Analytická geometrie v rovině a prostoru

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

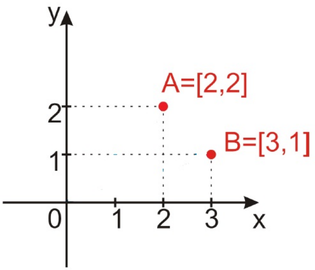
podzim 2020

Dvojice číselných os x, y v rovině , pro které platí:

1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku odpovídá na obou osách číslo 0,

se nazývá **kartézská soustava souřadnic v rovině** a označuje se Oxy.

Každý bod roviny lze zapsat pomocí dvou souřadnic.



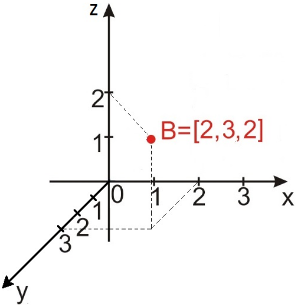
Souřadnice v prostoru

Trojice číselných os x, y, z v prostoru, pro které platí:

1. každé dvě z nich jsou navzájem kolmé,
2. všechny procházejí bodem O,
3. bod 0 odpovídá na všech osách bou 0

se nazývá **kartézská soustava souřadnic v rovině** a označuje s $Oxyz$.

Každý bod prostoru lze zapsat pomocí tří souřadnic.



Vektory v analytické geometrii

- Dva typy vektorů
    - Vázané
    - Volné

Vektory v analytické geometrii

- Dva typy vektorů
  - Vázané
  - Volné
- Vázané vektory
  - požívají se k určování souřadnic bodů
  - značení velká tiskací písmena a souřadnice do hranatých závorek

$$A = [a_1,\ a_2,\ a_3]\ ,\ B = [b_1,\ b_2,\ b_3]$$

Vektory v analytické geometrii

- Dva typy vektorů
  - Vázané
  - Volné
- Vázané vektory
  - požívají se k určování souřadnic bodů
  - značení velká tiskací písmena a souřadnice do hranatých závorek

$$A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$$

- Volné vektory
  - používají se k určování směrů, posunů, ...
  - značení malá písmena se šipkou, nebo pomocí dvou bodů, složky do kulatých závorek

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$
- Eukleidovská metrika

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$
- Eukleidovská metrika

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Př: $A = [2, 3]$,
$B = [-1, 4]$,

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$
- Eukleidovská metrika

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Př: $A = [2, 3]$,
$B = [-1, 4], |AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$
- Eukleidovská metrika

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Př: $A = [2, 3]$,
$B = [-1, 4], |AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$
- Eukleidovská metrika

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Př: $A = [2, 3]$,
$B = [-1, 4], |AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

P?: $\overrightarrow{u} = (-1, 5)$,

Vzdálenost bodů a velikost vektoru

- Potřeba určit vzdálenosti/velikosti
- Metrika
  - Předpis, který definuje vzdálenosti (velikosti)
  - Nejznámější metrika je Eukleidovská metrika
- Značení
  - Vzdálenost bodů $|AB|$
  - Velikost vektoru $|\overrightarrow{u}|$
- Eukleidovská metrika

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 {\color{red}+ (b_3 - a_3)^2}}$$

Př: $A = [2, 3]$,
$B = [-1, 4]$,$|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

P?: $\overrightarrow{u} = (-1, 5)$,$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

Operace s vektory

$$\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3),\ \overrightarrow{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$$

Operace s vektory

$$\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3),\ \overrightarrow{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$$

- Násobení konstantou

$$c \cdot \overrightarrow{u} = c \cdot (u_1,\ u_2,\ u_3) = (c \cdot u_1,\ c \cdot u_2,\ c \cdot u_3)$$

Operace s vektory

$$\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3),\ \overrightarrow{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$$

- Násobení konstantou

$$c \cdot \overrightarrow{u} = c \cdot (u_1,\ u_2,\ u_3) = (c \cdot u_1,\ c \cdot u_2,\ c \cdot u_3)$$

- Sčítání vektorů

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$$

Operace s vektory

$$\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)\,,\ \overrightarrow{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$$

- Násobení konstantou

$$c \cdot \overrightarrow{u} = c \cdot (u_1,\ u_2,\ u_3) = (c \cdot u_1,\ c \cdot u_2,\ c \cdot u_3)$$

- Sčítání vektorů

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$$

- Odčítání vektorů

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3)$$

Operace s vektory

$$\overrightarrow{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)\,,\ \overrightarrow{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$$

- Násobení konstantou

$$c \cdot \overrightarrow{u} = c \cdot (u_1,\, u_2,\, u_3) = (c \cdot u_1,\, c \cdot u_2,\, c \cdot u_3)$$

- Sčítání vektorů

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2,\, u_3 + v_3)$$

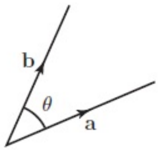
- Odčítání vektorů

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (u_1 - v_1,\, u_2 - v_2,\, u_3 - v_3)$$

- Skalární součin

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Geometrický význam skalárního součinu

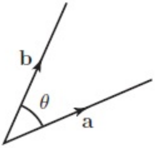


- Úhel dvou vektorů

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

- Kdy jsou dva vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ kolmé?

Geometrický význam skalárního součinu



- Úhel dvou vektorů

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

- Kdy jsou dva vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ kolmé?
- Když platí $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$
- Určení kolmého vektoru $\overrightarrow{b}$ k vektoru $\overrightarrow{a} = (a_1\ a_2)$

$$\overrightarrow{b} = (a_2, -a_1)$$

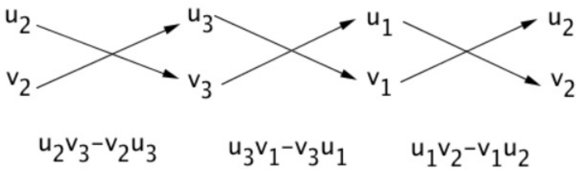
Vektorový součin je operace v prostou mezi dvěma vektory, která nám vrátí nový **vektor**, který je na tyto dva vektory kolmý.

Vzorec

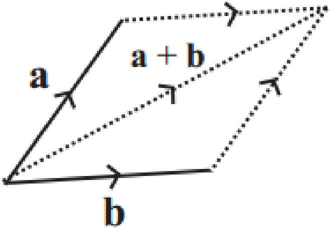
Součin vektorů $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{w} = (u_2 v_3 - v_2 u_3; u_3 v_1 - v_3 u_1; u_1 v_2 - v_1 u_2;)$$

Pro snadnější zapamatování:

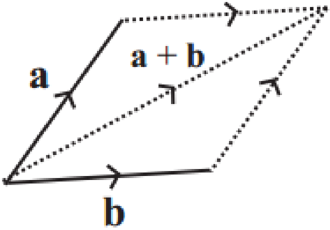


Význam vektorového součinu



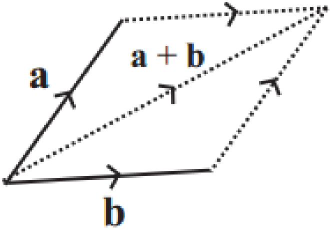
- Jak spočítat obsah obecného rovnoběžníku s hranami $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$?

Význam vektorového součinu



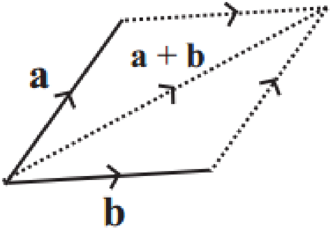
- Jak spočítat obsah obecného rovnoběžníku s hranami $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$?
- Pomocí vektorového součinu!

Význam vektorového součinu



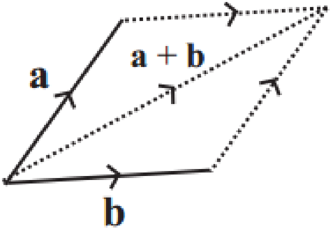
- Jak spočítat obsah obecného rovnoběžníku s hranami $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$?
- Pomocí vektorového součinu!
- Plocha obecného rovnoběžníku je dán $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$

Význam vektorového součinu



- Jak spočítat obsah obecného rovnoběžníku s hranami $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$?
- Pomocí vektorového součinu!
- Plocha obecného rovnoběžníku je dán $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$
- Př: Rovnoběžník má strany $\overrightarrow{a} = (1, 2, -3)$ a $\overrightarrow{b} = (2, 1, 2)$ určete jeho obsah.

Význam vektorového součinu



- Jak spočítat obsah obecného rovnoběžníku s hranami $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$?
- Pomocí vektorového součinu!
- Plocha obecného rovnoběžníku je dán $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$
- Př: Rovnoběžník má strany $\overrightarrow{a} = (1, 2, -3)$ a $\overrightarrow{b} = (2, 1, 2)$ určete jeho obsah.

$$S = |(2\cdot 2 - 1\cdot(-3), -3\cdot 2 - 2\cdot 1, 1\cdot 1 - 2\cdot 2)| = |(7, -8, -3)| =$$

$$= \sqrt{7^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{122}$$

Jednotkový vektor

- V některých výpočtech potřebujeme vektor o velikosti 1.
- Způsob výpočtu
$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$
- Vektor $\vec{e}$ je rovnoběžný s původním vektorem $\vec{a}$
- Velikost vektoru $\vec{e}$ je rovna 1.
- Významné jednotkové vektory:
  - $\vec{i} = (1, 0, 0)$
  - $\vec{j} = (0, 1, 0)$
  - $\vec{k} = (0, 0, 1)$

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$

Přímky v rovině

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$
- Možnosti zápisu:

Přímky v rovině

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$
- Možnosti zápisu:
  - Parametrický zápis

Přímky v rovině

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$
- Možnosti zápisu:
  - Parametrický zápis
  - Obecná rovnice

Přímky v rovině

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$
- Možnosti zápisu:
    - Parametrický zápis
    - Obecná rovnice
- Přímka je jednoznačně určena pomocí:

Přímky v rovině

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

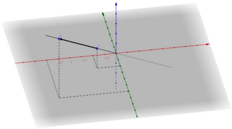
- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$
- Možnosti zápisu:
  - Parametrický zápis
  - Obecná rovnice
- Přímka je jednoznačně určena pomocí:
  - dvěma navzájem různými body

Přímky v rovině

„Přímka je jednorozměrný základní geometrický útvar. Lze ji popsat jako nekonečně tenkou, dvoustranně nekonečně dlouhou, dokonale rovnou křivku.“

- Značení:„$\leftrightarrow$“ a malé psací písmeno, např: $\leftrightarrow p$
- Možnosti zápisu:
  - Parametrický zápis
  - Obecná rovnice
- Přímka je jednoznačně určena pomocí:
  - dvěma navzájem různými body
  - bodem a volným vektorem

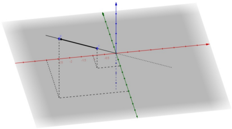
Parametrický zápis přímky



- Zápis pomocí bodu $A = [a_1,\ a_2]$ a **směrového** vektoru $\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2)$

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} x = a_1 + u_1 \cdot t \\ y = a_2 + u_2 \cdot t \end{array},\ t \in \mathbb{R}$$

Parametrický zápis přímky

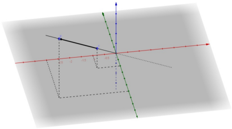


- Zápis pomocí bodu $A = [a_1,\ a_2]$ a **směrového** vektoru $\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2)$

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} x = a_1 + u_1 \cdot t \\ y = a_2 + u_2 \cdot t \end{array},\ t \in \mathbb{R}$$

- Příklad: Zapište přímku p procházející bodem $A = [2,\ -3]$ se směrovým vektorem $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$

Parametrický zápis přímky



- Zápis pomocí bodu $A = [a_1,\, a_2]$ a **směrového** vektoru $\overrightarrow{u} = (u_1,\, u_2)$

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} x = a_1 + u_1 \cdot t \\ y = a_2 + u_2 \cdot t \end{array},\, t \in \mathbb{R}$$

- Příklad: Zapište přímku p procházející bodem $A = [2,\, -3]$ se směrovým vektorem $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \end{array},\, t \in \mathbb{R}$$

Obecná rovnice přímky

- Zápis pomocí bodu $A = [a_1,\, a_2]$ a **normálového** vektoru $\overrightarrow{n} = (n_1,\, n_2)$

$$\leftrightarrow p \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2) = 0$$

Obecná rovnice přímky

- Zápis pomocí bodu $A = [a_1,\ a_2]$ a **normálového** vektoru $\overrightarrow{n} = (n_1,\ n_2)$

$$\leftrightarrow p \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2) = 0$$

- Příklad: Zapište přímku p procházející bodem $A = [2,\ -3]$ se směrovým vektorem $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$

Obecná rovnice přímky

- Zápis pomocí bodu $A = [a_1,\ a_2]$ a **normálového** vektoru $\overrightarrow{n} = (n_1,\ n_2)$

$$\leftrightarrow p \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2) = 0$$

- Příklad: Zapište přímku p procházející bodem $A = [2,\ -3]$ se směrovým vektorem $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$

$$\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} x{=}2 - t \\ y{=}-3 + 2t \end{array}, t \in \mathbb{R}$$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} x = 2 - t \quad \cdot 2 \\ y = -3 + 2t \end{array}, t \in \mathbb{R}$$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{l} 2x = 4 - 2t \\ y = -3 + 2t \end{array} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t$$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow$$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

- Přepis obecné rovnice do parametrického tvaru
  $\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

- Přepis obecné rovnice do parametrického tvaru
  $\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$
  - 1) Najít bod splňující rovnici (zvolíme jednu souřadnici)

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

- Přepis obecné rovnice do parametrického tvaru
  $\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$
  - 1) Najít bod splňující rovnici (zvolíme jednu souřadnici)
    $A = [8, 0]$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

- Přepis obecné rovnice do parametrického tvaru
  $\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$
  - 1) Najít bod splňující rovnici (zvolíme jednu souřadnici) $A = [8, 0]$
  - 2) Najít směrový vektor (známe normálový $\overrightarrow{n} = (-1, 2)$)

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

- Přepis obecné rovnice do parametrického tvaru
  $\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$
  - 1) Najít bod splňující rovnici (zvolíme jednu souřadnici)
    $A = [8, 0]$
  - 2) Najít směrový vektor (známe normálový $\overrightarrow{n} = (-1, 2)$)
    $\overrightarrow{s} = (2, 1)$

Vztahy obecné rovnice a parametrického zápisu

- Vztah **normálového** $\overrightarrow{n}$ a **směrového** $\overrightarrow{u}$ vektoru

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

- Přepis parametrického zápisu přímky do obecné rovnice

$$\leftrightarrow p \equiv 2x + y = 4 - 3 - 2t + 2t \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

- Přepis obecné rovnice do parametrického tvaru
  $\leftrightarrow p \equiv -x + 2y + 8 = 0$
  - 1) Najít bod splňující rovnici (zvolíme jednu souřadnici)
    $A = [8, 0]$
  - 2) Najít směrový vektor (známe normálový $\overrightarrow{n} = (-1, 2)$)
    $\overrightarrow{s} = (2, 1)$

    $$\leftrightarrow p \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 8 + 2t \\ y & = & 0 + t \end{array}, t \in \mathbb{R}$$

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice
  - Vypočítat parametr

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice
  - Vypočítat parametr
  - Dosadit parametr do parametrických rovnic

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice
  - Vypočítat parametr
  - Dosadit parametr do parametrických rovnic
- Obě zapsané parametricky

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice
  - Vypočítat parametr
  - Dosadit parametr do parametrických rovnic
- Obě zapsané parametricky
  - Vytvořit soustavu rovnic (jednotlivé vztahy pro x a y se musí rovnat)

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice
  - Vypočítat parametr
  - Dosadit parametr do parametrických rovnic
- Obě zapsané parametricky
  - Vytvořit soustavu rovnic (jednotlivé vztahy pro x a y se musí rovnat)
  - Vyře?it soustavu lineárních rovnic

Nalezení průsečíku dvou přímek

- Obě zapsané pomocí obecných rovnic
  - Vyřešit soustavu lineárních rovnic např.: $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}$
- Parametrický zápis a obecná rovnice
  - Dosadit parametrické rovnice do obecné rovnice
  - Vypočítat parametr
  - Dosadit parametr do parametrických rovnic
- Obě zapsané parametricky
  - Vytvořit soustavu rovnic (jednotlivé vztahy pro x a y se musí rovnat)
  - Vyře?it soustavu lineárních rovnic
  - Dosadit jeden parametr do vztahů odpovídající přímky

Vzdálenost bodu od přímky

- Přímka $\leftrightarrow p \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + c = 0$
- Bod $A = [a_1,\, a_2]$
- Vzdálenost bodu A od přímky p, zkráceně $|Ap|$

$$|Ap| = \frac{|n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

Vzdálenost bodu od přímky

- Přímka $\leftrightarrow p \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + c = 0$
- Bod $A = [a_1,\ a_2]$
- Vzdálenost bodu A od přímky p, zkráceně $|Ap|$

$$|Ap| = \frac{|n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

- $\leftrightarrow p \equiv 3 \cdot x + 4 \cdot y - 6 = 0,\ A = [4,\ 1]$

Vzdálenost bodu od přímky

- Přímka $\leftrightarrow p \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + c = 0$
- Bod $A = [a_1,\ a_2]$
- Vzdálenost bodu A od přímky p, zkráceně $|Ap|$

$$|Ap| = \frac{|n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

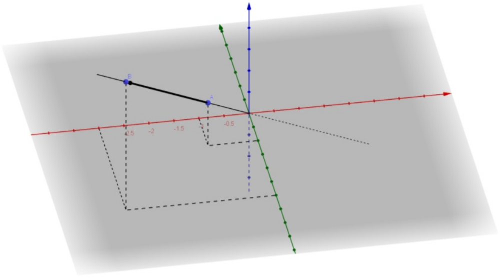
- $\leftrightarrow p \equiv 3 \cdot x + 4 \cdot y - 6 = 0,\ A = [4,\ 1]$

$$|Ap| = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|16 - 6|}{5} = 2$$

Parametrické vyjádření přímky (a v prostoru nikdy jinak)

$$\leftrightarrow p = \begin{array}{rcl} x & = & a_1 + u_1 \cdot t \\ y & = & a_2 + u_2 \cdot t \\ z & = & a_3 + u_3 \cdot t \end{array} , t \in \mathbb{R}$$

kde $A = [a_1,\ a_2,\ a_3]$ je bod přímky $\leftrightarrow p$ a vektor $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je její směrový vektor



Vydálenost bodu od přímky

- Jak spočítat vzdálenost bodu B od přímky, když neexistuje její obecná rovnice?

Vydálenost bodu od přímky

- Jak spočítat vzdálenost bodu B od přímky, když neexistuje její obecná rovnice?
- Co třeba pomocí vektorového součinu?

Vydálenost bodu od přímky

- Jak spočítat vzdálenost bodu B od přímky, když neexistuje její obecná rovnice?
- Co třeba pomocí vektorového součinu?
- Nechť A je bod přímky $\leftrightarrow p$ a vektor $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je její směrový vektor.

Vydálenost bodu od přímky

- Jak spočítat vzdálenost bodu B od přímky, když neexistuje její obecná rovnice?
- Co třeba pomocí vektorového součinu?
- Nechť A je bod přímky $\leftrightarrow p$ a vektor $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je její směrový vektor.
- Pak
$$|Bp| = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

Rovnice:

$$X = A + \overrightarrow{u}t + \overrightarrow{v}s, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

se nazývá parametrická rovnice roviny nebo také parametrické vyjádření roviny ABC, kde $B = A + \overrightarrow{u}$ a $C = A + \overrightarrow{v}$.

Zavedení roviny v prostoru

Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic můžeme $Oxyz$ body a vektory zapsat pomocí souřadnic:

$$X[x; y; z], A[a_1; a_2; a_3], \mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3), \mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$$

Zavedení roviny v prostoru

Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic můžeme $Oxyz$ body a vektory zapsat pomocí souřadnic:

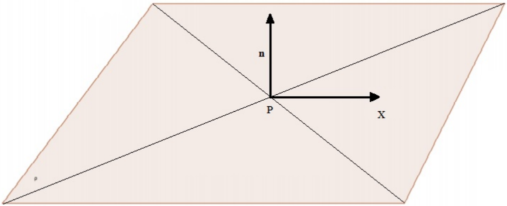
$$X[x;y;z], A[a_1;a_2;a_3], \mathbf{u} = (u_1;u_2;u_3), \mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3)$$

Parametrické vyjádření roviny v prostoru pak můžeme zapsat v souřadnicích

$$\rho \equiv \begin{array}{rcl} x & = & a_1 + u_1 t + v_1 s \\ y & = & a_2 + u_2 t + v_2 s \\ z & = & a_3 + u_3 t + v_3 s \end{array}, t, s \in \mathbb{R}$$

Zavedení roviny v prostoru

Analogickým postupem stejně jako u přímky v rovině dostaneme obecnou rovnici roviny v prostoru. Rovinu určíme bodem a normálovým vektorem, který kolmý na rovinu, tj. na každý vektor v rovině.



Obecná rovnice roviny

$$\rho \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + c = 0$$

- $\overrightarrow{n}$ je normálový vektor roviny

Obecná rovnice roviny

$$\rho \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + c = 0$$

- $\overrightarrow{n}$ je normálový vektor roviny
- pokud platí, že vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ leží v rovině a jsou nezávislé, pak platí
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$$

Vzdálenost bodu od roviny

- Rovina $\rho \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + c = 0$
- Bod $A = [a_1,\ a_2,\ a_3]$
- Vzdálenost bodu A od roviny ρ, zkráceně $|A\rho|$

$$|A\rho| = \frac{|n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Vzdálenost bodu od roviny

- Rovina $\rho \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + c = 0$
- Bod $A = [a_1,\ a_2,\ a_3]$
- Vzdálenost bodu A od roviny ρ, zkráceně $|A\rho|$

$$|A\rho| = \frac{|n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

- $\rho \equiv 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot z - 6 = 0,\ A = [4,\ 1,\ 2]$

Vzdálenost bodu od roviny

- Rovina $\rho \equiv n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + c = 0$
- Bod $A = [a_1,\ a_2,\ a_3]$
- Vzdálenost bodu A od roviny ρ, zkráceně $|A\rho|$

$$|A\rho| = \frac{|n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

- $\rho \equiv 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot z - 6 = 0,\ A = [4,\ 1,\ 2]$

$$|A\rho| = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{9 + 16 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

Dvě přímky

Dvě přímky v prostoru mohou být:

- Totožné - Nekonečně mnoho společných bodů.
- Rovnoběžné - Žádný společný bod. Přímky leží v jedné rovině.
- Různoběžné - Jeden společný bod. Přímky opět leží v jedné rovině.
- Mimoběžné - Žádný společný bod - Přímky neleží v jedné rovině.

Přímka a rovina

Přímka a rovina v prostoru mohou nabývat těchto polohy:

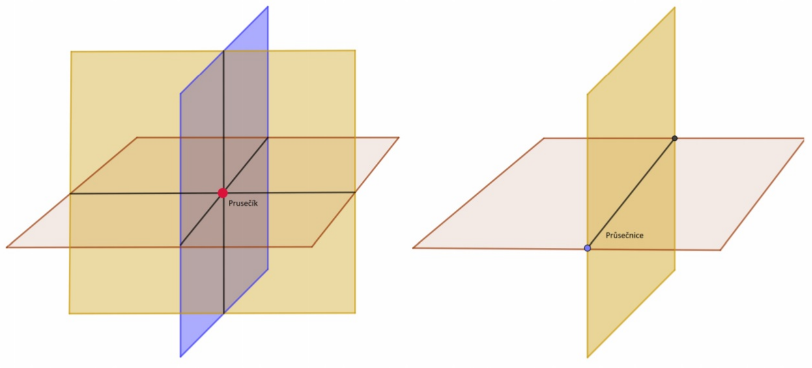
- Přímka a rovina jsou rovnoběžné - Žádný společný bod.
- Přímka a rovina nejsou rovnoběžné - Jeden společný bod.
- Přímka leží v rovině - Nekonečně mnoho společných bodů.

Dvě roviny

Dvě roviny v prostoru mohou nabývat tyto polohy:

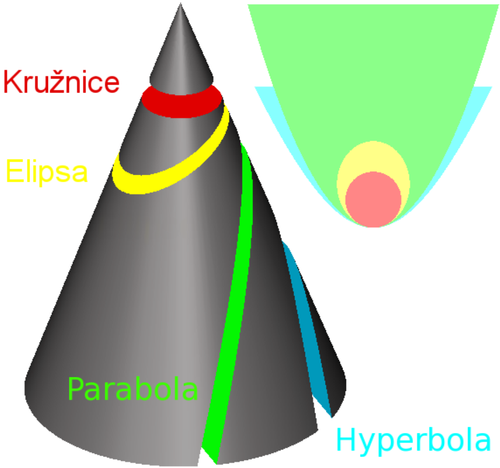
- Totožné - Nekonečně mnoho společných bodů.
- Rovnoběžné - Žádný společný bod.
- Různoběžné - Nekonečně mnoho společných bodů. Tyto body tvoří průsečnici rovin.

Průsečík vs. průsečnice



Obrázek: Průsečík vs. průsečnice.

- Druhy kuželoseček
  - Kružnice
  - Elipsa
  - Hyperbola
  - Parabola



Kružnice

- Definice:
  - „Množina bodů, která má konstantní vzdálenost r od bodu S."
- Střed kružnice $S = [x_0, y_0]$
- Poloměr kružnice r
- Kružnice ve středovém tvaru:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Elipsa

- Definice:
  - „Množina bodů, která má konstantní součet vzdáleností od dvou bodů, ohnisek, rovnou délce $2a$."
- Ohniska E, F
- Střed elipsy $S = [x_0, y_0]$
- Délka hlavní poloosy a
- Délka vedlejší poloosy b
- Excentricita e, vzdálenost ohnisek od středu
- Vztah velikostí poloos a excentricity:

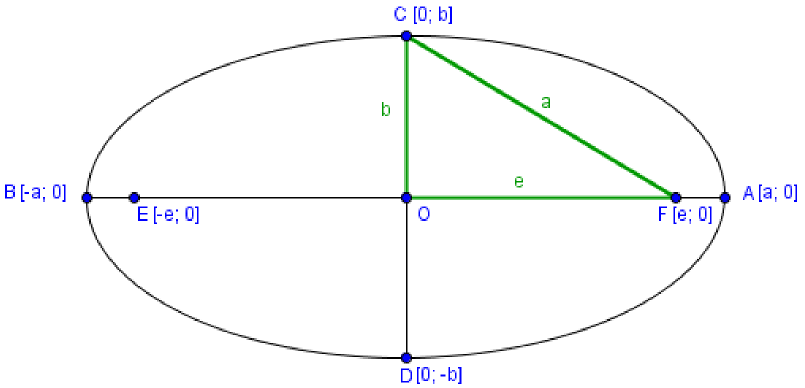
$$a^2 = b^2 + e^2$$

- Zápis elipsy ve středovém tvaru:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Elipsa vyobrazení

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Hyperbola

- Definice:
  - „Množina bodů, která má konstantní rozdíl vzdáleností od dvou bodů, ohnisek, rovný délce $2a$."
- Ohniska E, F
- Střed elipsy $S = [x_0, y_0]$
- Délka hlavní poloosy a
- Délka vedlejší poloosy b
- Excentricita e, vzdálenost ohnisek od středu
- Vztah velikostí poloos a excentricity:

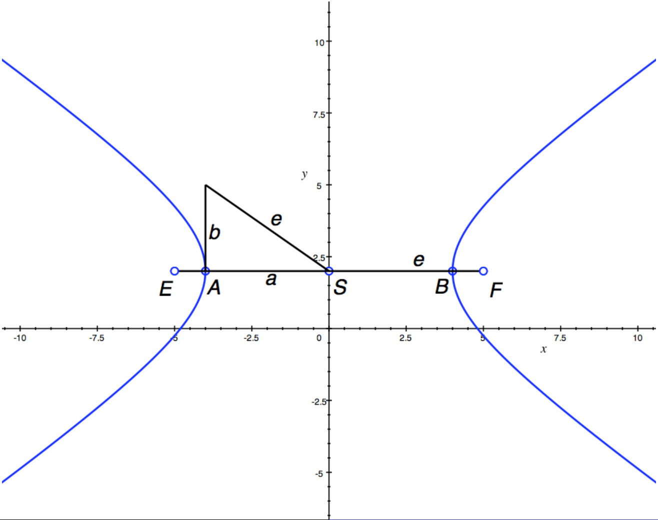
$$e^2 = a^2 + b^2$$

- Zápis elipsy ve středovém tvaru:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Hyperbola vyobrazení

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



Parabola

- Definice:
  - „Množina bodů, které jsou stejně vzdáleny od dané přímky jako od daného bodu.“
- Vrchol paraboly $V = [x_0, y_0]$
- Ohnisko F
- Řídící přímka $\leftrightarrow d$
- Vzdálenost ohniska od řídící přímky p
- Zápis elipsy ve středovém tvaru:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad (y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0), \quad (x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

Parabola vyobrazení

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$