}z = -z + c$$

$$= -\frac{1}{\ln x} + c$$

- $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$
- V případech jako:
  $\int P(x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x, \int P(x) \cdot \cos x \, \mathrm{d}x, \int P(x) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \int P(x) \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

Example

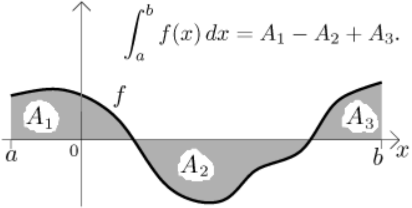
Pomocí metody per-partes spočtěte $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$.

$$\int 2x \ln x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 2x & v = x^2 \end{vmatrix} = x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot 2x \, \mathrm{d}x$$

$$= x^2 \ln x - \int 2 \, \mathrm{d}x = x^2 \ln x - 2x + c$$

Určitý - Riemannův integrál

- Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ na daném intervalu (a, b).
- Orientovaný obsah oblasti ohraničené zadanou křivkou, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.



- Newton-Leibnitzova formule:
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, kde F je primitivní k f.

Example

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin\pi - \sin(-\pi) = 0$

- Substituční metoda - pokud transformujeme meze, není nutné dosadit zpátky

Example

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \ln x \\ \mathrm{d}z = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{e}^2 \to 2 \\ \mathrm{e} \to 1 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{z}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

- Per-partes - $\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$

Example

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = [x \ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e} - [x]_1^e = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$$

- Integrály do „nekonečna“
- „Utíká“:
  - funkce - $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \to \lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,
  - mez - $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \to \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Example

Spočtěte $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^a + \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^-} \left[-\frac{1}{a} - 1\right] + \lim_{a\to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{a}\right] = \infty
\end{aligned}$$